МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ КИБЕРНЕТИКИ

Под редакцией
С. В. ЯБЛОНСКОГО

ВЫПУСК 3

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

ОДИН ОБЩИЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАФА, СВЯЗАННЫХ С ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ

С. В. ЮШМАНОВ, В. Д. ЧЕПОЙ

(МОСКВА, КИШИНЕВ)

§ 1. Введение

Понятия диаметра, радиуса и центра графа представляют не только теоретический интерес, но и возникают естественным образом в приложениях, например в задачах проектирования сетей связи и в задачах о размещении пунктов обслуживания. Поэтому их изучению посвящено много работ. В частности, представляют интерес вопрос о взаимосвязи между диаметром и радиусом графа и вопрос о структуре центра графа.

Известно, что для произвольного графа $r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G)$, причем в [20] показано, что для любых натуральных r и d, удовлетворяющих неравенству $r \leqslant d \leqslant 2r$, существует граф G с $r(G) = r$ и $d(G) = d$. Аналогичная ситуация и для центров. А именно, для любого графа H найдется граф G, центр которого изоморфен H [1]. Поэтому представляется естественным сужение рассматриваемых классов графов, и на этом пути достигнуты некоторые успехи. Так, в [17] было показано, что для хордовых графов $d(G) \geqslant 2r(G) - 3$, а в [9, 3] получена более точная и уже неулучшаемая оценка $d(G) \geqslant 2r(G) - 2$. В [3] найдено, что для птолемеевых графов $d(G) \geqslant 2r(G) - 1$. Характеризация хордовых графов, обладающих тем свойством, что как для них самих, так и для всех их порожденных подграфов $d(G) \geqslant 2r(G) - 1$, получена в [9, 5]. Достаточно много известно и про центры хордовых графов. Установлено, что центр хордового графа связен [17], более того, является блоком [6], выпукл и имеет диаметр не больший трех [3]. И, наконец, в [4] получена характеризация центров хордовых графов. Известна также характеризация центров некоторых узких классов графов (см., например, [21—22]).

Но в целом достигнутое в этих вопросах продвижение не слишком значительно. Это объясняется тем, что отсутствие общих методов оценки метрических характеристик графа вынуждает разрабатывать для каждого отдельного класса графов свой особый метод, применимый, как правило, только к этому классу.

В [3] для технических целей было введено метрическое свойство графа, называемое α_i-метрикой. Здесь показывается, что многие метрические характеристики и свойства графа описываются в терминах α_i-метрики. Это позволяет свести задачу их определения к задаче нахождения минимального i, для которого граф обладает α_i-метрикой. В частности, так можно получить большинство результатов, указанных выше. Целью статьи является демонстрация эффективности такого подхода. Из-за ограниченности объема работы основное внимание уделено результатам, связанным с диаметрами, радиусами и центрами графов.

Материал работы организован следующим образом. В § 2 приводятся основные определения. Графы с α_0- и α_1-метрикой характеризуются в § 3. В частности, там показано, что птолемеевы графы обладают α_0-метрикой, а хордовые графы — α_1-метрикой. В § 4 доказывается, что для конечных графов с α_i-метрикой справедлива оценка $d(G) \geqslant 2r(G) - i - 1$, а для наследственных по расстоянию графов и некоторых важных подклассов класса хордовых графов справедлива даже оценка $d(G) \geqslant 2r(G) - i$. И, наконец, в § 5 исследуются некоторые свойства центров птолемеевых, хордовых и наследственных по расстоянию графов, т. е. исследуются некоторые свойства центров графов с α_i-метрикой, где $i \leqslant 2$.

Часть результатов работы была анонсирована в [7].

§ 2. Основные определения

Всюду в этой работе $G(V, E)$ обозначает связный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин V и множеством ребер E, где V, а, следовательно, и E, не обязательно конечно. Единственным исключением является § 4, где рассматриваются только конечные графы.

Длина простой цепи графа равна числу ее ребер. Простая цепь называется *кратчайшей*, если не существует простой цепи, соединяющей эти вершины и имеющей меньшую длину. *Расстояние* $d_G(x, y)$ (или просто $d(x, y)$, если ясно о каком графе идет речь) между вершинами x, y графа G равно длине кратчайшей простой цепи, соединяющей эти вершины. *Эксцентриситет* $e(v)$ вершины v графа $G(V, E)$ равен $\max d(v, u)$ по всем вершинам $u \in V$. *Радиусом* $r(G)$ и *диаметром* $d(G)$ графа G называются соответственно наименьший и наибольший из эксцентриситетов вершин G. Иными словами,

$$d(G) = \max_{v,u} d(v, u), \quad r(G) = \min_{v} \max_{u} d(v, u).$$

Вершины с минимальным эксцентриситетом, т. е. вершины, эксцентриситет которых равен радиусу, называются *центральными*. Множество всех центральных вершин графа G, а также порожденный ими подграф, называется *центром* графа и обозначается $C(G)$.

Множество всех вершин графа, лежащих на всех кратчайших простых цепях, соединяющих вершины x, y, называется *интервалом* $\langle x, y\rangle$. Множество вершин $A \subseteq V$ графа G, а также порожденный им подграф, *выпуклое*, если для любых x, y из A $\langle x, y\rangle$ лежит в A. Так как возможны и другие определения выпуклых множеств в графах, то, чтобы отличить так определенные выпуклые множества от других типов выпуклых множеств, в литературе их часто называют *метрически выпуклыми*, *d-выпуклыми* или *g-выпуклыми* множествами. Но в нашей работе никаких других видов выпуклых множеств вводиться не будет, поэтому для простоты мы будем говорить просто о выпуклых множествах.

Хордой цепи (не обязательно простой) графа G называется ребро цепи, соединяющее вершины цепи, но не лежащее в ней. Граф G *хордовый* или *триангулированный*, если любой его простой цикл длины не меньшей 4 имеет хорду. Иными словами, граф хордовый, если он не содержит порожденных подграфов, изоморфных простому циклу C_n, $n \geqslant 4$. В дальнейшем нам понадобится следующая характеризация хордовых графов.

Окрестностью $N(v)$ вершины v графа G называется множество всех вершин G, *смежных* с v. Вершина v графа G *симплициальная*, если ее окрестность $N(v)$ порождает в G полный подграф. Граф G *допускает разборку по симплициальным вершинам*, если существует такое упорядочивание его вершин $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_{n-1}, v_n$, что для любого i вершина v_i симплициальная в графе G_i, порожденном множеством вершин $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$.

Теорема 1 [10, 13]. *Для произвольного графа G следующие условия эквивалентны:*

1. *граф G хордовый;*
2. *граф G допускает разборку по симплициальным вершинам.*

Подграф H графа G называется *изометрическим*, если для любых двух вершин $x, y \in H$ $d_G(x, y) = d_H(x, y)$. Граф G *наследственный по расстоянию*, если любой его связный порожденный подграф изометрический. Очевидно, что граф является наследственным по расстоянию тогда и только тогда, когда в нем любая бесхордовая простая цепь является изометрической, т. е. кратчайшей. Поэтому наследственные по расстоянию графы часто определяют как графы, в которых любая бесхордовая простая цепь является кратчайшей. Ряд характеризаций этих графов дан в [15, 16, 8].

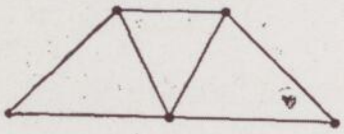

Рис. 1

Граф G *птолемеев*, если его матрица расстояний удовлетворяет неравенству Птолемея, т. е., если для любых четырех его различных вершин x, y, z, v

$$d(x, y)d(z, v) \leqslant d(x, z)d(y, v) + d(x, v)d(y, z).$$

Существуют и более удобные характеризации птолемеевых графов [16, 8]. Отметим следующие характеризации, которыми мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Простая цепь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *локально кратчайшей*, если для любого i выполняется $d(a_i, a_{i+2}) = 2$.

Теорема 2 [16]. *Для произвольного графа G следующие условия эквивалентны:*

1. *граф G птолемеев;*
2. *в G каждая локально кратчайшая цепь является кратчайшей;*
3. *граф G хордовый и наследственный по расстоянию,*
4. *G хордовый и не содержит граф на рис. 1 как порожденный подграф.*

Для любой вершины x графа G и любого r, $1 \leqslant r \leqslant d(G)$, *шар* $B(x, r)$ графа G определяется как множество всех вершин v графа G, для которых выполняется $d(x, v) \leqslant r$.

Кратчайшая простая цепь P, соединяющая вершины x, y простого цикла C, называется *мостом* C, если ее длина меньше расстояния между x и y в C [11]. Мост P цикла C *собственный*, если он не содержит вершин C, отличных от x, y. Ясно, что хорда C есть собственный мост C длины 1. Цикл C графа G *хорошо замощен*, если для каждой вершины x цикла C или существует мост из x в некоторую вершину C, или две смежные с x вершины C смежны. Граф G *замощенный*, если любой его цикл длины не меньшей 4 имеет мост.

Теорема 3 [2, 11]. *Все шары графа G выпуклы тогда и только тогда, когда все его циклы длины, отличной от пяти, хорошо замощены.*

Вершины x, y, z, v графа G удовлетворяют *условию* α_i, если из условия $z \in \langle x, y \rangle$, $y \in \langle z, v \rangle$ следует, что $d(x, v) \geqslant d(x, y) + d(y, v) - i$. Граф обладает α_i-*метрикой*, если любая четверка его различных вершин удовлетворяет условию α_i. Легко видеть, что выполнение условия α_i достаточно проверять только для тех четверок x, y, z, v, $z \in \langle x, y \rangle$, $y \in \in \langle z, v \rangle$, для которых $d(x, y) = 1$. Отметим также, что если граф G обладает α_i-метрикой, то G обладает и α_j-метрикой для любого j, $j > i$.

§ 3. Описание графов с заданной α_i-метрикой

Теорема 4 [3]. *Граф G является птолемеевым тогда и только тогда, когда он обладает α_0-метрикой.*

Доказательство. Пусть G птолемеев. Выберем в G произвольную четверку вершин x, y, z, v такую, что $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$. Простая цепь $x, \ldots, z, \ldots, y, \ldots, v$, соединяющая x с v и образованная объединением кратчайших простых цепей, соединяющих x с z и y с v, является локально кратчайшей и, следовательно (теорема 2), кратчайшей. Тогда $d(x, v) = d(x, y) + d(y, v)$, что и требовалось.

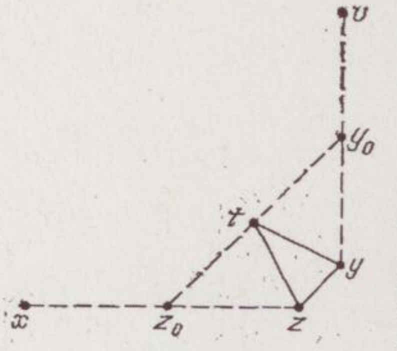

Рис. 2

Пусть теперь G обладает α_0-метрикой. Покажем, что в G все локально кратчайшие цепи являются кратчайшими. Предположим, что это не так. Тогда в G найдется локально кратчайшая цепь $P = x, \ldots, z, \ldots, y, \ldots, v$ такая, что все ее подцепи кратчайшие, а она сама нет. По выбору P имеем $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$, но тогда, в силу условия α_0, $d(x, v) = d(x, y) + d(y, v)$, т. е. P кратчайшая. Получили противоречие. Следовательно, в G каждая локально кратчайшая цепь является кратчайшей. Теорема доказана.

Теорема 5 [3]. *Хордовый граф обладает α_1-метрикой.*

Для доказательства нам понадобится следующая, почти очевидная лемма.

Лемма [17]. *Пусть C есть простой цикл хордового графа. Тогда для любого ребра $(x, y) \in C$ найдется вершина $w \in C$, смежная как с x, так и с y.*

Доказательство. Выберем в G произвольную четверку вершин x, y, z, v такую, что $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$. Не нарушая общности, можно считать, что $d(z, y) = 1$. Если $z \in \langle x, v\rangle$, то x, y, z, v удовлетворяют не только условию α_1, но и условию α_0.

Пусть $z \notin \langle x, v\rangle$. Зафиксируем кратчайшие цепи

$$P_x = x, \ldots, z_0, \ldots, z, y,$$
$$P_v = z, y, \ldots, y_0, \ldots, v,$$
$$P = x, \ldots, x, \ldots, z_0, \ldots, t, \ldots, y_0, \ldots, v,$$

где z_0 есть последняя общая вершина цепей P_x и P, y_0 есть первая общая вершина цепей P_v и P (см. рис. 2), и цепь P выбрана так, чтобы число ее вершин, не лежащих на P_x и P_v было минимально.

Рассмотрим цикл $C = z_0, \ldots, z, y, \ldots, y_0, \ldots, z_0$. Так как граф G хордовый, то по лемме в C найдется вершина t, смежная с z и с y. Ясно, что $d(z_0, t) + d(t, y) = d(z_0, t) + 1 \geqslant d(z_0, y) = d(z_0, z) + 1$, т. е. $d(z_0, t) \geqslant d(z_0, z)$. Но, так как $z \notin \langle x, v\rangle$, то $d(z_0, z) + d(z, t) = d(z_0, z) + 1 > d(z_0, t)$. Поэтому $d(z_0, z) = d(z_0, t)$. Аналогично $d(y, y_0) = d(t, y_0)$. Следовательно, $d(x, v) = d(x, t) + d(t, v) = d(x, z_0) + d(z_0, t) + d(t, y_0) + d(y_0, v) = d(x, z_0) + d(z_0, z) + d(y, y_0) + d(y_0, v) = d(x, z) + d(y, v) = d(x, y) + d(y, v) - 1$, т. е. вершины x, y, z, v удовлетворяют условию α_1, что и требовалось.

Таким образом, мы показали, что хордовые графы обладают α_1-метрикой. Но существуют графы с α_1-метрикой, которые не являются хордовыми. Таков, например, простой цикл C_5. Как будет видно из дальнейшего, многие метрические свойства хордовых графов целиком определяются тем обстоятельством, что они обладают α_1-метрикой. Поэтому графы с α_1-метрикой по своим метрическим свойствам близки к хордовым графам. Это делает естественным следующее определение. Граф называется *почти хордовым*, если он обладает α_1-метрикой.

Теорема 6. *Граф G является почти хордовым тогда и только тогда, когда в G все шары выпуклы и он не содержит подграфов, изометричных графу на рис. 3.*

Доказательство. Если граф на рис. 3 есть изометрический подграф графа G, то $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$, но $d(x, v) = 3 < d(x, y) + d(y, v) - 1 = 4$. Поэтому граф G не является почти хордовым. Допустим теперь, что в G некоторый шар $B(x, r)$ не является выпуклым. Тогда существуют вершины $z, v \in B(x, r)$ и вершина $y \in \langle z, v\rangle$, смежная с y, но не лежащая в $B(x, r)$. Последнее означает, что $d(x, y) = r + 1$ и $d(x, z) = r$. Т. е. $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$, но $d(x, v) \leqslant r < d(x, y) + d(y, v) - 1 = r + d(y, v)$. Следовательно, четверка x, y, z, v графа G не удовлетворяет условию α_1, и граф G не является почти хордовым.

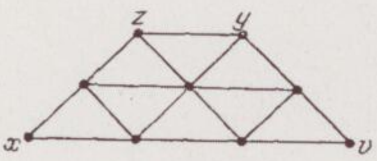

Рис. 3

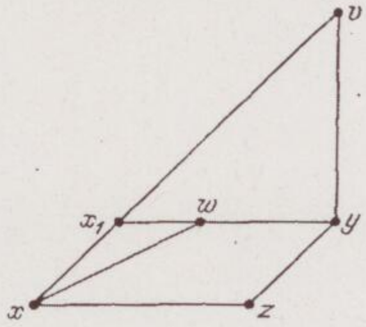

Рис. 4

Обратно, пусть в G все шары выпуклы, однако C не является почти хордовым. Покажем, что в этом случае G содержит подграф, изометричный графу на рис. 3. Среди всех четверок x, y, z, v, для которых условие α_1 не выполнено и $d(x, y) = 1$, т. е., среди всех четверок x, y, z, v, $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$, для которых $d(x, y) = 1$ и $d(x, v) < d(x, y) + d(y, v) - 1$, выберем четверки с минимальным периметром $p(x, y, z, v) = d(x, z) + d(z, y) + d(y, v) + d(x, v)$. А среди четверок с минимальным периметром выберем ту, для которой $d(x, v)$ минимально. Для простоты записи положим $d(x, z) = a$, $d(y, v) = b$, $d(x, v) = c$ (см. рис. 4). Не нарушая общности, можно считать, что $a \geqslant b$.

Рассмотрим теперь два частных случая: $c = 1$, $c = 2$. Если $c = 1$, то $a = b$. Тогда $d(y, v) = d(y, x_0) = a$, $d(y, x) = a + 1$, т. е. $x_0, v \in B(y, a)$, однако $x \notin B(y, a)$. Поскольку шар $B(y, a)$ выпуклый, то $x \notin \langle x_0, v\rangle$. Следовательно, вершины x_0 и v смежны. Но тогда $d(z, v) \leqslant d(z, x_0) + d(x_0, v) = a$, что невозможно, так как $d(z, v) = a + 1$.

Пусть теперь $c = 2$. В таком случае $b \leqslant a \leqslant b + 1$. Если $a = b$, то $x_0, v \in B(y, a)$ и $x \notin B(y, a)$. Так как шар $B(y, a)$ выпуклый, то $x \notin \langle x_0, v\rangle$, т. е. $d(x_0, v) \leqslant 2$. Периметр четверки x_0, y, z, v меньше p, поэтому $2a > d(x, v) = 2 \geqslant d(x_0, v) \geqslant d(z, x_0) + d(y, v) = 2a - 1$, что невозможно. И, наконец, пусть $a = b + 1$ и w есть смежная с x и v вершина. Тогда $x_0, w \in B(y, a + 1)$, $x \notin B(y, a + 1)$ и из выпуклости шара $B(y, a + 1)$ следует, что x_0 и w смежны. Периметр четверки x_0, y, z, v меньше p, поэтому $2b + 1 > d(x, v) = 2 \geqslant d(x_0, v) \geqslant d(z, x_0) + d(y, v) = 2b$, т. е. $b = 1$. В этом случае $z, v \in B(x, 2)$, $y \in \langle z, v\rangle$, но, в противоречие с выпуклостью шара $B(x, 2)$, $y \notin B(x, 2)$. Итак, случаи $c = 1, 2$ невозможны.

Рассмотрим случай $c \geqslant 3$. Отметим, что по выбору четверки x, y, z, v для любой вершины $x' \in \langle x, v\rangle - \{x, y\}$ выполняется соотношение $d(x', z) = d(x', y)$. Действительно, если это не так, скажем, $d(x', y) > d(x', z)$, то, как легко видеть, для четверки x', y, z, v выполнены соотношения $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$, $d(x, y)=1$ и $d(x, v)<d(x, y)+$ $+d(y, v)-1$. При этом $p(x', y, z, v)\leqslant p(x, y, z, v)$, но, вопреки предположению о минимальности $d(x, v)$, $d(x', v)<d(x, v)$. Пусть x_1 есть ближайшая к z вершина интервала $\langle x, v\rangle$, смежная с x.

Пусть $d(z, x_1)=d(y, x_1)=a+1$. Обозначим через w смежную с x_1 вершину интервала $\langle x_1, y\rangle$ (рис. 4). Так как $c\geqslant 3$, то $d(z, w)=d(y, w)=$ $=a$. Из выпуклости шара $B(z, a)$ и соотношений x, $v\in B(z, a)$, $x_1\notin B(z, a)$ вытекает, что x и w смежны. Из выбора вершины x_1 следует, что $w\notin\langle x, v\rangle$. Итак, $x_1\in\langle w, v\rangle$, $w\in\langle x_1, y\rangle$. Периметр четверки x_1, w, v, y равен $p-1$, поэтому $b=d(y, v)\geqslant d(w, y)+d(x_1, v)=a+$ $+c-1$. Так как $a\geqslant b$, то отсюда получаем, что $c\leqslant 1$. Пришли к противоречию.

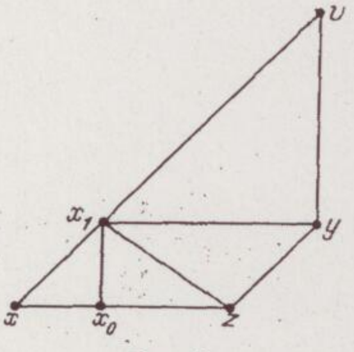

Рис. 5

Следовательно, $d(z, x_1)=d(y, x_1)=a$ (рис. 5). Из выпуклости шара $B(y, a)$ следует, что x_0 смежна с x_1. Периметр четверки z, y, x_0, v меньше p, поэтому $d(x_0, v)\geqslant d(z, x_0)+d(y, v)=$ $=a+b-1$. С другой стороны, $d(x_0, v)\leqslant c<$ $<a+b$. Отсюда заключаем, что $d(x_0, v)=c$, т. е. $x_1\in\langle x_0, v\rangle$, $x_0\in\langle x_1, z\rangle$. Периметр четверки z, x_0, x_1, v равен $p-1$, поэтому $b+1=d(z, v)\geqslant d(z, x_0)+d(x_0, v)=a+c-2$. Так как $c\geqslant 3$, $a+b>c\geqslant a+b-1$, $a\geqslant b$, то отсюда получаем, что $a=b=2$, $c=3$. Пусть x, x_1, v_1, v есть некоторая кратчайшая цепь между x и v. Поскольку $d(x_0, v)=3$ и x_1, $v_1\in\langle x_0, v\rangle$, то из выпуклости шара $B(y, 2)$ следует, что $d(y, v_1)=2$. Кроме того, x_0, $y\in B(v_1, 2)$, $z\in\langle x_0, y\rangle$, поэтому $d(z, v_1)=2$. Из выпуклости шара $B(z, a)$ и соотношений x, $v\in$ $\in B(z, a)$, $x_1\notin B(z, 2)$ вытекает, что v_0 и v_1 смежны. Итак,

$$d(z, x)=d(y, v)=d(y, v)=d(z, x_1)=d(y, x_1)=d(z, v_1)=d(y, v_1)=2,$$
$$d(z, v)=d(y, v)=d(x_0, v)=d(v_0, x)=d(x, v)=3.$$

Пусть x_1, w, y есть некоторая кратчайшая цепь между x_1 и y. Из выпуклости шаров $B(x, 2)$, $B(x, 1)$ и соотношений z, $w\in B(x, 2)$, $y\notin$ $\notin B(x, 2)$ вытекает, что w смежна с z и x_0. Если w смежна с одной из вершин v_0 или v_1, то она обязательно смежна и с другой. Но тогда подграф, порожденный вершинами z, y, x, v, x_0, v_0, x_1, v_1, w изометричен графу на рис. 3.

Пусть теперь w не смежна ни с v_0 ни с v_1. Поскольку $w\in\langle y, x_1\rangle$, y, $x_1\in B(v, 2)$, то $w\in B(v, 2)$. Из равенства $d(x_0, v)=3$ вытекает, что $d(w, v)=2$. Пусть $w'\in\langle v, w\rangle$. В силу выпуклости шаров $B(z, 2)$, $B(y, 1)$ вершина w' смежна с v_0 и y. Так как $d(z, v_1)=2\geqslant d(z, w')$, то из выпуклости шара $B(z, 2)$ и равенства $d(z, v)=3$ вытекает, что w' смежна с v_1. Так как шар $B(x_1, 1)$ выпуклый, то w' смежна и с x_1. Тогда $d(x, w')=d(z, x)=2$. Из выпуклости шара $B(x, 2)$ и соотношения $y\notin B(x, 2)$ следует, что w' смежна с z. Но это противоречит равенству $d(z, v)=3$. Теорема доказана.

Используя данную в теореме 3 характеризацию графов, в которых все шары выпуклы, немедленно получим

Следствие 1. *Граф G является почти хордовым тогда и только тогда, когда все его циклы длины, отличной от пяти, хорошо замощены и он не содержит подграфов, изометричных графу на рис.* 3.

Теорема 6 позволяет установить соотношения между классами хордовых и почти хордовых графов.

Колесом W_n называется граф, полученный из простого цикла C_{n-1} добавлением новой вершины, смежной со всеми вершинами цикла (см. рис. 6, на котором изображено колесо W_5).

Теорема 7. *Граф G является хордовым тогда и только тогда, когда он почти хордовый и не содержит порожденных подграфов, изоморфных простому циклу C_5 и колесу W_n, $n \geqslant 5$.*

Доказательство. Очевидно, что хордовый граф является почти хордовым и не содержит порожденных подграфов, изоморфных простому циклу C_5 и колесу W_n, $n \geqslant 5$. Предположим теперь, что существует почти хордовый граф G, удовлетворяющий условиям теоремы, но не являющийся хордовым. Тогда в G найдется хоть один бесхордовый цикл длины не меньшей 4. Среди всех таких циклов выберем цикл C минимальной длины. Из условий теоремы и следствия 1 к теореме 6 вытекает, что длина C больше пяти и он не является изометрическим. Следовательно, в C есть хоть один мост, причем собственный. Пусть $P = x,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ y$ есть собственный мост C, а $P_1 = x,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k,\ y$ и $P_2 = x,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_m,\ y$ суть цепи в C, соединяющие x и y. Длина каждого из циклов $C_1 = P \cup P_1$, $C_2 = P \cup P_2$ меньше длины C. Поэтому циклы C_1 и C_2 разбиваются хордами на треугольники. В частности, так как цепи P, P_1 и P_2 порожденные, вершина a_1 смежна с v_1 и w_1. Теперь заметим, что если a_1 смежна с вершинами v_i, v_j (или w_i, w_j), то она смежна и со всеми вершинами цепи P_1 (цепи P_2), лежащими между ними. Итак, пусть a_1 смежна с $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r$ и с $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_s$. Поскольку a_1 не смежна с v_{r+1} и с w_{s+1}, то v_r и w_s смежны с a_2 (или с y, если $k = 1$). Следовательно, вершины $x,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r,\ a_2,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_s,\ a_1$ порождают колесо, чего быть не может.

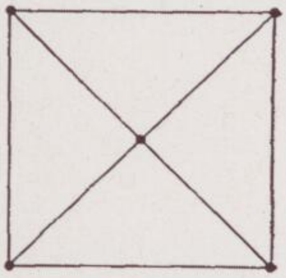

Рис. 6

Теорема 8. *Наследственный по расстоянию граф обладает α_2-метрикой.*

Доказательство. Пусть некоторый наследственный по расстоянию граф не удовлетворяет условию α_2. Тогда множество четверок x, y, z, v таких, что $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$, но $d(x, v) < d(x, y) + d(y, v) - 2$, непусто. Зафиксируем произвольную такую четверку x, y, z, v с минимальным $d(x, v)$ и простую цепь $P = a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m,\ a_{m+1},\ \ldots,\ a_n$, где $a_0 = x$, $a_m = z$, $a_{m+1} = y$, $a_n = v$ и простые цепи $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m,\ a_{m+1}$ и $a_m,\ a_{m+1},\ \ldots,\ a_n$ кратчайшие. По выбору x, y, z, v цепь P не может быть кратчайшей. Следовательно, P имеет хорду. Все хорды P должны иметь вид (a_k, a_l), $k < m$, $l > m + 1$. Обозначим через i и j соответственно минимальное k такое, что P имеет хорду(a_k, a_1), $k < l$, и максимальное l такое, что P имеет хорду (a_i, a_l). Цепь $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_i,\ a_j,\ \ldots,\ a_n$ бесхордовая и, следовательно, кратчайшая.

Поэтому четверка a_i, z, y, a_j удовлетворяет условию α_i для некоторого i тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет и a_0, z, y, a_n. В силу выбора a_0, z, y, a_n это означает, что $d(a_0, a_n) = d(a_i, a_j) = 1$. Тогда, сравнивая цепи $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{m-1}$ и $a_0,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n-},\ \ldots,\ a_{m+1}$, получим, что $d(a_0, a_m) \leqslant d(a_{m+1}, a_n)$. С другой стороны, из сравнения цепей $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots$ $\ldots,\ a_{m+1},\ a_m$ и $a_n,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$ следует, что $d(a_{m+1}, a_n) \leqslant d(a_0, a_m)$, откуда получаем, что $d(a_0, a_m) = d(a_{m+1}, a_n)$. Следовательно, цепь $a_0,\ \ldots$ $\ldots,\ a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_{m+1}$ кратчайшая, а цепь $a_0,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_{m+1},\ a_m$ уже нет. Это означает, что она имеет хорду и эта хорда есть (a_0, a_m). Рассуждая аналогично, получим, что цепь $a_n,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m,\ a_{m+1}$ имеет хорду (a_n, a_{m+1}).

В силу кратчайшести цепей $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$ и $a_{m+1},\ a_{m+2},\ \ldots,\ a_n$ это означает, что $m = 1$, $n = 3$ и $d(a_0, a_n) = d(a_0, a_{m+1}) + d(a_{m+1}, a_n) - 2$, что противоречит выбору четверки $a_0 = x$, $a_m = z$, $a_{m+1} = y$, $a_n = v$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 4. Диаметры и радиусы графов

Напомним, что в этом параграфе графы предполагаются конечными.

Теорема 9. *Если граф G обладает α_i-метрикой, то*

$$2r(G) \geqslant d(G) \geqslant 2r(G) - i - 1. \tag{4.1}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только правое неравенство. Достаточно рассмотреть случай $r(G) > 1$. Обозначим через $S(u)$ множество $\{v | d(u, v) = r(G)\}$ и выберем в G центральную вершину y таким образом, чтобы для любой другой центральной вершины y' из условия $S(y') \subseteq S(y)$ следовало бы, что $S(y') = S(y)$. Зафиксируем вершину $x \in S(y)$ и вершину z, $z \in \langle y, x\rangle$, $d(z, y) = 1$, и покажем, что в G найдется вершина v такая, что $y \in \langle z, v\rangle$ и $d(y, v) \geqslant r(G) - 1$.

Действительно, если такой вершины v нет, то для любого $w \in V$ либо $d(y, w) < r(G) - 1$ и, следовательно, $d(z, w) < r(G)$, либо $d(z, w) \leqslant d(y, w) \leqslant r(G)$. А это означает, что вершина z центральная и $S(z, r(G)) \subset S(y, r(G))$, причем, вопреки выбору y, включение здесь строгое, так как $x \in S(y, r(G))$, но $x \notin S(z, r(G))$.

Следовательно, в G нашлась четверка x, y, z, v такая, что $z \in \langle x, y\rangle$, $y \in \langle z, v\rangle$, $d(x, y) = r(G)$, $d(y, v) \geqslant r(G) - 1$. В силу условия α_i это означает, что $d(x, v) \geqslant 2r(G) - i - 1$, откуда и следует утверждение теоремы.

Отсюда, учитывая результаты § 3, получаем следующие оценки.

Следствие 1 [3]. *Для птолемеева графа G*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 1.$$

Следствие 2. *Для почти хордового графа G*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 2.$$

Следствие 3 [9, 3]. *Для хордового графа G*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 2.$$

Следствие 4. *Для наследственного по расстоянию графа G*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 3.$$

Таким образом, для оценки диаметра графа через его радиус достаточно найти минимальное i, для которого граф обладает α_i-метрикой, причем в ряде случаев, используя дополнительную информацию о рассматриваемом классе графов, удается показать, что неравенство в (4.1) строгое.

Подсолнухом S_n называется хордовый граф с множеством вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ такой, что вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$ образуют простой цикл длины n, вершины $u_1, u_2, \ldots, u_n$ попарно несмежны, и вершина u_i для любого i смежна только с v_i и v_j, где $j = i - 1 \pmod n$. Подсолнух S_3 изображен на рис. 7. Легко видеть, что $d(S_3) = 2r(S_3) - 2$, так что оценка $d(G) \geqslant 2r(G) - 2$ для хордовых и почти хордовых графов неулучшаема, но имеет место следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть почти хордовый граф G не содержит порожденных подграфов, изоморфных простому циклу C_5 и подсолнуху S_3. Тогда*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 1. \tag{4.2}$$

Доказательство. Выберем в G произвольную центральную вершину y, для которой множество $S(y) = \{v | d(y, v) = r(G)\}$ минимально по мощности, и зафиксируем произвольную вершину $x \in S(y)$. Для всех вершин z, $z \in \langle x, y\rangle$ и $d(z, y) = 1$, определим множество $W(z) = \{w | d(y, w) < r(G) - 1$ или $d(z, w) < d(y, w)\}$ и выберем вершину z таким образом, чтобы для любой другой вершины z', $z' \in \langle x, y\rangle$, $d(z', y) = 1$, из условия $W(z) \subseteq W(z')$ следовало бы, что $W(z') = W(z)$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 9, получим, что в G найдется вершина v такая, что $y \in \langle z, v\rangle$ и $d(y, v) \geqslant r(G) - 1$.

Применяя к x, y, z, v условие α_1, получим, что $d(x, v) \geqslant 2r(G)-2$. Если $d(x, v) \geqslant 2r(G)-1$, то (3.2) выполнено. Пусть $d(x, v)=2r(G)-2$. Зафиксируем кратчайшие цепи

$$P_x = x, \ldots, a_0, \ldots, a_m,$$
$$P_v = a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n+1},$$
$$P = x, \ldots, a_0, c_1, \ldots, c_m, \ldots, c_{n-1}, a_{n+1},$$

где $a_m = z$, $a_{m+1} = y$, a_0 есть последняя общая вершина цепей P_x и P, a_{n+1} есть первая общая вершина цепей P_v и P (см. рис. 8), и цепь P выбрана так, чтобы число ее вершин, не лежащих па P_x и P_v, было минимально. Очевидно, что $d(x, c_m)=d(x, z)=r(G)-1$.

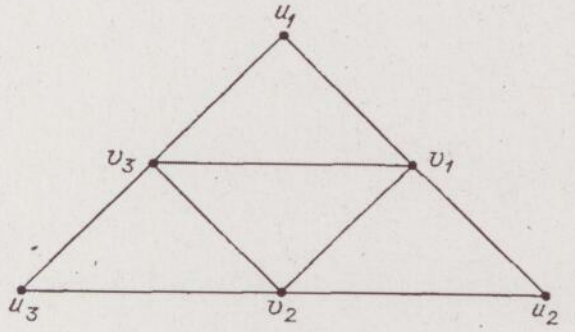

Рис. 7

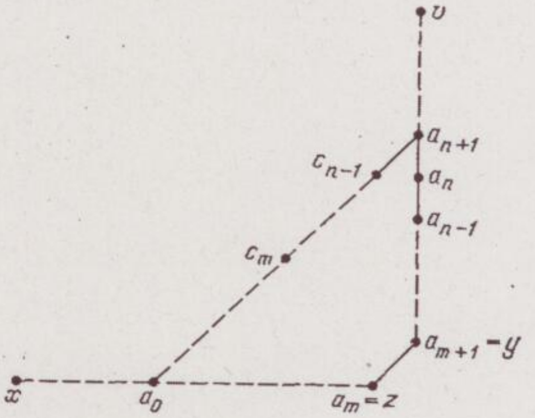

Рис. 8

Покажем, что вершина c_{m+1} смежна с y, c_m смежна с y и z, и c_{m-1} смежна с z.

Если $d(a_0, a_{n+1})=2$, то $n=2$, $m=1$, $c_{m-1}=c_0$, $c_m=c_1$, $c_{m+1}=a_3$, $z=a_1$, $y=a_2$ и вершины c_1, a_0, a_1, a_2, a_3 образуют цикл C длины 5. Но по условию теоремы в G нет бесхордовых циклов длины 5, а так как вершины любого бесхордового цикла длины 4 удовлетворяют условию α_2, но не удовлетворяют условию α_1, то в G не может быть и бесхордовых циклов длины 4. Следовательно, C должен содержать не менее двух хорд. Ими могут быть только ребра (c_1, z) и (c_1, y), что и требовалось.

Пусть теперь $d(a_0, a_{n+1}) \geqslant 3$. Ясно, что $d(c_{n-1}, a_{n-1}) \leqslant 3$. В силу минимальности P цепь $a_0, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ кратчайшая. Поэтому, если $d(c_{n-1}, a_{n-1})=3$, то вершины a_0, a_{n-1}, a_n, c_{n-1} удовлетворяют условию α_3, но не удовлетворяют условию α_2, чего быть не может. Пусть $d(c_{n-1}, a_{n-1})=2$. Если при этом $(c_{n-1}, a_n) \in E$, то вершины a_0, a_{n-1}, a_n, c_{n-1} удовлетворяют условию α_2, но не удовлетворяют условию α_1, что тоже невозможно. Следовательно, $(c_{n-1}, a_n) \notin E$ и существует вершина w, смежная с c_{n-1} и a_{n-1}. Из кратчайшести P_v и P следует, что $w \notin P_x$ и $w \notin P_v$. Если же $w \in P$, т. е. $w = c_{n-2}$, то вершины c_{n-2}, c_{n-1}, a_{n+1}, a_n, a_{n-1} образуют цикл длины 5, который должен иметь две хорды, чего быть не может. Поэтому $w \notin \{P_x \cup P_v \cup P\}$ и цикл a_{n-1}, w, c_{n-1}, a_{n+1}, a_n, должен содержать не менее двух хорд. Ими могут быть только ребра (w, a_{n+1}) и (w, a_n). Но тогда цепь P_v', полученная из P_v заменой a_n на w, является кратчайшей и, следовательно, вершины a_0, a_{n-1}, w, c_{n-1} удовлетворяют условию α_2, но не удовлетворяют условию α_1, невозможно.

Остался последний случай: $d(c_{n-1}, a_{n-1})=1$. Тогда вершины a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, c_{n-1} образуют цикл длины 4, который должен иметь хорду. Ею может быть только ребро (c_{n-1}, a_n). Следовательно, вершина c_{n-1} смежна с a_n и a_{n+1}.

Рассмотрим теперь вместо P и P_v кратчайшие цепи

$$P'_v = a_m, \quad a_{m+1}, \ \ldots, a_{n-1}, \quad c_{n-1},$$
$$P' = a_0, \quad c_1, \ \ldots, c_{n-2}, \quad c_{n-1},$$

и, рассуждая, как выше, получим, что c_{n-2} смежна с a_{n-2} и a_{n-1}. Повторяя эти рассуждения столько раз, сколько надо, получим, что c_{m+1} смежна с a_{m+2} и $a_{m+1} = y$, а c_m смежна с $a_m = z$ и $a_{m+1} = y$.

Смежность вершины c_{m-1} с $a_m = z$ показывается аналогично, с той только разницей, что теперь мы просматриваем цепь P, двигаясь по ней от вершины c_1 до c_{m-1}.

Таким образом, $c_m \in \langle x, y \rangle$ и $d(c_m, y) = 1$. Поэтому множество $W(c_m)$ определено. Покажем, что $W(z) \subseteq W(c_m)$. Пусть это не так. Тогда найдется $w \in W(z)$ такое, что $w \notin W(c_m)$. Из последнего условия следует, что $d(c_m, w) > d(y, w)$ и $d(y, w) \geqslant r(G) - 1$. В силу смежности c_m и y это означает, что $d(c_m, w) = d(y, w) + 1$. Если $d(y, w) > r(G) - 1$, то, применяя к x, c_m, y, w условие α_1, получим, что $d(x, w) \geqslant 2r(G) - 1$ и теорема доказана. Пусть $d(y, w) = r(G) - 1$. Тогда из условия $w \in W(z)$ получим, что $d(z, w) \leqslant d(y, w) = r(G) - 1$. С другой стороны, $d(c_m, w) = d(x, w) + 1 = r(G)$ и $(z, c_m) \in E$, откуда получаем, что $d(y, w) \geqslant r(G) - 1$. Следовательно, $d(z, w) = d(y, w) = r(G) - 1$ и $(z, y) \in E$. Тогда найдется смежная с z и с y вершина q такая, что $d(q, w) = r(G) - 2$.

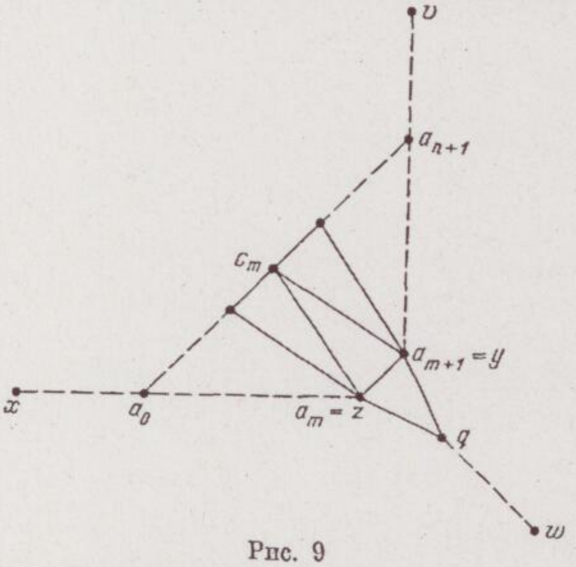

Рис. 9

Действительно, пусть это не так. Зафиксируем кратчайшие цепи $z, z_1, z_2, \ldots, w$ и $y, y_1, y_2, \ldots, w$, соединяющие z и y с w. В силу нашего предположения о несуществовании q $y_1 \neq z_1$ и $(y_1, z) \notin E$ и $(z_1, y) \notin E$. Ясно, что $d(z_1, y_1) \leqslant 3$. Если $d(z_1, y_1) = 3$, то вершины z_1, y, y_1, w удовлетворяют условию α_2, но не удовлетворяют условию α_1; а если $d(z_1, y_1) = 1$, то вершины z_1, z, y, y_1 удовлетворяют условию α_2, но не удовлетворяют условию α_1. Поэтому $d(z_1, y_1) = 2$ и существует вершина $p \notin \{y, z\}$, смежная и с y_1 и с z_1. Тогда вершины z_1, z, y_1, p образуют простой цикл длины 5. Как показано выше, в G любой простой цикл длины 5 должен иметь не менее двух хорд. Следовательно, $(p, z) \in E$ и $(p, y) \in E$. Если $d(w, p) = r(G) - 2$, то вершина p и есть искомая. Поэтому $d(w, p) = r(G) - 1$. Но тогда вершины w, z_1, p, y_1 удовлетворяют условию α_2, но не удовлетворяют условию α_1. Следовательно, наше предположение неверно и найдется смежная с z и с y вершина q такая, что $d(q, w) = r(G) - 2$. Ясно, что $(q, c_m) \notin E$, так как в противном случае $d(c_m, w) \leqslant r(G) - 1$, чего быть не может. Рассмотрим теперь подграф G', порожденный вершинами c_{m-1}, c_m, c_{m+1}, z, y, q (см. рис. 9). Из кратчайшести цепей P_x, P_v, P следует, что c_{m-1} несмежно с c_{m+1} и y, а c_{m+1} несмежно с z. Если же в G есть ребро (c_{m+1}, q) (ребро (c_{m-1}, q)), то вершины c_{m+1}, q, c_m, z (вершины c_{m+1}, q, c_m, z) образуют бесхордовый цикл длины 4, но, как мы уже отметили выше, G не может содержать таких циклов. Это означает, что G' изоморфен S_3, чего быть не может. Следовательно, $W(z) \subseteq W(t)$. Но, как легко видеть, $v \in W(t)$ и $v \notin W(z)$, откуда следует, вопреки выбору z, что $W(z) \subset W(t)$. Теорема доказана.

Следствие 1 [17, 5]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *граф G является хордовым и не содержит порожденного подграфа, изоморфного S_3;*
2. *для любого порожденного подграфа G' графа G*

$$d(G') \geqslant 2r(G') - 1.$$

Доказательство. Любой порожденный подграф хордового графа хордовый. Поэтому импликация $1 \Rightarrow 2$ следует из теоремы. Для доказательства же импликации $2 \Rightarrow 1$ достаточно заметить, что если G содержит порожденный подграф G', изоморфный подсолнуху S_3 или простому циклу C_n, $n \geqslant 4$, то $d(G') \leqslant 2r(G') - 2$.

Следствие 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *граф G является замощенным и не содержит порожденного подграфа, изоморфного S_3;*
2. *для любого порожденного подграфа G' графа G*

$$d(G') \geqslant 2r(G') - 1;$$

3. *граф G не содержит ни изометрических циклов длины больше трех, ни порожденных подграфов, изоморфных S_3.*

Доказательство. Импликации $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$ очевидны.

$1 \Rightarrow 2$. Пусть G' есть некоторый изометрический подграф графа G. Тогда G' тоже является замощенным и не содержит порожденных подграфов, изоморфных S_3. Но в замощенных графах все шары выпуклы (теорема 3). Поскольку G не содержит порожденных подграфов, изоморфных S_3, то G не содержит и порожденных подграфов, изоморфных графу на рис. 3. По теореме 6 граф G' является почти хордовым. Но тогда по теореме 10 $d(G') \geqslant 2r(G') - 1$.

Из теоремы 1 следует, что птолемеевы графы являются хордовыми и не содержат порожденного подграфа, изображенного на рис. 1. Следовательно, они не могут содержать и S_3 как порожденный подграф, что дает для птолемеева графа оценку $d(G) \geqslant 2r(G) - 1$, полученную выше (следствие 1 к теореме 9) другим способом.

Хордовый граф называется *сильно хордовым* [12], если в нем любой простой цикл четной длины имеет хорду, соединяющую вершины, расстояние между которыми в цикле нечетно. В [12] было показано, что хордовый граф является сильно хордовым тогда и только тогда, когда он не содержит порожденного подграфа, изоморфного S_n, $n \geqslant 3$, отсюда получаем

Следствие 3. *Для сильно хордового графа G*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 1.$$

Граф называется *графом интервалов*, если он является графом пересечений семейства интервалов вещественной прямой. Тройка вершин графа *астероидальная*, если для любых двух вершин тройки найдется их соединяющая простая цепь, не проходящая через третью вершину и смежные с ней. Известно [19], что граф является графом интервалов тогда и только тогда, когда он хордовый и не содержит астероидальных троек. Но любой подсолнух S_n содержит астероидальную тройку. Поэтому граф интервалов не может содержать S_n, и, следовательно, является сильно хордовым.

Следствие 4. *Для графа интервалов G*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 1.$$

Отметим еще, что введенные соответственно в [14] и [18] тривиально совершенные графы и хордовые совершенные графы окрестностей являются хордовыми и не содержат S_3 в качестве порожденного подграфа, что дает еще два следствия.

Следствие 5. *Для тривиально совершенных графов*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 1.$$

Следствие 6. *Для хордовых совершенных графов окрестностей*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 1.$$

И, наконец, возвратясь к наследственным по расстоянию графам, отметим, что для них оценку $d(G) \geqslant 2r(G) - 3$ (из следствия 4 к теореме 9) можно улучшить.

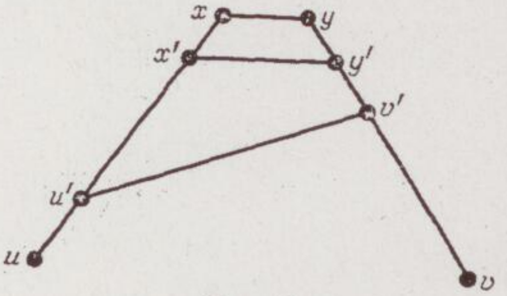

Рис. 10

Теорема 11. *Для наследственного по расстоянию графа*

$$d(G) \geqslant 2r(G) - 2.$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть вершины x, y, x', y' наследственного по расстоянию графа G таковы, что*

$$x \in \langle y, u \rangle, \ y \in \langle x, v \rangle,$$
$$x' \in \langle x, u \rangle, \ y' \in \langle y, v \rangle,$$
$$d(x', x) = d(x, y) = d(y, y') = 1.$$

Тогда вершины x' и y' смежны в том и только том случае, когда $d(u, v) < d(u, x) + d(x, y) + d(y, v)$.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Пусть P_1 есть кратчайшая цепь из x в u, проходящая через вершину x', а P_2 есть кратчайшая цепь из y в v, проходящая через вершину y' (см. рис. 10). Если $d(u, v) < d(u, x) + d(y, v) + 1$, то цепь $P = P_1 \cup (x, y) \cup P_2$ не является кратчайшей, а, следовательно, имеет хоть одну хорду вида (u', v'), где $u' \in P_1$, $v' \in P_2$. Легко видеть, что в наследственном по расстоянию графе любое ребро простого цикла принадлежит некоторому циклу длины не больше четырех, все вершины которого принадлежат исходному циклу. Следовательно, ребро (x, y) цикла $C = x, x', \ldots, u', v', \ldots, y', y, x$ принадлежит некоторому циклу длины не больше четырех с вершинами из C. Поскольку $x \in \langle u', y \rangle$, $y \in \langle x, v' \rangle$, то длина этого цикла равна четырем, и он имеет вид x, y, y', x', x (т. е. x и y смежны, что и требовалось).

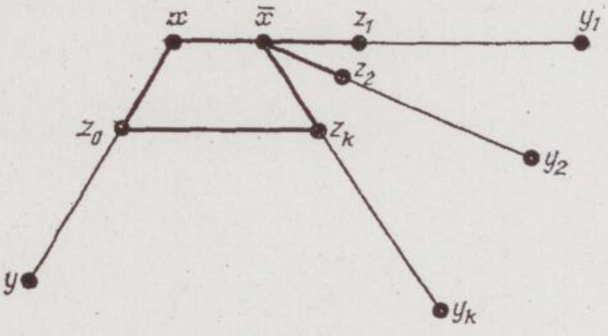

Рис. 11

Доказательство теоремы 1. Для произвольной вершины z положим

$$E(z) = \{v \in V : d(z, v) \geqslant r(G) - 1\}, \quad E_0(z) = \{v \in V : d(z, v) \geqslant r(G)\}$$

и выберем в G вершину x, для которой $E_0(x)$ минимально. Обозначим через $U_0(x)$ множество всех вершин, смежных с x и принадлежащих множеству $\cup\{\langle x, y \rangle : v \in E_0(x)\}$. Пусть $E(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. В $U_0(x)$ выберем вершину $\bar{x}$, принадлежащую максимальному числу интервалов $\langle x, y_i \rangle$. Пусть $\bar{x} \in \langle x, y_1 \rangle \cap \ldots \cap \langle x, y_k \rangle$, причем, не нарушая общности, можно считать, что $y_k \in \langle x, y_0 \rangle$. Тогда, в силу выбора x, существует вершина y такая, что $y \in E_0(\bar{x}) \setminus E_0(x)$, т. е. $x \in \langle \bar{x}, y \rangle$ (рис. 11). Очевидно, что $y \in E(x)$. Если вершины z_0 и z_k несмежны (рис. 11), то по лемме 2 $d(y, y_k) = d(y, x) + 1 + d(\bar{x}, y_k) \geqslant 2r(G) - 1$, откуда и следует утверждение теоремы. Поэтому можно считать, что z_0 и z_k смежны, т. е. $z_0 \in U_0(x)$. Если z_0 смежна и со всеми остальными вершинами $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$, то, вопреки выбору $\bar{x}$, $z_0 \in \langle x, y\rangle \cap \langle x, y_1\rangle \cap \ldots \cap \langle x, y_k\rangle$. Следовательно, для некоторого $i < k$ вершины z_0 и z_i несмежны. Но тогда, по свойству 2, $d(y, y_i) \geqslant d(y, x) + 1 + d(\bar{x}, y_i) \geqslant r(G) - 1 + 1 + r(G) - 2 = 2r(G) - 2$. Теорема доказана.

Пример простого цикла C_4 показывает, что доказанная в этой теореме оценка $d(G) \geqslant 2r(G) - 2$ неулучшаема.

§ 5. Центры графов

Теорема 1.2. *Пусть в графе G все шары выпуклы. Тогда центр $C(G)$ графа G выпукл и связен.*

Доказательство. Центр любого графа можно представить как пересечение всех его шаров радиуса r, т. е.

$$C(G) = \cap\{B(x, r(G)) : x \in V\}.$$

Но пересечение выпуклых множеств само является выпуклым множеством. Поэтому, если в G все шары выпуклы, то и его центр тоже выпукл. Для завершения доказательства остается заметить, что любое выпуклое множество содержит все кратчайшие цепи, соединяющие все пары его вершин и, следовательно, связно.

Следствие 1. *Центр почти хордового графа выпукл и связен.*

Следствие 2 [17]. *Центр хордового графа связен.*

Диаметр $d(X)$ подмножества X вершин графа G по определению равен $\max\{d(x, y) : x, y \in X\}$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, непосредственно вытекающая из определения хордового графа.

Лемма 1. *Если для вершин x, y, z хордового графа*
$$d(x, y) = 1,\ d(x, z) = d(y, z) = k,$$
то существует вершина v, смежная с x и y, такая, что $d(v, z) = k - 1$.

Теорема 13. *Для птолемеева графа*

$$d(C(G)) \leqslant 2.$$

Доказательство. Пусть это не так. Тогда, в силу выпуклости $C(G)$, найдутся вершины $x, y \in C(G)$ такие, что $d(x, y) = 3$. Пусть $P = v_1, v_2, v_3, v_4$, где $x = v_1$, $y = v_4$, есть некоторая кратчайшая цепь между x и y. Поскольку $v_3 \in \langle x, y\rangle \subset C(G)$, то существует вершина v, для которой $d(v, v_2) = r(G)$. Так как все вершины P лежат в $C(G)$, то $d(v, v_3) \leqslant r(G)$. Если $d(v, v_3) < r(G)$, то $v_3 \in \langle v_2, v\rangle$, и по теореме 9 получим $d(x, v) = r(G) + 1$, что невозможно. Итак, $d(v, v_3) = r(G)$. По лемме 1 существует вершина $u \in \langle v_2, v\rangle \cap \langle v_3, v\rangle$, смежная с v_2 и v_3. Поскольку $d(x, y) = 3$, то хотя бы одна из вершин x, y, например x, не смежна с u. В этом случае $v_2 \in \langle x, u\rangle$, $u \in \langle v_2, v\rangle$ и, в силу условия α_0, $d(x, v) = r(G) + 1$. Но это противоречит включению $x \in C(G)$. Следовательно, $d(C(G)) \leqslant 2$.

Теорема 1.4. *Для хордового графа*

$$d(C(G)) \leqslant 3.$$

Доказательство. Пусть это не так. Тогда, в силу выпуклости $C(G)$, найдутся вершины $x, y \in C(G)$ такие, что $d(x, y) = 4$. Пусть $P = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$, где $x = v_1$, $y = v_5$, есть некоторая кратчайшая цепь между x и y. Поскольку $v_3 \in \langle x, y\rangle \subset C(G)$, то существует вершина v, для которой $d(v, v_3) = r(G)$. Так как все вершины P лежат в $C(G)$ и G удовлетворяет условию α_1, то $d(v, v_i) = r(G)$ для всех $i = 1, \ldots, 5$. Согласно лемме 1 найдутся вершины $u_i \in \langle v_i, v\rangle \cap \langle v_{i+1}, v\rangle$, $i = 1, \ldots, 4$, смежные с v_i, v_{i+1}. Поскольку $u_1, u_2 \in \langle v_2, v\rangle$, $u_2, u_3 \in \langle v_3, v\rangle$, $u_3, u_4 \in \in \langle v_4, v\rangle$, то вершины этих пар либо смежны, либо совпадают. По лемме 1 найдутся вершины $w_i \in \langle u_i, v\rangle \cap \langle u_{i+1}, v\rangle$, $i = 1, \ldots, 3$, смежные с u_i, u_{i+1}. В цикле $C = v_2, u_1, w_1, w_2, w_3, u_4, v_4, v_3, v_2$ могут совпадать только w_1 с w_2 и w_2 с w_3, а остальные вершины попарно различны. Так как $d(v, w_1) = r(G) - 2$ для всех i, то в C могут быть только хорды (v_3, u_1), (v_3, u_4), (v_2, u_4), (v_3, u_1), (v_4, u_1), (v_4, u_1). Однако, наличие в C хоть одной из этих хорд приведет к тому, что $d(x, y) < 4$, чего быть не может. Следовательно, $d(C(G)) \leqslant 3$.

Теорема 15. *Для наследственного по расстоянию графа*

$$d(C(G)) \leqslant 3.$$

Доказательство. Пусть это не так. Тогда найдутся вершины $x, y \in C(G)$ такие, что $d(x, y) = k + 1 \geqslant 4$. Пусть $P = x, x_1, \ldots, x_k, y$ есть некоторая кратчайшая цепь между x и y. Для x_k существует вершина z такая, что $d(z, x_k) = r(G)$. Возможны два случая: $d(y, z) < r(G)$, $d(y, z) = r(G)$. В первом случае $y \in \langle x_k, z\rangle$, $x_k \in \langle x, y\rangle$, и в силу свойства α_2, вопреки выбору x, получим $d(x, z) \geqslant d(x, y) + d(y, z) - 2 \geqslant r(G) + 1$. Следовательно, $d(y, z) = r(G)$. Тогда любая вершина $z_0 \in \langle z, y\rangle$, смежная

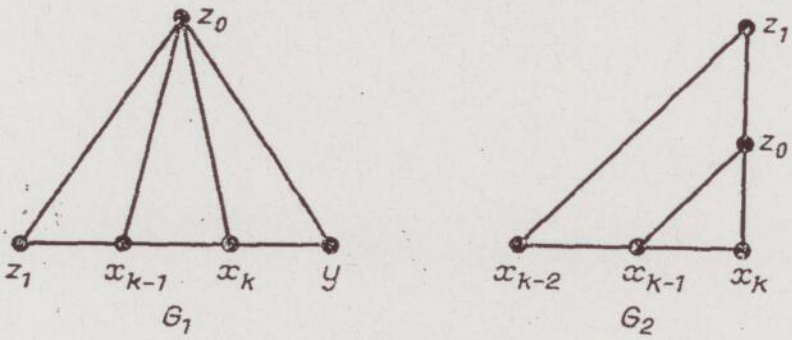

Рис. 12

с y, смежна и с x_k. И, наоборот, любая вершина отрезка $\langle x_k, z\rangle$, смежная с x_k, смежна и с y. Если $x_k \in \langle x, z_0\rangle$, то $z_0 \in \langle x_k, z\rangle$ и в силу свойства α_2, $d(x, z) \geqslant d(x, x_k) + 1 + r(G) - 2 \geqslant r(G) + 1$. Следовательно, $v \in \langle x, y\rangle$, т. е. вершины x_k и z_0 равноудалены от x. Тогда z_0 смежна с x_{k-1}, так как в противном случае цепь $x, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, z_0$ бесхордовая, но не кратчайшая. Длина цепи $P = x, x_1, \ldots, x_{k-1}, z_0, z_1, \ldots, z_1, z$, образованной объединением цепи $x, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k$ и кратчайшей цепи $z_0, z_1, \ldots, z_1, z$, соединяющей вершины z_0 и z, больше $r(G)$, поэтому она не может быть кратчайшей. Следовательно, в ней должна быть хорда (x_i, z_j), соединяющая некоторую вершину x_i подцепи $x, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k$ с некоторой вершиной z_j подцепи $z_0, z_1, \ldots, z_1, z$. Тогда в образовавшемся цикле $x_i, z_j, \ldots \ldots, z_1, z_0, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_i$ ребро (x_{k-1}, z_0) будет принадлежать некоторому циклу длины не больше четырех. Легко видеть, что это возможно только тогда, когда одна из вершин x_{k-1}, x_{k-2} смежна с z_1. В первом случае G содержит как порожденный подграф граф G_1 на рис. 12, а во втором случае G содержит как порожденный подграф граф G_2 на рис. 12. Оба случая невозможны, так как ни G_1, ни G_2 не являются наследственными по расстоянию, а любой порожденный подграф наследственного по расстоянию графа сам является наследственным по расстоянию графом. Теорема доказана.

§ 6. Заключение

Результаты данной работы показывают, что α_i-метрика представляет собой достаточно простой и удобный инструмент для исследования метрических характеристик и свойств графов. Но остается ряд нерешенных проблем, связанных в основном со свойствами графов, обладающих α_i-метрикой, где $i \geqslant 2$. Сформулируем некоторые из них

1. Дать характеризацию графов с α_i-метрикой для каждого $i \geqslant 2$.

2. Дать характеризацию графов с α_2-метрикой, для которых $d(G) \geqslant 2r(G) - 2$.

3. Верно ли, что для графа с α_i-метрикой $d(C(G)) \leqslant i + 2$?

Хотя рассматриваемые в работе графы могут иметь произвольное число вершин, в § 4 графы предполагаются конечными.

Дело в том, что оценка $d(G) \geqslant 2r(G) - i - 1$ в общем случае неверна. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим граф $G(V, E)$ с множеством вершин $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$, где X и Y — счетные множества, порождающие в G соответственно полный и пустой подграф. Вершины x_i и y_j смежны в G тогда и только тогда, когда $i > j$. Ясно, что G хордовый. Так как в G любая бесхордовая простая цепь имеет длину два, то G птолемеев, и $d(G) = 2$. Вершины x_i и y_i несмежны, поэтому $r(G) = 2$ и $d(G) = 2r(G) - 2$ (т. е. для бесконечных птолемеевых графов неравенство $d(G) \geqslant 2r(G) - i - 1$, вообще говоря, не имеет места). В [4] показано, что если хордовый граф не содержит полных подграфов с бесконечным числом вершин, то $d(G) \geqslant 2r(G) - 2$. В связи с этим возникает следующий вопрос:

4. Верно ли, что если граф с α_i-метрикой не содержит бесконечных полных подграфов, то $d(G) \geqslant 2r(G) - i - 1$?

В заключение отметим, что хотя понятие α_i-метрики введено для графов, его можно рассматривать для произвольных, в том числе и конечных, метрических пространств. Например, евклидовы пространства обладают α_0-метрикой. В случае общих метрических пространств вместо целого числа i можно рассматривать любое неотрицательное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копылов Г. Н., Тимофеев Е. А. О центрах и радиусах графов // Успехи мат. наук.— 1977.— Т. 32, № 6.— С. 226.
2. Солтан В. П., Чепой В. Д. Условия сохранения в графе d-выпуклостью диаметров множеств // Кибернетика.— 1983.— № 6.— С. 14—18.
3. Чепой В. Д. Некоторые свойства d-выпуклости в триангулированных графах // Мат. исслед.— 1986.— Т. 87.— С. 164—177.
4. Чепой В. Д. Центры триангулированных графов // Мат. заметки.— 1988.— Т. 43, № 1.— С. 143—151.
5. Юшманов С. В. О метрических свойствах хордовых и птолемеевых графов // ДАН СССР.— 1988.— Т. 300, № 2.— С. 296—299.
6. Юшманов С. В. О m-выпуклости и центрах хордовых графов // Вестн. МГУ. Мат., мех.— 1988.— № 1.— С. 78—80.
7. Юшманов С. В. Один общий метод получения метрических характеристик графа, связанных с эксцентриситетом // ДАН СССР.— 1989.— Т. 306, № 1.— С. 52—54.
8. Bandelt H.-J., Mulder H. M. Distance-hereditary graphs // J. Combin. Theory.— 1986.— V. B41, № 2.— P. 182—208.
9. Chang G. J., Nemhauser G. J. The k-domination and k-stability problems on sun-free chordal graphs // SIAM J. Algebraic and discrete methods.— 1984.— V. 5, № 3.— P. 332—345.
10. Dirac G. A. On rigid circuit graphs // Abh. Math. Seminar Univ. Humburg.— 1961.— V. 25, № 1—2.— P. 71—76.
11. Farber M., Jamison R. E. On local convexity in graphs // Discrete Math.— 1987.— V. 66, № 2.— P. 231—247.
12. Farber M. Characterization of strongly chordal graphs // Discrete Math.— 1983.— V. 43, № 2—3.— P. 173—189.
13. Fulkerson D. R., Gross O. Incidence matrices and interval graphs // Pacific J. Math.— 1965.— V. 15.— P. 835—855.

14. Golumbic M. C. Trivially perfect graphs // Discrete Math.— 1978.— V. 24, № 1.— P. 105—107.
15. Howorka E. A characterization of distance-hereditary graphs // Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2.— 1977.— V. 28, № 112.— P. 417—420.
16. Howorka E. A characterization of ptolemaic graphs // J. Graph Theory.— 1981.— V. 5, № 3.— P. 321—323.
17. Laskar R., Shier D. On powers and centers of chordal graphs // Discrete Appl. Math.— 1983.— V. 6, № 2.— P. 139—147.
18. Lehel J., Tuza Zs. Neighborhood perfect graphs // Discrete Math.— 1986.— V. 61, № 1.— P. 93—101.
19. Lekkerkerker G. C., Boland J. Representation of finite graph by a set of intervals of real line // Fund. Math.— 1962.— V. 51, № 1.— P. 45—64.
20. Ostrand Ph. A. Graphs with specified radius and diameter // Discrete Math.— 1973.— V. 4, № 1.— P. 71—75.
21. Proskurowski A. Centers of maximal outerplanar graphs // J. Graph Theory.— 1980.— V. 4, № 1.— P. 75—79.
22. Truszczyński M. Centers and centroids of unicyclic graphs // Math. Slov.— 1985.— V. 35, № 3.— P. 223—228.