60 коп.

МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА

В ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

ISSN 0136-1228

49

Содержание

МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА
В ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Сборник трудов

1989 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 49

УДК 519.17

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В.Д. Чепой

Вводится понятие метрического треугольника и рассматриваются некоторые типы треугольников в графах. Характеризуются графы, в которых все треугольники принадлежат одному и тому же типу, исследуются также некоторые метрические свойства этих графов. Данная классификация обусловлена тем, что во многих известных классах графов треугольники обладают этими специальными свойствами. К этим классам относятся медианные графы и их обобщения (см. [1-6] и цитированную там литературу), мостовые графы [7-9], подкласс слаботриангулированных графов [10], включающий триангулированные [11] и двудольные хордовые [12] графы, наследственные по расстоянию и птолемеевы графы [13-15], абсолютные ретракты n-хроматических [16-19] и рефлексивных [20,21] графов (последние называются также графами Хелли) и др.

1. Основные понятия и определения

Пусть $G=(X,U)$ – обыкновенный связный граф с произвольным, не обязательно конечным множеством вершин X. Снабдим G естественной метрикой $d(x,y)$, равной количеству ребер кратчайшей цепи, соединяющей вершины $x, y \in X$. Через $\langle x, y\rangle = \{z \in X : d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)\}$ обозначим метрический отрезок с концами в x и y.

Будем говорить, что вершины $x, y, z \in X$ образуют треугольник $(x y z)$, если

$$\langle x,y\rangle \cap \langle x,z\rangle = \{x\}, \langle x,y\rangle \cap \langle y,z\rangle = \{y\}, \langle z,x\rangle \cap \langle z,y\rangle = \{z\}.$$

Для треугольника $(x y z)$ положим $T(x,y,z) = \langle x,y\rangle \cup \langle y,z\rangle \cup \langle z,x\rangle$. Вершину x назовем а) симплициальной, б) почти симплициальной в множестве $T(x,y,z)$ если: а) любые смежные с x вершины из $T(x,y,z)$ смежны между собой; б) любые смежные с x вершины $x' \in \langle x,y\rangle$, $x'' \in \langle x,z\rangle$ смежны между собой.

Треугольник $(x y z)$ графа G назовем:

I) равносторонним, если $d(x,y) = d(y,z) = d(z,x)$;

2) S -треугольником, если вершины x, y, z симплициальны в $T(x,y,z)$;

3) W -треугольником, если вершины x, y, z почти симплициальны в $T(x,y,z)$.

Скажем, что вершины x, y, z образуют обобщенную медиану тройки $u, v, w \in X$, если $(x y z)$ - треугольник в G и

$$d(u,v) = d(u,x)+d(x,y)+d(y,v),\ d(v,w) = d(v,y)+d(y,z) + d(z,w),\quad d(w,u) = d(w,z)+d(z,x)+d(x,u).$$

Нетрудно показать, что в произвольном связном графе G любая тройка его вершин имеет обобщенную медиану. Если же для любых трех вершин из G эта обобщенная медиана единственна, то граф G назовем обобщенно-медианным.

Обобщенную медиану x, y, z вершин u, v, w назовем:

I) ρ -медианой (псевдомедианой [I,4]), если $(x y z)$ - равносторонний треугольник (число $k = d(x,y)$ называется размером ρ -медианы);

2) S -медианой, если $(x y z)$ - S -треугольник;

3) W -медианой, если $(x y z)$ - W -треугольник.

Если в графе G все обобщенные медианы всех троек вершин имеют один и тот же вид, то G назовем соответственно ρ -модулярным, S -модулярным или W -модулярным графом. Определим также ρ_n -модулярные графы как ρ -модулярные графы, в которых все ρ -медианы имеют размер не больше n. В частности, обобщенно-медианные графы из этих четырех классов графов назовем ρ -, S -, W -, ρ_n -медианными.

Отметим, что при $n = 0$ или I получим известные классы модулярных и псевдомодулярных графов [4,6], а также медианных и псевдомедианных графов [I,2,5]. Триангулированные графы являются ρ_2 -модулярными графами.

Граф G назовем ℓ -модулярным (локально-модулярным), если он удовлетворяет следующим локальным условиям:

А. Для любых вершин $x,y,z \in X$, $d(x,y) = 1$, $d(x,z) = d(y,z)$ существует вершина $v \in \langle x,z\rangle \cap \langle y,z\rangle$, смежная с x и y.

Б. Для любых смежных с u вершин $x, y \in \langle u,z\rangle$ существует вершина $v \in \langle x,z\rangle \cap \langle y,z\rangle$, смежная с x и y.

Если же в каждом из условий А и Б вершина v единственна, то G назовем ℓ -медианным (локально-медианным) графом.

Для удобства все введенные классы графов объединим под общим названием слабомодулярные графы.

Обозначим через $P(u,v,w)$ периметр тройки $u, v, w \in X$, т.е. $P(u,v,w) = d(u,v)+d(v,w)+d(w,u)$. Будем полагать $x \sim y$, когда вершины x и y смежны в G, и $x \not\sim y$ - в противном случае. Пусть также $x \sim A$, если x смежна со всеми вершинами множества $A \subset X$.

2. Характеризация слабомодулярных графов

ТЕОРЕМА I. Для графа G следующие условия эквивалентны:

I) G - ρ - модулярный граф;

2) для любых вершин $x,y,z \in X$, удовлетворяющих условию $\langle x,y\rangle \cap \langle x,z\rangle = \{x\}$, имеем $d(y,z) \geq max\{d(x,y), d(x,z)\}$;

3) любой треугольник из G является равносторонним;

4) любой треугольник из G с одной из сторон не больше трех является равносторонним;

5) граф G удовлетворяет следу-

ющим условиям:

а) для любых вершин $x, y, z \in X$, $d(x,y) \leq 2$, $d(x,z) = d(y,z)$ существует такая вершина $v \in \langle z,y \rangle \cap \langle z,x \rangle$, что $d(x,v) = d(y,v) \leq d(x,y)$;

б) если (xyz) – треугольник и $d(x,y) = d(x,z) = 3$, то $d(y,z) = 3$. В частности, любой ℓ-модулярный граф ρ-модулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации I) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ I), 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидны.

4) $\Longrightarrow$ 5). Достаточно показать, что в графе G выполняется условие "а". Пусть $d(x,y) \leq 2$, $d(x,z) = d(y,z)$. Обозначим через z_0 ближайшую к x и y вершину из пересечения $\langle x,z \rangle \cap \langle y,z \rangle$. Тогда либо $z_0 \in \langle x,y \rangle$, либо вершины x, y, z_0 образуют треугольник. В первом случае $d(x,z_0) = d(y,z_0) = 1 < d(x,y)$, а во втором $d(x,z_0) = d(y,z_0) = d(x,y)$.

5) $\Longrightarrow$ 2). Предположив, что граф G не удовлетворяет условию 2, выберем тройку x, y, z с минимальными периметром $P = P(x,y,z)$ и значением величины $d(y,z)$, для которой $d(y,z) < max\{d(x,y), d(x,z)\}$. Вершины x, y, z образуют треугольник. Пусть $d(x,y) \geq d(x,z)$. Обозначим через y' некоторую смежную с y вершину отрезка $\langle z,y \rangle$. Если $\langle x,z \rangle \cap \langle x,y' \rangle = \{x\}$, то периметр тройки x, z, y' не больше P и $d(z,y') < d(z,y)$, поэтому $d(z,y') > max\{d(x,z), d(x,y')\}$. Поскольку $d(x,y') \geq d(x,y)$ и $d(z,y) > d(z,y')$, то $d(z,y) > max\{d(x,z), d(x,y)\}$. Допустим поэтому, что $\langle x,y' \rangle \cap \langle x,z \rangle \neq \{x\}$. Тогда обобщенная медиана вершин x, y', z имеет вид x_0, y_0, z. Рассмотрим сперва невырожденный случай $x_0 \neq y_0 \neq z$. Периметр треугольника $(x_0 y_0 z)$ меньше P, поэтому, в силу выбора исходной тройки, имеем $d(x_0,y_0) = d(x_0,z) = d(y_0,z)$. Следовательно, $d(z,y) \geq d(x_0,y)$. Периметр тройки x_0, x, y также меньше P и $\langle x_0,x \rangle \cap \langle x,y \rangle = \{x\}$, поэтому $d(x_0,y) \geq max\{d(x_0,x), d(x,y)\}$, т.е. $d(z,y) \geq d(x,y) \geq d(x,z)$.

Рассмотрим теперь случай $x_0 = y_0 = z$, т.е. $z \in \langle y',x \rangle$. Если $y \notin \langle y',x \rangle$, то $d(x,y') = d(x,y)$ и, согласно условию А, существует вершина $x' \in \langle x,y \rangle \cap \langle x,y' \rangle$, $x' \sim y, y'$. Поскольку $P(x,x',z) < P$ и $\langle x,x' \rangle \cap \langle x,z \rangle \subset \langle x,y \rangle \cap \langle x,z \rangle = \{x\}$, то $d(y,z) \geq max\{d(x,z), d(x,y) - 1\}$. С другой стороны, $d(x,y') = d(x,y) = d(x,z) + d(z,y) - 1$. Следовательно, $d(x,z) \leq 2$, и, согласно условию "а", треугольник (xyz) должен быть равносторонним. Допустим теперь, что $y \in \langle y',x \rangle$. Пусть z' – смежная с y' вершина отрезка $\langle y',z \rangle$. Тогда $d(z',x) = d(y,x)$, $d(y,z') = 2$. По условию "а", существует вершина $x' \in \langle x,z' \rangle \cap \langle x,y \rangle$, $d(x',z') = d(x',y) \leq 2$. Так как $P(x,z,x') < P$ и $\langle x,x' \rangle \cap \langle x,z \rangle = \{x\}$, то $d(y,z) \geq d(x',z) \geq max\{d(x,z), d(x,y) - 2\}$. С учетом того, что $z \in \langle x,y' \rangle$, имеем $d(x,z) \leq 3$. Из условия "б" и соотношения $3 \leq d(y,z) \leq d(x,z)$ заключаем, что (xyz) – равносторонний треугольник.

Пусть теперь граф G ℓ-модулярен. Покажем сперва, что в G выполняется условие "а". Ввиду условия А достаточно рассмотреть случай, когда $d(z,y) = 2$, $d(x,z) = d(x,y) = k$. Рассмотрим вершину $v \in \langle z,y \rangle \setminus \{z,y\}$. Если $d(x,v) < k$, то $v \in \langle x,y \rangle \cap \langle x,z \rangle$ и все доказано. Если же $d(x,v) > k$, то $y, z \in \langle x,v \rangle$, и по условию Б существует вершина $v_0 \in \langle x,y \rangle \cap \langle x,z \rangle$, $v_0 \sim y, z$. Поэтому пусть $d(x,v) = k$. По условию А существуют вершины $y_0 \in \langle x,y \rangle \cap \langle x,v \rangle$, $z_0 \in \langle x,z \rangle \cap \langle x,v \rangle$, $y_0 \sim v, y$, $z_0 \sim v, z$. Поскольку $y_0, z_0 \in \langle v,x \rangle$, то существует вершина $x_0 \in \langle x,y_0 \rangle \cap \langle x,z_0 \rangle$, $x_0 \sim y_0, z_0$. Так как $d(x_0,y) = d(x_0,z) = 2$ и $x_0 \in \langle y,x \rangle \cap \langle z,x \rangle$, то x_0 – искомая вершина. Итак, в графе G выполняется условие "а". Используя это, докажем, что G удовлетворяет условию 2 теоремы. Это делается по схеме доказательства импликации 5) $\Longrightarrow$ 2), вплоть до применения условия "б". Пусть вершины x, y, z образуют треугольник, причем $d(x,y) = 4$, $d(x,z) = d(z,y) = 3$, $z, z', y \in \langle y',x \rangle$ (см. доказательство импликации 5) $\Longrightarrow$ 2)). По условию Б существует вершина $x_0 \in \langle x,y \rangle \cap \langle x,z' \rangle$, $x_0 \sim y, z'$. Но тогда $x_0 \in \langle y,z \rangle \cap \langle y,x \rangle$, что противоречит тому, что (xyz) – треугольник графа G. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Граф на рис. I показывает необходимость условия 5 "б" теоремы I.

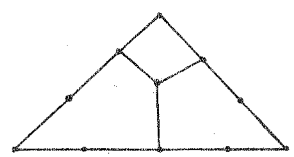

Рис. I

ЛЕММА I. Если в графе G любой треугольник с одной из сторон не больше двух является w-треугольником, то G – ℓ-модулярный, а следовательно, и ρ-модулярный граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d(x,y) = d(x,z)$, $y \sim z$, а v – ближайшая к y и z вершина из пересечения отрезков $\langle x,y \rangle$,

$\langle x, z \rangle$. Вершины y, z, v образуют треугольник с одной единичной стороной. По условию (vyz) – w-треугольник. Тогда y смежна с любой вершиной $z_0 \in \langle z, v \rangle$, смежной с z. Поскольку $z_0 \in \langle v, y \rangle \cap \langle v, z \rangle$, то это возможно только при $v = z_0$. Итак, $d(v, y) = d(v, z) = 1$, т.е. в G выполняется условие А.

Проверим теперь выполнимость условия Б. Пусть $y, z \in \langle u, x \rangle$, $u \sim y, z$, а v – ближайшая к y и z вершина из пересечения $\langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle$. Если $v \nsim z, y$, то по доказанному выше свойству А заключаем, что $d(y, z) = 2$. Следовательно, вершины y, z, v образуют треугольник с одной стороной, равной двум. По предположению (yzv) является w-треугольником. Тогда вершина $u \in \langle y, z \rangle$ смежна с любой вершиной $y_0 \in \langle y, v \rangle$, $y_0 \sim y$, что противоречит тому, что $y \in \langle u, x \rangle$. Итак, G является ℓ-модулярным графом. По теореме I, G ρ-модулярен. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть G – ℓ-модулярный граф. Тогда

1) если (xyz) – треугольник из G со стороной k, то $d(x, v) = k$ для любой вершины $v \in \langle y, z \rangle$;

2) если вершины $x, y, z, u, v \in X$ таковы, что $\langle x, u \rangle \cap \langle y, z \rangle = \{y\}$, $\langle x, v \rangle \cap \langle y, z \rangle = \{z\}$, то $d(u, v) \geq d(y, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство I докажем индукцией по числу $n = d(v, y)$. Пусть вершина $v \in \langle y, z \rangle$ такова, что все вершины отрезка $\langle y, z \rangle$, расположенные к y ближе, чем v, находятся на одинаковом расстоянии k от вершины x. Пусть $v_1 \in \langle v, y \rangle$, $v_1 \sim v$. Если $d(v, x) < k$, то $v \in \langle v_1, x \rangle$. Поскольку (xyz) – треугольник в G, то $v_1 \neq y$ и поэтому существует вершина $v_2 \in \langle v_1, y \rangle$, $v_2 \sim v_1$ (возможно $v_2 = y$). По предположению индукции $d(v_1, x) = d(v_2, x) = k$. По условию А существует вершина $w \in \langle x, v_1 \rangle \cap \langle x, v_2 \rangle$, $w \sim v_1, v_2$. Так как $v, w \in \langle v_1, x \rangle$, то, по условию Б, существует вершина $x_0 \in \langle x, v \rangle \cap \langle x, w \rangle$, $x_0 \sim w, v$. Из соотношения $d(v_2, v) = d(v_2, v_0) = 2$ и условия А следует существование вершины $v_1^0 \sim x_0, v, v_2$. Но тогда $v_1^0 \in \langle v, y \rangle$, $d(x, v_1^0) = k - 1$, что противоречит предположению индукции. Итак, для любой вершины $v \in \langle y, z \rangle$, $d(y, v) = n$ имеем $d(x, v) \geq k$.

Пусть $d(x, v) = k + 1$. Если $\langle v, z \rangle \cap \langle v, x \rangle \neq \{v\}$ и вершина w принадлежит этому пересечению, то $v_1, w \in \langle x, v \rangle$. По условию Б существует вершина $v' \in \langle v_1, x \rangle \cap \langle w, x \rangle$, $v' \sim v_1, w$. Но тогда $v' \in \langle y, z \rangle$, $d(y, v') = n$, однако $d(x, v') < k$. Это противоречит доказанному выше неравенству. Итак, $\langle v, z \rangle \cap \langle v, x \rangle = \{v\}$, т.е. ρ-медиана вершин v, x, z имеет вид v, z, x_0. Вершины v, z, x_0 образуют равносторонний треугольник со стороной $k - n$. Следовательно, $d(x, x_0) = n$, и потому $d(v, x) \leq d(v, x_0) + d(x_0, x) = k$.

2) Пусть вершины $x, y, z, u, v \in X$ таковы, что $\langle x, u \rangle \cap \langle y, z \rangle = \{y\}$, $\langle x, v \rangle \cap \langle y, z \rangle = \{z\}$, $d(y, u) \geq d(z, v)$, однако $d(u, v) < d(y, z)$. Будем считать также, что для любой другой пары вершин u', v', где $u' \in \langle y, u \rangle$, $v' \in \langle z, v \rangle$, выполняется неравенство $d(u', v') \geq d(y, z)$ (для любых таких вершин u', v' пересечение отрезков $\langle u', x \rangle$ и $\langle v', x \rangle$ с $\langle y, z \rangle$ также состоит только из вершин y и z). Псевдомедиана вершин x, y, z имеет вид x_0, y, z. Поскольку $d(y, z) + d(z, v) > d(y, u) + d(u, v) \geq d(y, v)$, то псевдомедиана тройки y, z, v имеет вид y_0, z, v_0, где y_0 и v_0 отличны от z. Так как $d(y_0, v_0) = d(z, v_0)$ и $v_0 \in \langle y_0, v \rangle \cap \langle z, v \rangle$, то $d(v, y_0) = d(v, z)$. Из соотношения $y_0 \in \langle y, z \rangle$ и свойства I ℓ-модулярных графов заключаем, что $d(x_0, y_0) = d(x_0, z)$, т.е. $d(x, y_0) \leq d(x, z)$. Следовательно, $d(x, y_0) + d(y_0, v) \leq d(x, z) + d(z, v)$. Но тогда $y_0 \in \langle x, v \rangle$, что противоречит тому, что $\langle x, v \rangle \cap \langle y, z \rangle = \{z\}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Граф G является ℓ-модулярным тогда и только тогда, когда в любом треугольнике (xyz) из G все вершины отрезка $\langle y, z \rangle$ равноудалены от x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону теорема следует из леммы 2. Для доказательства обратного достаточно установить справедливость условия Б. Пусть $x, y \in \langle u, v \rangle$, $u \sim x, y$; v_0 – ближайшая к x и y вершина из пересечения $\langle x, v \rangle \cap \langle y, v \rangle$. Если v_0 не смежна с x и y, то вершины x, y, v_0 образуют треугольник. По предположению $d(v_0, y) = d(v_0, x) = d(v_0, u)$, что противоречит тому, что $x, y \in \langle u, v \rangle$.

ТЕОРЕМА 3. Для графа G следующие условия эквивалентны:

I) G – w-модулярный (S-модулярный) граф;

2) любой треугольник из G является w-треугольником (S-треугольником);

3) любой треугольник из G является равносторонним w-треугольником (S-треугольником);

4) любой треугольник с одной из сторон не больше двух является равносторонним w-треугольником (S-треугольником);

5) G – ℓ-модулярный граф, в котором любой треугольник со стороной 2 является w-треугольником (S-треугольником).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 1)$\Longleftrightarrow$ 2) очевидна, а импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 5) либо очевидны, либо являются следствиями леммы 1.

5) $\Longrightarrow$ 2). По теореме 1, любой треугольник (xyz) из G является равносторонним. Пусть $d(x,y)=d(y,z)=d(z,x)=k$. Индукцией по k докажем, что (xyz) является w-треугольником. Это так при $k=1,2$. Рассмотрим поэтому случай $k\geqslant 3$. Пусть u,v – смежные с x вершины отрезков $\langle x,y\rangle$ и $\langle x,z\rangle$, а w – вершина отрезка $\langle u,y\rangle$, смежная с y. По лемме 2, $d(z,u)=d(z,w)=d(y,v)=k$. Согласно условию А, существует вершина $y_0\in\langle z,y\rangle\cap\langle z,w\rangle$, $y_0\sim y,w$. Поскольку $y_0\notin\langle y,x\rangle$, то $d(y_0,x)=k$. Если $\langle y_0,x\rangle\cap\langle y_0,z\rangle\neq\{y_0\}$ и y_1 – смежная с y_0 вершина из этого пересечения, то $w,y_1\in\langle y_0,x\rangle$. По условию Б, существует вершина $x_0\in\langle y_1,x\rangle\cap\langle w,x\rangle$, $x_0\sim w,y_1$. Согласно условию А, существует вершина $y'\in\langle y,x_0\rangle\cap\langle y,y_1\rangle$, $y'\sim x_0,y_1$. Но тогда $y'\in\langle z,y\rangle\cap\langle x,y\rangle$, что противоречит выбору вершин x,y,z. Итак, $\langle y_0,x\rangle\cap\langle y_0,z\rangle=\{y_0\}$. Любой треугольник из G является равносторонним, поэтому ρ-медиана вершин x,y_0,z имеет вид x_1,y_0,z, где $x_1\sim x$ и $x_1\in\langle z,x\rangle\cap\langle y_0,x\rangle$. Поскольку $u,x_1\in\langle y_0,x\rangle$, то существует вершина $x_2\in\langle u,y_0\rangle\cap\langle x_1,y_0\rangle$, $x_2\sim u,x_1$. Вершины u и x_2 равноудалены от y, иначе $x_1\in\langle y,x\rangle\cap\langle x,z\rangle$. Существует поэтому вершина $u_0\in\langle x_2,y\rangle\cap\langle u,y\rangle$, $u_0\sim x_2,u$. Применив условие Б к вершинам $x_1 v\in\langle x,z\rangle$, найдем вершину $v_0\in\langle x_1,z\rangle\cap\langle v,z\rangle$, $v_0\sim x_1,v$ (это верно и при $x_1=v$). По предположению индукции треугольник (y_0x_1z) со стороной $k-1$ является w-треугольником. Следовательно, $x_2\sim v_0$. Из соотношения $\langle x,y\rangle\cap\langle x,z\rangle=\{x\}$ заключаем, что вершины x,u_0',v_0 образуют треугольник со стороной 2. По предположению (xu_0v_0) –

w-треугольник. Тогда вершины $u\in\langle x,u_0\rangle$, $v\in\langle x,v_0\rangle$ смежны. Итак, в G любой треугольник является w-треугольником.

Допустим теперь, что в ℓ-модулярном графе любой треугольник со стороной 2 является S-треугольником, и рассмотрим треугольник (xyz). По доказанному выше утверждению (xyz) является w-треугольником. Поэтому достаточно показать, что если вершины $u_1,u_2\in\langle x,y\rangle$ смежны с x, то $u_1\sim u_2$. По условию Б существует вершина $y_0\in\langle u_1,y\rangle\cap\langle u_2,y\rangle$, $y_0\sim u_1,u_2$. По лемме 2, $d(y_0,z)=d(x,z)$, а потому ρ-медиана вершин y_0,z,x имеет вид y_0,z_0,x, где $d(y_0,z_0)=d(z_0,x)=d(x,y_0)=2$. По предположению, треугольник (xy_0z_0) является S-треугольником. Следовательно, вершины $u_1,u_2\in\langle x,y_0\rangle$ смежны между собой. Теорема доказана.

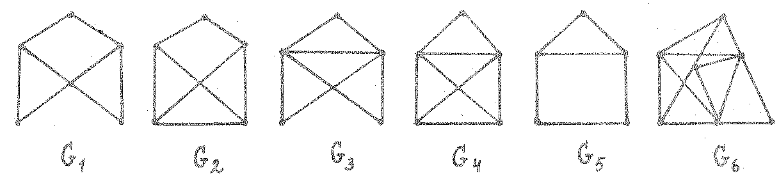

Рис. 2

ТЕОРЕМА 4. 1) Граф G является ρ-медианным тогда и только тогда, когда любые вершины $x,y,z\in X$, $d(x,y)\leqslant 3$, $d(x,z)=d(y,z)$ имеют единственную ρ-медиану.

2) Граф G является ℓ-медианным тогда и только тогда, когда G – ℓ-модулярный граф без подграфов вида G_1-G_4 (рис.2). Любой ℓ-медианный граф является ρ-медианным.

3) Для графа G следующие условия эквивалентны:

а) G – S-медианный граф;

б) G – w-медианный граф;

в) G – w-модулярный граф без подграфов вида G_1-G_4 (рис. 2);

г) G – S-модулярный граф без подграфов вида G_1-G_4.

Эти три результата доказываются так же, как и аналогичные критерии для медианных и псевдомедианных графов [I,5]. Граф $K_3 \times K_3$ (K_n – n-вершинный полный граф) является примером ℓ-медианного, но не S-медианного графа.

Следуя [4,6], граф G назовем наследственно ρ-, ℓ-, w-, S-модулярным, если любой изометрический подграф графа G является ρ-, ℓ-, w-, S-модулярным графом.

ТЕОРЕМА 5. Для графа G следующие условия эквивалентны:

I) G – наследственно w-модулярный граф;

2) G – наследственно ℓ-модулярный граф;

3) G – ℓ-модулярный граф без изометрических циклов C_5 и C_6 и подграфов вида G_5 (домиков) (рис.2).

4) G не содержит G_5 и изометрических циклов C_n, $n \geq 5$.

Граф G является наследственно S-модулярным графом тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию 4 и не содержит подграфов вида G_6 (рис. 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы имеет много общего с доказательством теоремы 5 работы [4] и некоторых результатов [7]. Импликации I) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

3) $\Longrightarrow$ 4). Предположив противное, рассмотрим изометрический цикл $C=(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$ минимальной длины ≥ 5. Очевидно, $n \geq 7$. В зависимости от четности n рассмотрим два случая:

а) $n=2k, k \geq 4$. Тогда $x_2, x_n \in \langle x_1, x_{k+1}\rangle$ и, по условию Б, существует вершина $v_3 \in \langle x_2, x_{k+1}\rangle \cap \langle x_n, x_{k+1}\rangle$, смежная с x_2 и x_{k+1}. Далее, по тому же условию Б, существуют вершины $v_i \in \in \langle x_{i-1}, x_{k+1}\rangle \cap \langle v_{i-1}, x_{k+1}\rangle$, $v_i \sim v_{i-1}, x_{i-1}$, $i=4,\dots,k$. Тогда цикл $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, v_3, v_4, \dots, v_k, x_{k+1})$ длины $2k-2 \geq 6$ должен быть изометричным, поскольку изометричен цикл C. Противоречие с выбором C.

б) $n=2k+1$, где $k \geq 3$. Тогда $d(x, x_k) = d(x, x_{k+3}) = k-1$, $d(x, x_{k+1}) = d(x, x_{k+2}) = k$. По условию А существует вершина $y \in \langle x, x_{k+1}\rangle \cap \langle x, x_{k+2}\rangle$, $y \sim x_{k+1}, x_{k+2}$. По условию Б существуют вершины $y_1 \in \langle x, x_k\rangle \cap \langle x, y\rangle$, $y_2 \in \langle x, x_{k+3}\rangle \cap \langle x, y\rangle$, смежные соответственно с x_k, x и x_{k+3}, y. Поскольку G не содержит домиков, то $y \sim x_k, x_{k+3}$. Однако это противоречит изометричности цикла C.

4) $\Longrightarrow$ I). Докажем сперва, что граф G ℓ-модулярен. Пусть $d(x,z)=d(x,y)=k$, причем либо $d(y,z)=1$, либо $z, y \in \langle x, x'\rangle$, $x' \sim z, y$. Индукцией по k докажем выполнимость для тройки x, y, z соответствующего условия А или Б. Не уменьшая общности, предположим, что $\langle x,z\rangle \cap \langle x,y\rangle = \{x\}$. Пусть $P=(x,u,\dots,y)$ – кратчайшая (x,y)-цепь, $Q=(z,v,\dots,x)$ – кратчайшая (z,x)-цепь.

а) $d(y,z)=1$. Если $k=2$, то получим домик или цикл C_5 без диагоналей. Поэтому $k \geq 3$. Цепи P, Q вместе с ребром (y,z) образуют простой цикл C длины $2k+1 \geq 7$. Поскольку (xyz) – треугольник в G, то $d(u,z)=k$, $k-1 \leq d(u,v) \leq k$. Отметим, что $d(y,v) \leq 2$. Если $d(u,v)=k-1$, то по предположению индукции и условию Б существует вершина $w \in \langle y,u\rangle \cap \langle v,u\rangle$, $w \sim y, v$. Но тогда $d(x,w)=d(x,v)=k-1$, $d(v,w)=1$, $\langle x,w\rangle \subset \langle x,y\rangle$, $\langle x,v\rangle \subset \langle x,z\rangle$, и получаем противоречие с минимальностью числа k. Поэтому $d(u,v)=k$. Если $\langle u,v\rangle \cap \langle u,z\rangle \neq \{u\}$, то по предположению индукции и условию А существует вершина $t \in \langle u,v\rangle \cap \langle u,z\rangle$, $t \sim v, z$. По тем же причинам существует вершина $s \sim t, y$, для которой $d(u,s)=k-2$. Следовательно, $d(x,v)=d(x,s)=k-1$. Ввиду выбора k это возможно только при $d(s,v)=2$, $d(t,x)=k-1$. По предположению индукции существует вершина $x_0 \in \langle s,x\rangle \cap \langle t,x\rangle$, $x_0 \sim s,t$. Но тогда вершины x_0, s, t, y, z образуют домик. Итак, $\langle u,v\rangle \cap \langle u,z\rangle = \{u\}$, $d(u,v)=d(u,z)=k$ и $v \sim z$.

Проведем теперь те же рассуждения и для тройки u, v, z. Переходя от этой тройки к следующей и т.д., получим, что цикл C длины $2k+1 \geq 7$ изометричен в G. Противоречие.

б) $d(y,z)=2$, $y, z \in \langle x', x\rangle$, $x' \sim y, z$. Цепи P, Q и (y, x', z) образуют простой цикл C длины $2k+2 \geq 6$. Очевидно, $d(z,u)=k$. Поскольку $\langle x,y\rangle \cap \langle x,z\rangle = \{x\}$, то $k \leq d(u,x') \leq k+1$.

Допустим сперва, что $d(u,x')=k$. По доказанному выше случаю "а" существует вершина $t \in \langle x', u\rangle \cap \langle z,u\rangle$, $t \sim x', z$. По предположению индукции существует вершина $s \in \langle u,y\rangle \cap \langle u,t\rangle$, $s \sim y, t$. Тогда получим домик, кроме случая $t \sim y$. Поскольку $d(t,x)=$

$= d(z,x) = k$, $d(t,z) = 1$, то существует вершина $v' \in \langle x,t \rangle \cap \langle x,z \rangle$, $v' \sim t, z$. Существует также $x_0 \in \langle x, s \rangle \cap \langle v', s \rangle$, $x_0 \sim v', s$. Если $s \not\sim v'$, получим домик, в противном случае цикл C_5 без диагоналей.

Рассмотрим теперь случай $d(u,z) = k+1$. Если $k = 2$, то $d(u,z) = d(v,y) = d(x,x') = 3$ и в G получим изометрический цикл длины 6. Поэтому $k \geq 3$. Предположим, что $\langle u,v \rangle \cap \langle u,x' \rangle \neq \{u\}$. По предположению индукции существуют вершины $t \in \langle u,v \rangle \cap \langle u,x' \rangle$, $t \sim v, x'$ и $s \in \langle y,u \rangle \cap \langle t,u \rangle$, $s \sim y, t$. Тогда $d(s,x) = d(v,x) = k-1$, $d(t,x) = k$. Следовательно, существует вершина $x_0 \in \langle v,x \rangle \cap \langle s,x \rangle$, $x_0 \sim v, s$. Поскольку $\langle s,x \rangle \subset \langle y,x \rangle, \langle v,x \rangle \subset \langle z,x \rangle$, то $x_0 = x$ и $k = 2$, что невозможно. Поэтому $\langle u,v \rangle \cap \langle u,x' \rangle = \{u\}$, $d(x',u) = d(v,u) = k$, $d(x',v) = 2$, $d(z,u) = k+1$. Применим теперь все эти рассуждения к тройке u, v, x', потом, переходя к следующим тройкам цикла C, получим, что C – изометрический цикл в G.

Итак, граф G ℓ-модулярен. Согласно теореме 3 достаточно показать, что в G любой треугольник (xyz) со стороной два является w-треугольником. Пусть $u \in \langle x,y \rangle$, $v \in \langle x,z \rangle$. По лемме 2, $d(u,z) = d(v,y) = 2$. По условию A существует вершина w, смежная с v, z, y. В цикле (x,u,y,w,v,x) могут существовать только диагонали (u,v), (w,u). Так как G не содержит домиков, то обязательно $u \sim v, w$, т.е. (xyz) – w-треугольник в G.

Пусть теперь G не содержит подграфов вида G и удовлетворяет условию G_4. Тогда граф G является наследственно w-модулярным, причем любой треугольник со стороной 2 из G является S-треугольником. Согласно теореме 3, граф G S-модулярен. Теорема доказана.

3. Классы слабомодулярных графов

Приведем диаграмму соотношений между различными подклассами слабомодулярных графов (рис. 3). Примем следующую нумерацию классов графов (при этом стрелка $i \to j$ означает, что класс j содержится в классе i):

I. слабомодулярные графы, 2. ρ-модулярные, 3. ℓ-модулярные, 4. w-модулярные, 5. S-модулярные, 6. псевдомодулярные, 7. модулярные, 8. обобщенномедианные, 9. ρ-медианные, I0. ℓ-медианные, II. квазимедианные, I2. w-(S)-медианные, I3. псевдомедианные, I4. медианные, I5. наследственно ρ-модулярные, I6. наследственно ℓ-(w)-модулярные, I7. наследственно S-модулярные, I8. наследственно псевдомодулярные, I9. наследственно модулярные, 20. абсолютные ретракты n-хроматических графов, 2I. абсолютные ретракты рефлексивных графов (графы Хелли), 22. абсолютные ретракты двудольных графов, 23. мостовые графы, 24. слаботриангулированные графы без домиков, 25. триангулированные графы, 26. двудольные хордовые графы, 27. наследственные по расстоянию графы.

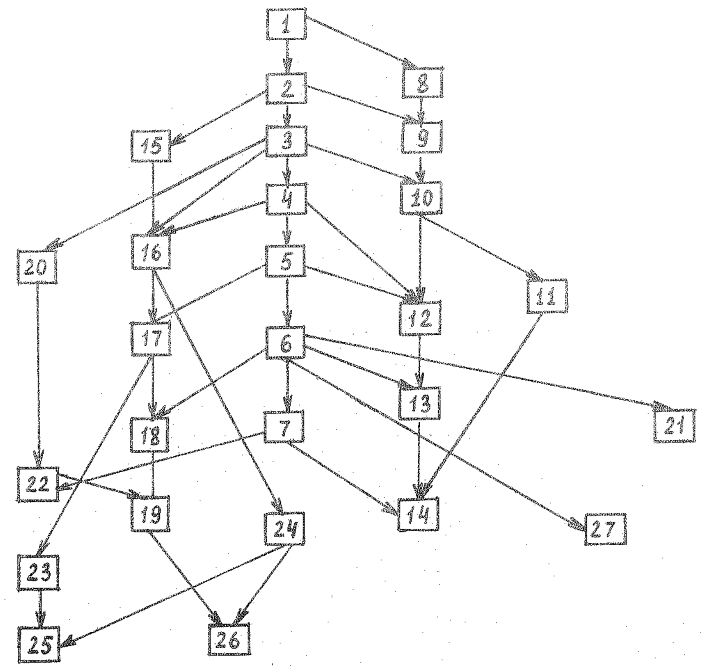

Рис. 3

Некоторые из этих классов можно охарактеризовать в классе ℓ-модулярных графов следующим образом:

модулярные графы – двудольные ℓ-модулярные графы;

псевдомодулярные графы – ℓ -модулярные графы без треугольников со стороной 2;

наследственно модулярные графы – графы, в которых все изометрические циклы имеют длину 4 (см. [6]);

наследственно псевдомодулярные графы – наследственно ℓ -модулярные графы без 3-солнца;

графы Хелли – ℓ -модулярные графы, в которых семейство единичных шаров обладает свойством Хелли;

мостовые графы – ℓ -модулярные графы без индуцированных циклов C_4 и C_5.

4. Метрическая проекция и d -выпуклость в слабомодулярных графах

Для множества $M \subset X$ и вершины x графа G обозначим через $P_x(M)$ метрическую проекцию x на M, т.е. $P_x(M)=\{z\in M: d(x,z)=d(x,M)\overset{def}{=}min\{d(x,v): v\in M\}\}$. Пусть также $N_r(M) = \{z\in X: d(z,M)\le r\}$ – шаровая r -окрестность множества M, где r – некоторое натуральное число.

Множество $M\subset X$ назовем:

I) чебышевским, если $|P_x(M)|=1$ для любого $x\in X$;

2) сильно-чебышевским (*gated set*[2,3,22]), если для любого $x\in X$ существует такая вершина $x_M\in M$, что $d(x,y) = d(x,x_M)+d(x_M,y)$ для любого $y\in M$;

3) слабо-чебышевским, если для любых вершин $x\in X$, $y\in M$ расстояние $d(x,y)$ реализуется через проекцию $P_x(M)$, т.е. $\langle x,y\rangle \cap P_x(M)\neq \emptyset$.

Напомним (см. [23] и цитированную там литературу), что множество $M\subset X$ называется d -выпуклым, если $\langle x,y\rangle\subset M$ для любых $x,y\in M$. Если же $\langle x,y\rangle\subset M$ для любых вершин $x,y\in M$ на расстоянии два, то M назовем локально-выпуклым.

Следуя [5], множество $M\subset X$ назовем $\Delta-(\Delta_i-)$ замкнутым, если для любого треугольника (xyz) (равностороннего треугольника (xyz) со стороной $\le i$) из включения $x,y\in M$ следует, что $z\in M$.

Один результат из [5] обобщает следующая

ЛЕММА 3. М н о ж е с т в о M г р а ф а G я в л я е т с я с и л ь н о - ч е б ы ш е в с к и м т о г д а

и т о л ь к о т о г д а , к о г д а о н о d - в ы п у к л о и Δ - з а м к н у т о .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [3,22], что сильно-чебышевское множество M d -выпукло. Пусть (xyz) – треугольник в G, причем $x,y\in M$. Тогда $z=z_M\in M$, иначе $z_M\in\langle x,z\rangle\cap\langle y,z\rangle$. Обратно, пусть M – d -выпуклое Δ -замкнутое множество, $z\notin M$. Рассмотрим вершину $z_M\in P_z(M)$ и ближайшую к z вершину $y\in M$, для которой $z_M\notin\langle y,z\rangle$. Обобщенная медиана тройки y, z_M, z имеет вид y, z_M, z_0, причем $z_0\neq z_M$. Вершины z_0, z_M, y образуют треугольник, поэтому $z_0\in M$. Это противоречит включению $z_M\in P_z(M)$.

ТЕОРЕМА 6. ρ - м о д у л я р н ы й г р а ф G о б л а д а е т с л е д у ю щ и м и с в о й с т в а м и :

I) л ю б о е d - в ы п у к л о е м н о ж е с т в о я в л я е т с я с л а б о - ч е б ы ш е в с к и м ;

2) м н о ж е с т в о $M\subset X$ я в л я е т с я с и л ь н о - ч е б ы ш е в с к и м т о г д а и т о л ь к о т о г д а , к о г д а о н о d - в ы п у к л о и Δ_2 - з а м к н у т о .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Пусть $x\in X$, $y\in M$, а z – ближайшая к y вершина из $P_x(M)$. Тогда $\langle x,z\rangle\cap\langle y,z\rangle=\{z\}$, т.е. ρ -медиана вершин x,y,z имеет вид x_0,y_0,z. Будем считать $y_0\neq z$, $x_0\neq z$, иначе $z\in\langle x,y\rangle\cap P_x(M)$, и все доказано. Итак, $d(x_0,y_0)=d(x_0,z)=d(y_0,z)$. Но в таком случае $d(x,y_0)=d(x,z)$, $d(y,x_0)<d(y,z)$, $y_0\in\langle y,z\rangle\subset M$, что противоречит выбору вершины z.

2) Согласно лемме 3, достаточно показать, что d -выпуклое Δ_2 -замкнутое множество M Δ -замкнуто, т.е. треугольник (xyz) со стороной k содержится в M, как только $x,y\in M$. Это докажем индукцией по числу k. Случаи $k=1,2$ соответствуют Δ_2-замкнутости множества M. Пусть теперь $k\geq 3$, $x,y\in M$, $z\notin M$, x' – смежная с x вершина отрезка $\langle x,y\rangle$. ρ -медиана вершин x',y,z имеет вид x_0',y,z_0, где (x_0',y,z_0) – треугольник со стороной $k_0<k$. По предположению индукции $z_0\in M$. Так как $k>2$, то $z_0\neq y$. Далее, ρ -медиана тройки x,z_0,z представляет собой треугольник $(x_0 z_0' z)$ со стороной меньше k. Поскольку $x,z_0\in M$ и M d -выпукло, то $z_0', x_0\in\langle x,z_0\rangle\subset M$. По предположению индукции $z\in M$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все графы, в которых отрезки являются слабочебышевскими множествами p -модулярны.

ТЕОРЕМА 7. Пусть множество $M \subset X$ ℓ-модулярного графа G порождает связный подграф.

а) Следующие условия эквивалентны: I) M – d-выпукло; 2) M – локально-выпукло; 3) множество $P_x(M)$ d-выпукло для любой вершины $x \in X$.

б) Следующие условия эквивалентны: I) M – сильно-чебышевское множество; 2) M – чебышевское множество; 3) любая вершина $z \notin M$ смежна не более чем с одной вершиной из M; 4) M d-выпуклое Δ_1-замкнутое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Импликации I) $\Longrightarrow$ 2), 3) $\Longrightarrow$ 2) очевидны, а I) $\Longrightarrow$ 3) легко получить из леммы 2. Действительно, если $z,y \in P_x(M)$ и M d-выпукло, то $\langle x,y\rangle \cap \langle y,z\rangle = \{y\}$, $\langle x,z\rangle \cap \langle z,y\rangle = \{z\}$. Следовательно, p -медиана вершин x,y,z имеет вид x_0, y, z. По лемме 2, $d(x_0,v) = d(x_0,y)$ для любой вершины $v \in \langle y,z\rangle$. Тогда $d(x,v) \leq d(x,x_0) + d(x_0,v) = d(x,y)$, т.е. $v \in P_x(M)$.

2) $\Longrightarrow$ I). Для вершин $x,y \in M$ через $\ell(x,y)$ обозначим длину кратчайшей (x,y)-цепи L из M. Очевидно, $\ell(x,y) \geq d(x,y)$. Включение $\langle x,y\rangle \subset M$ докажем индукцией по числу $\ell(x,y)$. Если $\ell(x,y) \leq 2$, то $\langle x,y\rangle \subset M$ по определению локально-выпуклого множества. Предположив, что $\langle a,b\rangle \subset M$ для любых вершин $a,b \in M$, $\ell(a,b) < n$, рассмотрим произвольные вершины $x,y \in M$, $\ell(x,y) = n$ и вершину $v \in \langle x,y\rangle$. Пусть $z \in L$, $z \sim x$, $w \in \langle x,v\rangle$, $w \sim x$. По предположению индукции, $\langle z,y\rangle \subset M$. Если $d(z,y) > d(x,y)$, то $v \in \langle x,y\rangle \subset \langle z,y\rangle \subset M$. Поэтому пусть $d(z,y) \leq d(x,y)$.

Если $d(z,y) = d(x,y) - 1$, то вершины w, z равноудалены от y. По условию Б, существует вершина $u \in \langle w,y\rangle \cap \langle z,y\rangle$, $u \sim w, z$. Так как $u \in \langle z,y\rangle \subset M$ и M локально-выпукло, то $w \in \langle x,u\rangle \subset M$. Поскольку $\ell(w,y) < n$, то, по предположению индукции, $v \in \langle w,y\rangle \subset M$

Допустим теперь, что $d(z,y) = d(x,y)$. В этом случае цепь L имеет длину $d(x,y)+1$. По условию А существует вершина $u \in \langle z,y\rangle \cap \langle x,y\rangle$, $u \sim z, x$. Тогда $u \in \langle z,y\rangle \subset M$ и цепь L', составленная из ребра (x,u) и некоторой кратчайшей (u,y)-цепи, содержится в M и имеет длину $d(x,y)$. Это противоречит выбору L.

б) Импликации I) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны. Легко заметить, что каждое связное чебышевское множество M локально-выпукло и Δ_1-замкнуто. По доказанному выше утверждению M d-выпукло, поэтому 3) $\Longrightarrow$ 4).

4) $\Longrightarrow$ I) С учетом теорем I и 6 достаточно показать, что d-выпуклое Δ_1-замкнутое множество M Δ_2-замкнуто. Пусть $(x y z)$ – треугольник со стороной 2, $x,y \in M$, $v \in \langle x,y\rangle \setminus \{x,y\}$. По лемме 2, $d(z,v) = 2$. Существуют поэтому вершины z_1, z_2, $z_1 \neq z_2$, смежные соответственно с z,v,x и z,v,y. Множество M Δ_1-замкнуто, поэтому $z_1, z_2 \in M$. Если $z_1 \not\sim z_2$, то $z \in \langle z_1, z_2\rangle \subset M$. Если же $z_1 \sim z_2$, то $z \in M$ как вершина треугольника $(z_1 z_2 z)$ с единичной стороной. Теорема доказана.

Теоремы 5 и 7 позволяют дать простое доказательство критерия мостовых графов (т.е. графов, в которых все изометрические циклы имеют длину 3), полученного в [7,8].

ТЕОРЕМА 8 [7,8]. Граф G является мостовым тогда и только тогда, когда шаровая r-окрестность $N_r(M)$ любого d-выпуклого множества M d-выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что в мостовых графах r-окрестности d-выпуклых множеств d-выпуклы. Поскольку $N_{r+s}(M) = N_r(N_s(M))$, то достаточно рассмотреть 1-окрестность $N_1(M)$ d-выпуклого множества M. По теореме 5, G – ℓ-модулярный и w-модулярный граф. Поэтому, согласно теореме 7, необходимо лишь доказать, что множество $N_1(M)$ локально-выпукло. Предположив обратное, видим, что существуют вершины $x,y \in N_1(M)$, $d(x,y) = 2$, $z \in \langle x,y\rangle \setminus N_1(M)$. Тогда $x,y \notin M$, т.е. существуют вершины $x',y' \in M$, $x \sim x'$, $y \sim y'$. Если $x' = y'$ или $x' \sim y'$, то обязательно получим цикл C_4 или C_5 без диагоналей. Итак, $d(z,x') = d(z,y') = 2 \leq d(x',y')$. Поскольку $z \notin N_1(M)$ и множество M d-выпукло, то вершины z, x', y' образуют треугольник. По теореме 5, $(z\,y'x')$ является w-треугольником. Следовательно, вершины $x\in\langle z,x'\rangle$, $y\in\langle z,y'\rangle$ смежны между собой, что противоречит тому, что $z\in\langle x,y\rangle$. Теорема доказана.

Литература

1. MULDER H.M. The interval function of a graph // Math. Centre Tracts - 1980. - N 132. - 190 p.

2. ISBELL J. Median algebra // Trans.Amer.Math.Soc. - 1980. - Vol. 260, N 2. - P. 319-362.

3. HEDLIKOVA J. Ternary spaces, media and Chebyshev sets // Czechoslovak Math.J. - 1983. - Vol. 108, N 3. - P.373-389.

4. BANDELT H.-J., MULDER H.M. Pseudo-modular graphs // Discrete Math. - 1986. - Vol. 62, N 2. - P. 245-260.

5. BANDELT H.-J., MULDER H.M. Pseudo-median graphs: decomposition via amalgamation and Cartezian multiplication // Preprint Vrije Univ. Amsterdam. - 1986. - N 1. - 40 p.

6. BANDELT H.-J. Hereditary modular graphs // Combinatorica. 1988. - Vol. 8. N 2. - P. 149-157.

7. СОЛТАН В.П., ЧЕПОЙ В.Д. Условия сохранения в графе d-выпуклостью диаметров множеств // Кибернетика. - 1983. - № 6. - С. 14-18.

8. FARBER M., JAMISON R.E. On local convexity in graph // Discrete Math. - 1987. - Vol. 66, N 2. - P. 231-247.

9. ANSTEE R.P., FARBER M. On bridged graphs and cop-win graphs // J.Combin.Theory. - 1988. - B44, N 1. - P. 22-28.

10. HAYWARD R.B. Weakly triangulated graphs // J.Combin. Theory. - 1985. - B39, N 3. - P. 200-209.

11. DIRAC G.A. On rigid-circuit graphs // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. - 1961. - Bd. 25. - P. 71-76.

12. GOLUMBIC M.C., GOSS C.F. Perfect elimination and chordal bipartite graphs // J.Graph Theory. - 1977. - Vol.2, N 2.- P. 155-163.

13. HOWORKA E. A characterization of ptolemaic graphs // J.Graph Theory. - 1981. - Vol. 5, N 3. - P. 323-331.

14. HOWORKA E. A characterization of distance-hereditary graphs // Quart.Math. Oxford. - 1977. - Vol 28, N 2. - P. 417-420.

15. BANDELT H.-J., MULDER H.M. Distance-hereditary graphs // J.Combin.Theory. - 1986. - B41, N 2. - P. 182-208.

16. HELL P. Absolute retracts in graphs // Lecture Notes in Math., - Springer, Berlin. - 1974. - Vol. 406. - P.291-301.

17. PESCH E., POGUNTKE W. A characterization of absolute retracts of n-chromatic graphs //Discrete Math. - 1985.-Vol.57, N 1. - P. 99-104.

18. BANDELT H.-J., DAHLMANN A., SCHUTTE H. Absolute retracts of bipartite graphs // Discrete Appl.Math. - 1987. - Vol. 16, N 2. - P. 191-215.

19. BANDELT H.-J., PESCH E. Efficient characterization of n-chromatic absolute retracts // Arbeitspapiere. Institut fur Betriebswirtschaftslehre. Darmstadt. - 1988. - 52 s.

20. NOWAKOWSKI R., RIVAL I. The smallest graph variety containing all paths // Discrete Math. - 1983. - Vol.43, N 2.- P. 223-234.

21. QUILLIOT A. On the Helly property working as a compactness criterion on graphs // J.Combin.Theory. - 1985.-A40, N 1. - P. 186-193.

22. DRESS A.W., SCHARLAU R. Gated sets in metric spaces // Aequat.Math. - Vol. 34, N 1. - P. 112-120.

23. СОЛТАН В.П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. - Кишинев: Штиинца, 1984. - 220 с.

Поступила в ред.-изд.отдел
22 апреля 1988 г.