ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОБЩЕЙ АЛГЕБРЕ, ГЕОМЕТРИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

КИШИНЕВ „ШТИИНЦА" 1986

В.Д.Чепой

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНО-ОПРЕДЕЛЕННОЙ ВЫПУКЛОСТИ

Пусть X – некоторое множество и $\mathcal{Y}$ – семейство его подмножеств. $\mathcal{Y}$ называют выпуклостью в X, если $X \in \mathcal{Y}$ и пересечение любого семейства элементов из $\mathcal{Y}$ также принадлежит $\mathcal{Y}$ [1,2]. Элементы семейства $\mathcal{Y}$ называются выпуклыми множествами. Если $\mathcal{Y}$ является выпуклостью в X, то для любого множества $A \subset X$ можно определить его выпуклую оболочку $gA = \cap\{B : A \subset B,\ B \in \mathcal{Y}\}$. Выпуклость $\mathcal{Y}$ называется конечно-определенной, если для любого множества $A \subset X$ имеем $gA = \cup\{gB,\ B \subset A,\ |B| < \infty\}$.

В данной работе рассматриваются условия, при которых конечно-определенная выпуклость $\mathcal{Y}$ обладает некоторыми геометрическими свойствами. Основные понятия и вспомогательные результаты приводятся согласно [3].

Соединением множеств $A, B \subset X$ (обозначение $A * B$) называется множество $\cup\{g(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$. Напомним, что выпуклость $\mathcal{Y}$ называется соединительной, если для любых множеств $A, B \subset X$ имеет место равенство $g(A \cup B) = gA * gB$. Выпуклость $\mathcal{Y}$ называется конусной, если для любой точки $z \in X$ и любого непустого множества $A \subset X$ выполняется соотношение $g(z \cup A) = z * gA$. Из определений следует, что соединительная выпуклость является конусной. Обратное, вообще говоря, неверно [3, с.25]. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Конечно-определенная конусная выпуклость $\mathcal{Y}$ является соединительной.

Докажем сперва следующую лемму.

ЛЕММА 1. Для произвольных выпуклых множеств A, B конусной выпуклости $\mathcal{Y}$ и точки $x \in X$ выполняется соотношение $A * (\{x\} * B) = (A * \{x\}) * B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем включение $A * (\{x\} * B) \subseteq (A * \{x\}) * B$. Если $z \in A * (\{x\} * B)$, то существуют точки $a \in A$, $b \in B$, $v \in g(x,b)$, что $z \in g(a,v)$. Рассмотрим выпуклое множество $A * \{x\}$ и точку b. Существует такая точка $u \in A * \{x\}$, что $z \in g(b,u) \subseteq (A * \{x\}) * B$. Следовательно, $A * (\{x\} * B) \subseteq (A * \{x\}) * B$. Обратное включение доказывается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Поскольку $\mathcal{Y}$ – конечно-определенная выпуклость, то $g(A \cup B) = \cup\{g(A' \cup B') : A' \subset A,\ B' \subset B,\ |A'| < \infty,\ |B'| < \infty\}$. Поэтому, не уменьшая общности, можем считать множества A, B конечными. Положим $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $B = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Выпуклость $\mathcal{Y}$ является конусной. Следовательно, $g(A \cup B) = x_1 * (x_2 * (\ldots * x_n * (y_1 * (\ldots * y_k)\ldots))$. Любое множество вида $z_1 * (z_2 * (\ldots * z_l))\ldots)$, $l \geq 1$, выпукло. Применяя несколько раз лемму 1, получаем $x_1 * (x_2 * (\ldots * x_n * (y_1 * (\ldots * y_k)\ldots) = (x_1 * x_2) * (x_3 * (\ldots * x_n * (y_1 * (\ldots * y_k)\ldots) = \ldots = (\ldots (x_1 * x_2) * x_3)\ldots) * x_n) * (y_1 * (y_2 * (\ldots * y_k)\ldots) = gA * gB$.

Напомним, что выпуклость $\mathcal{Y}$ называется нормальной, если любые два непустых непересекающихся выпуклых множества можно отделить дополнительными полупространствами. Под полупространством будем понимать выпуклое множество с выпуклым дополнением.

Выпуклость $\mathcal{Y}$ является N-арной, если $A \in \mathcal{Y} \Longleftrightarrow (\forall B \subset A : |B| \leq N \Longrightarrow gB \subset A\}$. Выпуклую оболочку конечного числа (m) точек назовем политопом (m-политопом) [4].

Для выпуклых множеств A, B положим $A/B = \{z : g(z \cup B) \cap A \neq \varnothing\}$. Множество A/B назовем полутенью множества A относительно B.

ЛЕММА 2. Для конечно-определенной выпуклости $\mathcal{Y}$ в X следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{Y}$ является нормальной;

2) если $x \in g(A \cup z)$, $y \in g(B \cup z)$ для выпуклых множеств A, B и точки $z \in X$, то $g(A \cup y) \cap g(B \cup x) \neq \varnothing$;

3) полутени A/B, B/A любых выпуклых множеств A, B выпуклы.

Нам понадобится следующий известный результат.

ЛЕММА 3. Для любых непересекающихся выпуклых множеств A, B конечно-определенной выпуклости $\mathcal{Y}$ существуют максимальные по включению выпуклые множества A', B', что $A \subset A'$, $B \subset B'$, $A' \cap B' = \varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2. 1) $\Longrightarrow$ 2). Если бы $g(A \cup y) \cap g(B \cup x) = \varnothing$ для некоторых $y \in g(B \cup z)$, $x \in g(A \cup z)$, то выпуклые множества $g(A \cup y)$, $g(B \cup y)$ нельзя отделить дополнительными полупространствами.

2) $\Longrightarrow$ 1). Не уменьшая общности, можем считать непересекающиеся выпуклые множества A, B максимальными по включению. Существование таких множеств вытекает из леммы 3. Докажем, что $A \cup B = X$. Действительно, если бы $z \in X \setminus (A \cup B)$, то в силу максимальности пары (A, B) существуют точки $y \in g(A \cup z) \cap B$, $x \in g(B \cup z) \cap A$. По предположению, имеем $g(A \cup x) \cap g(B \cup y) \neq \varnothing$. Поскольку $g(A \cup x) = A$, $g(B \cup y) = B$, получаем противоречие.

1) $\Longrightarrow$ 3). Если бы $z \in g(A/B) \setminus (A/B)$, то непересекающиеся выпуклые множества $g(B \cup z)$, A нельзя отделить дополнительными полупространствами.

3) $\Longrightarrow$ 1). Множества A, B будем считать максимальными по включению выпуклыми непересекающимися множествами. Если бы $z \in X \setminus (A \cup B)$, то $g(A \cup z) \cap B \neq \varnothing$, $g(B \cup z) \cap A \neq \varnothing$. Однако это противоречит выпуклости множеств A/B, B/A. Действительно, $z \in (A/B) \cap (B/A)$,

т.е. существуют точки $x\in(A/B)\cap B$, $y\in(B/A)\cap A$. Но поскольку $A=g(A\cup y)$, $B=g(B\cup x)$, вытекает, что $A\cap B\neq\varnothing$. Полученное противоречие доказывает, что A, B являются полупространствами.

ТЕОРЕМА 2. Для конечно-определенной выпуклости $\mathcal{Y}$ в X следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{Y}$ является нормальной выпуклостью;

2) любые два непересекающихся политопа отделимы дополнительными полупространствами;

3) для любых политопов P_1, P_2 полутени $P_1/P_2, P_2/P_1$ выпуклы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации I) $\Longrightarrow$ 2), 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

3) $\Longrightarrow$ I). В силу леммы 2 достаточно доказать выпуклость полутеней A/B, B/A выпуклых множеств A, B. Пусть $z\in g(A/B)$. Поскольку $\mathcal{Y}$ – конечно-определенная выпуклость, то существуют такие точки $z_1,\dots,z_k\in A/B$, что $z\in g(z_1,\dots,z_k)$. Пусть $x_i\in g(z_i\cup B)\cap A$. Существуют конечные подмножества $B_i\subset B$, для которых выполняются соотношения $x_i\in g(z_i\cup B_i)$. Следовательно, $x_i\in g(z_i\cup B_0)$, где $B_0=\bigcup_{i=1}^{k} B_i$. По предположению, $g(B_0\cup z)\cap g(x_1,\dots,x_k)\neq\varnothing$, т.е. $g(B\cup z)\cap A\neq\varnothing$. Теорема доказана.

Выпуклость $\mathcal{Y}$ назовем (m_1,m_2)-нормальной, если для любых натуральных чисел $k_1\leqslant m_1$, $k_2\leqslant m_2$ любые непересекающиеся k_1-политоп и k_2-политоп можно отделить дополнительными полупространствами.

Возникают следующие естественные вопросы. Рассмотрим некоторое семейство выпуклостей $\mathcal{A}$. Пусть m_1, m_2, m – фиксированные для семейства $\mathcal{A}$ натуральные числа, а n – произвольное натуральное число. Следует ли, что

а) если выпуклость $\mathcal{Y}\in\mathcal{A}$ (m_1,m_2)-нормальна, то $\mathcal{Y}$ является нормальной?

б) если выпуклость $\mathcal{Y}\in\mathcal{A}$ (m,n)-нормальна, то $\mathcal{Y}$ является нормальной?

Если в качестве семейства $\mathcal{A}$ рассматривать конечно-определенные выпуклости, то m_1, m_2, m бесконечны. Для N-арных выпуклостей возможна следующая точная оценка.

ТЕОРЕМА 3. Для N-арной выпуклости $\mathcal{Y}$ следующие условия эквивалентны:

I) $\mathcal{Y}$ является нормальной;

2) $\mathcal{Y}$ является (N,N)-нормальной;

3) для любого $(N-1)$-политопа P_0 и N-политопа P полутень P/P_0 выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации I) $\Longrightarrow$ 2), 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

3) $\Longrightarrow$ I). N-арная выпуклость является конечно-определенной, поэтому достаточно доказать, что для любых политопов P_1, P_2 множество P_1/P_2 выпукло. По построению N-арной выпуклой оболочки некоторого множества C имеем: $gC=\bigcup_{i\geqslant 0} H_N^i(C)$, где $H_N(C)=\cup\{g(C'):C'\subset C, |C'|\leqslant N\}$, $H_N^0(C)=C$, $H_N^{i+1}(C)=H_N(H_N^i(C))$, $i=0,1,\dots$ Для доказательства выпуклости множества P_1/P_2 достаточно показать, что $H_N(P_1/P_2)=P_1/P_2$. Пусть $x\in H_N(P_1/P_2)$. Тогда $x\in g(x_1,\dots,x_N)$, где $x_1,\dots,x_N\in P_1/P_2$. Для доказательства соотношения $x\in P_1/P_2$ достаточно показать, что для произвольных точек $y_i\in g(P_2\cup x_i)$, $i=\overline{1,\dots,N}$ имеем $g(P_2\cup x)\cap g(y_1,\dots,y_N)\neq\varnothing$. Это очевидно тогда, когда $y_i\in P_2\cup\{x_i\}$, $i=\overline{1,\dots,N}$. Предположим теперь, что точки $y_i\in g(P_2\cup x_i)$ выбраны таким образом, чтобы $y_i\in H_N^{k_i}(P_2\cup x_i)$, а для всех других наборов точек $y_i'\in H_N^{k_i'}(P_2\cup x_i)$, удовлетворяющих соотношениям $k_i'\leqslant k_i$, $\sum_{i=1}^{N} k_i'<\sum_{i=1}^{N} k_i$, имеем $g(P_2\cup x)\cap g(y_1',\dots,y_N')\neq\varnothing$. Хотя бы одно число k_j больше нуля. Следовательно, существуют такие точки $z_1,\dots,z_N\in H_N^{k_j-1}(P_2\cup x_j)$, что $y_j\in g(z_1,\dots,z_N)$. В силу индуктивного предположения для любой точки z_l существует точка $v_l\in g(P_2\cup x)\cap g(y_1,\dots,z_l,\dots,y_N)$, где z_l находится на месте y_j. Очевидно, $g(v_1,\dots,v_N)\subset g(P_2\cup x)$. Поэтому достаточно показать, что $g(v_1,\dots,v_N)\cap g(y_1,\dots,y_N)\neq\varnothing$. По предположению, для $(N-1)$-политопа $Y=g(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_N)$ и N-политопа $V=g(v_1,\dots,v_N)$ множество V/Y выпукло. Так как $v_i\in g(Y\cup z_i)\cap V$, то точки z_i, $i=\overline{1,\dots,N}$ принадлежат множеству V/Y. В таком случае для точки $y_j\in g(z_1,\dots,z_N)\subset V/Y$ выполняется соотношение $g(y_j\cup Y)\cap V\neq\varnothing$, т.е. $g(v_1,\dots,v_N)\cap g(y_1,\dots,y_N)\neq\varnothing$. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что из $(N-1,n)$-нормальности не вытекает нормальность N-арной выпуклости.

ПРИМЕР I. Пусть $X=\{x_1,\dots,x_{2N-2},a_1,a_2,b\}$, $X_0=\{x_1,\dots,x_{2N-2}\}$, $A=\{a_1,a_2\}$. Положим $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_1\cup\mathcal{Y}_2\cup\{X\}$, где $\mathcal{Y}_1=\{M: M\subset X_0\cup A\}$, $\mathcal{Y}_2=\{M: b\in M, |M\cap X_0|\leqslant N-2\}\cup\{M: b\in M, A\subset M\}$.

Для бинарных (2-арных) выпуклостей теорема 3 уточняется следующим образом.

ТЕОРЕМА 4. Для бинарной выпуклости $\mathcal{Y}$ в X следующие условия эквивалентны:

I) $\mathcal{Y}$ является нормальной;

2) для любых точек $a, b, c\in X$, $x\in g(a,c)$, $y\in g(c,b)$ выполняется соотношение $g(a,y)\cap g(b,x)\neq\varnothing$;

3) для любых точек $a, b, c, d\in X$, $x\in g(a,c)$, $y\in g(b,d)$, $z\in g(a,b)$ имеем $g(z,c,d)\cap g(x,y)\neq\varnothing$;

4) для любых точек $a, b, c \in X$, $x \in g(a,c)$, $y \in g(c,b)$, $z \in g(a,b)$ имеет место соотношение $g(x,y) \cap g(c,z) \neq \varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В цепи импликаций I) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 1) достаточно доказать справедливость импликации 2) $\Longrightarrow$ 3), поскольку остальные либо очевидны, либо являются следствиями теоремы 3.

2) $\Longrightarrow$ 3). Условие 3), очевидно, выполняется, когда $g(x,y) \cap g(c,d) \neq \varnothing$. Если одна из вершин x, y совпадает с a или b соответственно, например, $a = x$, то для любой вершины $z \in g(a,b)$ имеем $g(a,y) \cap g(z,d) \neq \varnothing$. Таким образом, $g(z,c,d) \cap g(a,y) \neq \varnothing$.

Предположим теперь, что $a \neq x$, $b \neq y$. Для любой точки $z \in g(a,b)$ существует вершина $v \in g(a,y) \cap g(z,d)$, поскольку для точек a, b, d выполняется соотношение $g(a,y) \cap g(z,d) \neq \varnothing$. Для точек y, a, c существует точка $w \in g(x,y) \cap g(v,c)$. Но тогда $w \in g(x,y) \cap g(z,c,d)$.

В работе [5] рассматривается следующее понятие отделимости. На множестве X заданы две выпуклости $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$. Пара $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ является нормальной, если для любых множеств $A \in \mathcal{G}_1$, $B \in \mathcal{G}_2$, $A \cap B = \varnothing$ сущеествуют такие множества $A' \in \mathcal{G}_1$, $B' \in \mathcal{G}_2$, что $A' \cup B' = X$, $A' \cap B' = \varnothing$, $A \subset A'$, $B \subset B'$. Предыдущие результаты обобщаются без особых изменений для такого типа отделимости.

ТЕОРЕМА 5. Для N_1-арной и N_2-арной выпуклостей $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ соответственно следующие условия эквивалентны:

I) $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ - нормальная пара;

2) $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ является (N_1, N_2)-нормальной парой;

3) для любого (N_1-1)-политопа (N_1-политопа) $P_1 \in \mathcal{G}_1$ и N_2-политопа ((N_2-1)-политопа) $P_2 \in \mathcal{G}_2$ имеет место соотношение $P_2 / P_1 \in \mathcal{G}_2$ ($P_1 / P_2 \in \mathcal{G}_1$), где $P_2 / P_1 = \{x : g_1(P_1 \cup x) \cap P_2 \neq \varnothing\}$, $P_1 / P_2 = \{x : g_2(P_2 \cup x) \cap P_1 \neq \varnothing\}$.

Поскольку всякая конечно-определенная конусная выпуклость бинарна, из теоремы 5 вытекает

ТЕОРЕМА 6 [5]. Пусть $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ - конечно-определенные конусные выпуклости в X. Если для любых точек $a, b, c \in X$, $x \in g_1(a,c)$, $y \in g_2(b,c)$ выполняется соотношение $g_1(x,b) \cap g_2(y,a) \neq \varnothing$, то $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ является нормальной парой.

Выпуклость $\mathcal{G}$ называется регулярной, если для любого множества $A \in \mathcal{G}$ и точки $x \notin A$ существует полупространство, содержащее A и не содержащее x. Для конечно-определенной выпуклости регулярность эквивалентна требованию, что любое выпуклое множество можно представить в виде пересечения некоторых полупространств. Напомним, что максимальное по включению выпуклое множество S_x, не содержащее данную точку x, называется семипространством, соответствующим точке x.

ТЕОРЕМА 7. Для конечно-определенной выпуклости $\mathcal{G}$ следующие условия эквивалентны:

I) $\mathcal{G}$ - регулярная выпуклость;

2) любое семипространство является полупространством;

3) любой политоп P и точку $x \notin P$ можно отделить дополнительными полупространствами;

4) для любого политопа P и точки x множество x / P выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим семипространство S_x, соответствующее точке x. По предположению, существуют дополнительные полупространства P_1, P_2, $S_x \subset P_1$, $z \in P_2$. Очевидно, $S_x = P_1$

2) $\Longrightarrow$ I). Пусть $A \in \mathcal{G}$, $x \notin A$. Выпуклость $\mathcal{G}$ конечно-определена. Поэтому существует семипространство S_x, содержащее множество A. Поскольку S_x - полупространство, следует, что S_x и $X \setminus S_x$ отделяют множества A и $\{x\}$.

I) $\Longrightarrow$ 3). Импликация очевидна.

3) $\Longrightarrow$ 4). Если $z \in g(x/P) \setminus (x/P)$, то политоп $g(P \cup z)$ и точку x нельзя отделить дополнительными полупространствами.

4) $\Longrightarrow$ 2). Докажем, что семипространство S_x является полупространством. Для этого сперва докажем выпуклость множества x / S_x. Если $z \in g(x / S_x)$, то $z \in g M_0$, $M_0 \subset x / S_x$, $|M_0| < \infty$. Но тогда существует такое конечное подмножество $M \subset S_x$, что $M_0 \subset x / g M$. Множество x / gM выпукло и потому $z \in x / gM \subset x / S_x$, т.е. $x / S_x \in \mathcal{G}$. Очевидно, что $S_x \cap (x / S_x) = \varnothing$. Если бы существовала точка $y \notin S_x \cup (x / S_x)$, то $x \notin g(S_x \cup y)$ в противоречии с тем, что S_x - семипространство, соответствующее точке x. Таким образом, S_x - полупространство.

СЛЕДСТВИЕ I. Конечно-определенная конусная выпуклость $\mathcal{G}$ является регулярной тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, d \in X$, $z \in g(a,c) \cap g(b,d)$, $x \in g(a,b)$ существует такая точка $y \in g(c,d)$, что $z \in g(x,y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для выпуклого множества A и точки x докажем, что полутень x / A выпукла. Выпуклость $\mathcal{G}$ бинарна, поэтому рассмотрим точки $z, y \in x / A$, $v \in g(z,y)$. Для них существуют такие точки $y', z' \in A$, что $x \in g(y, y') \cap g(z, z')$. По предположению, существует точка $w \in g(y', z')$, для которой имеем $x \in g(v, w)$. Выпуклость множества x / A доказана.

Выпуклость $\mathcal{G}$ назовем n-регулярной, если любой m-политоп P, $m \leq n$ и точку $z \notin P$ можно отделить дополнительными полупространствами. Следующий пример показывает, что n-регулярная N-арная выпуклость $\mathcal{G}$, где n - произвольное фиксированное число, не всегда регулярна.

ПРИМЕР 2. Пусть $X_n=\{a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, b, c_0, \dots, c_{n-1}\}$, $A=\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$, $C=\{c_0, \dots, c_{n-1}\}$, где $n \geq 2$ – фиксированные натуральные числа. Положим $g(a_0, a_1)=\{a_0, c_0, a_1\}$, $g(a_i, c_{i-1})=\{a_i, c_i, c_{i-1}\}$, $2 \leq i < n$, $g(a_n, c_{n-1})=\{a_n, b, c_{n-1}\}$, $g(a_n, a_{n+1})=\{a_n, b, a_{n+1}\}$, $g(a_{n+1}, a_0)=\{a_{n+1}, c_0, a_0\}$, в остальных случаях $g(x,y)=\{x,y\}$. В результате, как нетрудно проверить, получим бинарную выпуклость $\mathcal{G}$. Можно показать, что $\mathcal{G}$ является n-регулярной выпуклостью. Но поскольку политоп $P=\{a_1, \dots, a_n, c_0\}$ и точку b нельзя отделить дополнительными полупространствами, то выпуклость $\mathcal{G}$ не регулярна.

В заключение автор выражает благодарность В.П.Солтану за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Levi F.W. On Helly's theorem and the axioms of convexity. – J. Indian Math. Soc., 1951, 15, p.65 – 76.
2. Kay D.C., Womble E.W. Axiomatic convexity theory and relationships between the Caratheodory, Helly and Radon numbers. – Pasif. J.Math., 1971, 38, N 2, p.471 – 485.
3. Солтан В.П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 224 с.
4. Jamison-Waldner R.E. A perspective on abstract convexity: classifying alignments by varieties. – In: Proc. conf. Convexity and related combinatorial geometry. Lect. Notes Pure and Appl.Math., 1982, 76, p.113 – 150.
5. Ellis F.W. A general set separation theorem. – Duke Math. J., 1952, 19, p.417 – 421.