

Approximation discrète de la distance euclidienne pour l'analyse d'images : étude et amélioration des distances du chanfrein

Discrete approximation of the Euclidean distance for image analysis : improvement of chamfer distances

Edouard THIEL ; Annick MONTANVERT

Equipe RFMQ - TIM3 - IMAG
USRB 00690

Université Joseph Fourier

CERMO BP 53X
38041 GRENOBLE CEDEX
FRANCE

tél. (33) 76 51 48 13 fax : (33) 76 51 49 48
email : montanv@imag.imag.fr

Résumé :

Cet article traite des distances discrètes, et de leur utilisation en description de formes et en analyse d'images.

Il s'intéresse aux distances efficaces en termes de calcul et de stockage, à savoir les distances du chanfrein. Les principes inhérents au calcul de l'image de distance induisent des propriétés géométriques sur cette image et sur la structure des boules discrètes construites.

Nous démontrons ces propriétés, qui sont liées aux droites discrètes ; puis nous donnons un procédé de calcul de masques du chanfrein de taille quelconque, assurant une erreur minimale par rapport à la distance euclidienne. La minimisation est réalisée directement dans l'espace discret, par exploitation des suites de Farey.

L'utilisation des images ainsi construites est présentée, au travers des représentations en axe médian et ligne médiane, pour en l'occurrence la séparation d'agrégats, avec indépendance vis-à-vis de l'orientation des objets dans l'image.

Mots clés :

Analyse d'images - Distance discrète - Distance du chanfrein - Représentation de formes - Axe médian - Géométrie discrète.

Abstract :

This paper deals with discrete distances, and their utilization for shape description and image analysis.

We are interested in distances which have an effective computation and storage, which are the chamfer distances. The inherent principles to the distance transform computation induce geometric properties on this image and the structure of the building discrete disks.

We prove these properties, and then we give a process to compute the chamfer distance weights which is size-independent. This allows fast and robust algorithms and a good approximation of the euclidean distance. We minimize the relative error compared to the Euclidean distance working in the discrete space and using the series of Farey.

We present some utilizations of these distance images, which are the medial axis and the medial line representations, used for the separation of aggregations. The process is invariant under rotation and width-independent.

An application has been developed in the field of material studies, where some aggregations are separated into seeds.

Keywords :

Image analysis - Discrete distance - Chamfer distance - Shape description - Medial axis - Discrete Geometry.

I. Introduction

Dans le domaine de l'analyse d'images, la notion de *distance discrète* est utile pour quantifier et décrire les objets présents dans l'image. Les premières métriques à avoir été employées sont les distances d_4 et d_8 , relatives également à la connexité entre points d'une image, qui pour deux points $P(x_p, y_p)$ et $Q(x_q, y_q)$ sont définies par :

$$d_4(P, Q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$$

$$d_8(P, Q) = \max(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|)$$

Les valeurs fournies par ces métriques sont fort différentes, car non isotropes, du résultat associé au calcul de la distance euclidienne d_E définie par :

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

Le calcul de d_E est possible par un parcours exhaustif de l'image, mais il est coûteux en temps de calcul [Danielsson 80] [Yamada 84]. Il soulève le problème d'une structure de données adaptée (pour stocker un résultat $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, on peut conserver le couple (x, y) sur 2×16 bits, ou $(x^2 + y^2)$ sur 32 bits). Enfin ni $(d_E)^2 \in \mathbb{Z}$ ni $\text{int}(\sqrt{x^2 + y^2})$ ne sont des fonctions de distance.

Ces imperfections sont à l'origine des efforts menés pour définir des distances discrètes qui approchent au mieux d_E , tout en permettant un calcul rapide (séquentiel en deux passages) sur l'image [Rosenfeld 66], et un stockage dans une structure de données de taille raisonnable.

Les distances qui semblent le mieux adaptées à ces objectifs sont celles de type chanfrein, introduites par G. Borgefors [Borgefors 84, 86]. Elles consistent à pondérer chaque déplacement élémentaire par un entier dans un voisinage donné. Il y a d'autres moyens d'envisager des distances discrètes [Rosenfeld 68] [Das 88], mais qui ne satisfont pas complètement ces objectifs.

Dans le § II nous revenons sur la définition du chanfrein, et nous montrons des propriétés induites par ces masques sur l'image de distance. Nous étudions dans ce même paragraphe les boules définies par ces métriques entières, ce qui nous permet de caractériser leurs propriétés géométriques et locales.

Ces propriétés donnent lieu à une nouvelle conception des masques de chanfrein, qui est exposée au §III. Cette conception est relative à l'optimisation du masque dans un voisinage donné. Sa comparaison avec les distances du chanfrein proposées par G. Borgefors est détaillée dans le §IV, ainsi que la génération de masques de plus grande taille.

Nous présentons en dernier lieu (§V) ce qu'apportent les chanfreins par rapport à d_4 et d_8 , dans des applications telles que le calcul de l'axe médian, la ligne médiane, la séparation d'agrégats (tissus cellulaires, béton poreux).

II. Masques du chanfrein

II.1. Image des distances au fond

Etant donné une image contenant des objets (ensembles connexes de points à 1, le complémentaire étant à 0), on appelle *image des distances au fond* l'image telle que la valeur attribuée en tout point P est égale à la distance de P au complémentaire.

Leur principe de calcul pour des distances telles que d_4 , d_8 ou du type chanfrein, consiste à pondérer les déplacements dans un voisinage donné. On construit les métriques d_4 et d_8 en fixant les distances entre un point P et les points de son voisinage à respectivement (a) et (b) :

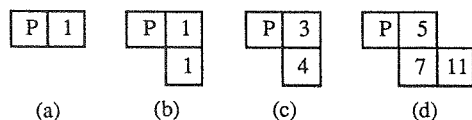


Figure 1 : pondérations locales.

Le chanfrein 3-4 est obtenu à partir de (c), où $4/3$ est une approximation de $\sqrt{2}$. Dans un voisinage un peu plus étendu, on cite le chanfrein 5-7-11 (d), où $7/5 \approx \sqrt{2}$ et $11/5 \approx \sqrt{5}$.

Plus généralement, on se donne la possibilité de travailler sur le maillage carré avec des masques entiers de taille quelconque, symétriques par rapport à O, (O_x) , (O_y) . Le choix des pondérations et de leur emplacement est primordial. Nous définissons au §II.2 des conditions strictes pour que ces masques induisent bien des métriques discrètes. Un choix judicieux permet alors de bonnes approximations de la distance euclidienne, le but recherché étant l'obtention de masques optimaux pour une taille donnée (§III).

Nous rappelons l'algorithme séquentiel qui, en deux passages sur une image (notée Pic), donne l'image des distances au fond [Rosenfeld 66] :

On décompose le masque en deux demi-masques symétriques par rapport à O, chacun servant pour un balayage. Le *demi-masque avant* commence après le milieu P dans le *sens du balayage*. Ses points $M[i]$ ont les coordonnées $(M[i].x, M[i].y)$ et le poids $M[i].p$ (figure 2) :

$$m_{3-4} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow m_{av} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad m_{ar} = \begin{pmatrix} & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Figure 2 : décomposition d'un masque en deux.

Le demi-masque arrière est donc constitué des points $(-M[i].x, -M[i].y)$ de poids $M[i].p$.

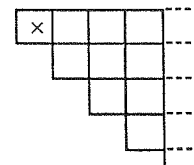
Algorithme :

Parcours avant : de haut en bas et de gauche à droite
 pour y de 1 à y_{max} faire
 pour x de 1 à x_{max} faire
 si $\text{Pic}[x, y] \neq 0$ alors $\text{Pic}[x, y] :=$
 $\text{MIN}_i \{ \text{Pic}[x - M[i].x, y - M[i].y] + M[i].p \}$

Parcours arrière : de bas en haut et de droite à gauche
 pour y de y_{max} à 1 faire
 pour x de x_{max} à 1 faire
 si $\text{Pic}[x, y] \neq 0$ alors $\text{Pic}[x, y] :=$
 $\text{MIN}_i \{ \text{Pic}[x, y], \text{Pic}[x + M[i].x, y + M[i].y] + M[i].p \}$

II.2. Définition du masque de chanfrein

Nous limitant à des masques symétriques par rapport à O, (O_x) , (O_y) , nous appelons *générateur* d'un masque le premier octant de celui-ci :

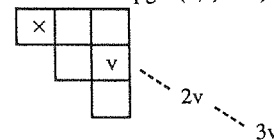


Définition :

- On appelle *point visible* un point de coordonnées (x, y) telles que $\text{pgcd}(x, y) = 1$ (avec la convention $\text{pgcd}(0, a) = a$).

- Le poids affecté à un point du masque est nommé *pondération locale*.

Un point v du masque engendre par translation les valeurs $2v, 3v, \dots$:



Dans cet exemple, $v(2, 1)$ est un point visible, mais pas $2v, 3v, \dots$, suite de points que nous appellerons *périodes*. Un masque ne sera donc constitué que de points visibles, car une pondération locale placée sur la période d'une autre alourdirait inutilement l'extraction des MIN dans l'algorithme de II.1.

On note a, b, c, ... les points visibles du masque, dans l'ordre croissant de leur distance euclidienne par rapport au centre x. Cela ne correspond pas à un parcours lignes/colonnes du masque, comme on le constate pour l et k sur la figure 3 :

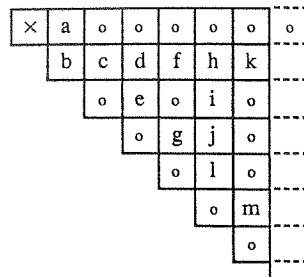


Figure 3 : Points visibles.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la structure générale d'un masque de chanfrein :

Définition : Le générateur d'un masque de chanfrein est tel que

- (1) il possède au moins les points a et b ;
- (2) il ne comporte que des points visibles ;
- (3) ses pondérations locales vérifient les inégalités :

$$\begin{array}{ll} a < b < 2a & c+a < e < c+b \\ 2a < c < a+b & 4a < f < d+a \\ 3a < d < c+a & \dots \end{array}$$

Remarques :

- Cette définition exclut volontairement d_4 et d_8 :
 - le générateur du masque de d_4 ne possède qu'un seul point, ce qui ne remplit pas (1) ;
 - pour d_8 on a $a = b = 1$ ce qui est contraire à (3).

- Les encadrements fixés en (3) font respecter les inégalités triangulaires, le théorème de la projection entre les points du masque et la séparabilité; on suppose ces conditions suffisantes pour qu'il en soit de même dans tout le plan, de telle sorte qu'un masque de chanfrein induise bien une métrique discrète. Pour établir des conditions nécessaires et suffisantes ainsi qu'une démonstration rigoureuse, il faudrait rechercher la formule analytique générale des distances du chanfrein ; nous apportons quelques éléments de réponse au § II.3.

On note "chanfrein a-b-c-..." un tel masque, en remplaçant a,b,c,.. par leur valeur, ou par "o" si le point correspondant n'est pas affecté. En effet, on est libre de ne pas pondérer certains points visibles parmi c,d,e,..., tout en conservant la validité de la définition du chanfrein. Ces choix éventuels vont conférer certaines propriétés à la distance discrète ainsi obtenue, propriétés que l'on étudie dans la suite. Nous allons aussi montrer que ces distances sont des combinaisons linéaires de d_4 et d_8 , et que ces combinaisons dépendent du cône d'influence où l'on se trouve.

II.3. Cône d'influence dans une boule

On peut obtenir une boule de rayon R pour un masque donné en appliquant l'algorithme donné en II.1 de calcul des distances au fond, sur une image de taille infinie où chaque point est à 1, sauf le centre qui est à 0 ; la boule est alors l'ensemble des points de valeur inférieure ou égale à $R*a+r$, où r appartient à $[0,a-1]$. Pour un rayon R fixé il y a donc une famille de a boules, en faisant varier r (figure 4).

L'allure générale de ces boules (cf. annexe 1) est un parallélogramme pour d_4 , un carré pour d_8 , et pour les chanfreins, un octogone pour chanfrein 3-4, un hexadécagone pour chanfrein 5-7-11, etc. A mesure que l'on enrichit le masque, le nombre de côtés de ces polygones augmente. Nous allons étudier d'où provient ce phénomène.

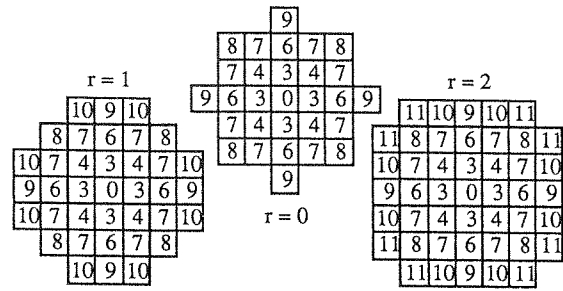


Figure 4 : boules de chanfrein 3-4 avec R = 3.

On étudie l'algorithme II.1 de calcul des distances, qui donne à un point le *minimum* des valeurs affectées aux points alentour augmentées des pondérations locales. Dans l'exemple ci-dessous nous avons noté dans le haut de chaque case la ou les provenances possibles parmi 5, 7 et 11 de ces minimums, avec chanfrein 5-7-11 (figure 5) :

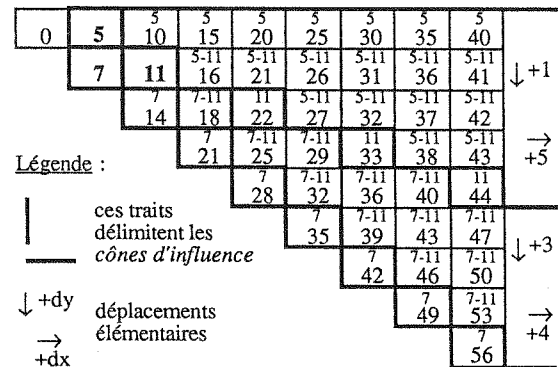


Figure 5 : Cônes d'influence de chanfrein 5-7-11.

Dans le cas général :

On renomme M_1, M_2, \dots les n points affectés du générateur d'un masque de chanfrein, en les ordonnant suivant l'ordre croissant de leur angle avec la demi-droite (Ox). On note $|M_i|$ le poids et $\|M_i\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Sachant que pour deux points du premier octant $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$ on a :

$$\angle(Ox, OP) < \angle(Ox, OQ) \Leftrightarrow y_1 \cdot x_2 < y_2 \cdot x_1$$

on obtient pour chanfrein 3-4 : $|M_1| = 3, |M_2| = 4$, noté 3/4.

De même, d'après leur position donnée en II.2 :

$$5-7-11 \rightarrow 5/11/7$$

$$12-17-o-38-43 \rightarrow 12/38/o/43/17$$

$$a-b-c-d-e-f-g-h-i-j-k-l-m \rightarrow a/k/h/f/d/i/c/j/e/g/l/m/b$$

Définition : On appelle *cône d'influence* des points M_i/M_{i+1} le cône délimité par les droites séparatrices (de pixels) (O, M_i) et (O, M_{i+1}) .

Dans l'exemple précédent (chanfrein 5-7-11), les cônes 5/11 et 11/7 sont délimités par des traits gras. Nous allons maintenant présenter des propriétés essentielles des cônes :

Théorème 1 :

Dans un cône d'influence M_i/M_{i+1} , les seuls points du masque à intervenir dans la recherche du minimum pour le calcul des distances à O, sont les distances locales $|M_i|$ et $|M_{i+1}|$:

- $|M_i|$ engendre par translation les valeurs $2|M_i|, 3|M_i|$, etc ;
- de même pour $|M_{i+1}|$;

- tous les points strictement compris entre les droites séparatrices (O, M_i) et (O, M_{i+1}) , et qui sont au-delà du parallélogramme $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$, sont obtenus par M_i ou par M_{i+1} , et ceci de façon équivalente.

Preuve :

- Les déplacements locaux $|M_i|$ du masque engendrent chacun leur période, car dans la condition (3) de la définition du chanfrein, on impose que la valeur d'une période soit inférieure à toutes les autres combinaisons données par le masque, et le calcul des distances prend justement leur minimum.

- Pour montrer le théorème 1 à l'intérieur d'un cône d'influence M_i/M_{i+1} , on commence par considérer le parallélogramme discret $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$, éventuellement d'intérieur vide, comme illustré à la figure 6 :

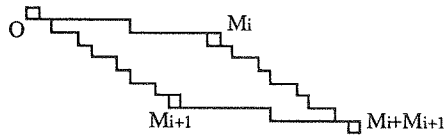


Figure 6 : le parallélogramme discret $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$.

Les points intérieurs à ce parallélogramme, s'il y en a, sont déterminés par certains points du masque, mais sans être atteints par M_i ou M_{i+1} ; dans tous les cas, le point M_i+M_{i+1} a bien la valeur $|M_i+M_{i+1}|$ comme minimum.

A partir de là, on translate le parallélogramme et les valeurs de son adhérence dans tout le cône M_i/M_{i+1} : pour calculer le poids en un point P, il suffit de chercher à quel point X du premier parallélogramme il correspond, et de lui ajouter le nombre de déplacements M_i et M_{i+1} nécessaires pour l'atteindre ; donc ce sont bien les distances locales $|M_i|$ et $|M_{i+1}|$ qui interviennent dans le cône.

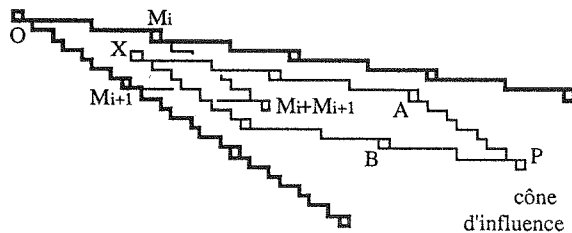


Figure 7 : P provient de A comme de B.

En notant $A = P - M_{i+1}$ et $B = P - M_i$ (figure 7), on a bien A et B sur le grand parallélogramme qui mène à X ; A et B sont deux points du cône d'influence, et la valeur P est donc bien obtenue de façon équivalente, par M_i et M_{i+1} dans la recherche du minimum local, depuis A comme depuis B (à rapprocher de [Montanari 68]).

Définition :

Les points M_i et M_{i+1} sont dits *consécutifs* s'il n'existe pas de point visible P du premier octant tel que :

$$\begin{aligned} |P| &< \max(|M_i|, |M_{i+1}|) \\ \angle(Ox, OM_i) &< \angle(Ox, OP) < \angle(Ox, OM_{i+1}) \end{aligned}$$

Si tous les points affectés sont consécutifs, alors le masque est dit *régulier*.

Exemple :

- Dans chanfrein 5-7-11, tous les points sont consécutifs ; ce masque est *régulier*.

- Dans chanfrein 12-17-0-38-43, l'ordre croissant par angles est 12/38/0/43/17 ; les points 12/38 et 43/17 sont consécutifs mais pas 38/43, car le point c n'a pas été affecté.

Nous allons donner maintenant la loi générale de calcul des règles locales de déplacement, dans un cône d'influence M_i/M_{i+1} , avec les notations de la figure 8 :

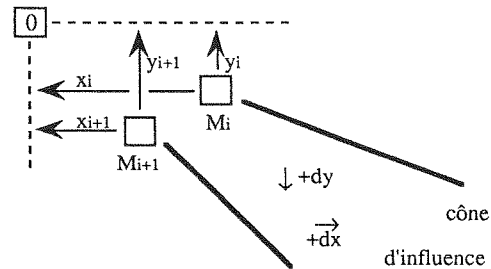


Figure 8 : Notations du théorème 2.

Théorème 2 :

Si les points M_i/M_{i+1} sont *consécutifs*, alors
(a) les déplacements élémentaires dx et dy sont constants dans tout l'intérieur du cône d'influence.

(b) leurs pondérations sont données par :

$$\begin{aligned} dx &:= y_{i+1} \cdot |M_i| - y_i \cdot |M_{i+1}| \\ dy &:= x_i \cdot |M_{i+1}| - x_{i+1} \cdot |M_i| \end{aligned}$$

Reprenons l'exemple avec le chanfrein 5-7-11 :

- cône 5/11 $\begin{cases} dx := 1 \cdot 5 - 0 \cdot 11 = 5 \\ dy := 1 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 1 \end{cases}$
- cône 11/7 $\begin{cases} dx := 1 \cdot 11 - 1 \cdot 7 = 4 \\ dy := 2 \cdot 7 - 1 \cdot 11 = 3 \end{cases}$

Démonstration du théorème :

- Pour montrer (a) nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1 : Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) Les points visibles M_i/M_{i+1} sont consécutifs.
- (2) Le parallélogramme discret $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$ est d'intérieur vide.

Preuve du lemme 1 :

On a le système logique suivant :
le parallélogramme discret $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$ n'est pas d'intérieur vide

$$\Leftrightarrow \text{le triangle } (O, M_i, M_{i+1}) \text{ n'est pas d'intérieur vide}$$

$$\Leftrightarrow \exists P \in (O, M_i, M_{i+1})^\circ$$

$$\Leftrightarrow \exists P \text{ tel que } |P| < \max(|M_i|, |M_{i+1}|)$$

$$\text{et } \angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OP) < \angle(Ox, OM_{i+1})$$

$$\Leftrightarrow M_i/M_{i+1} \text{ sont non consécutifs.}$$

Retour à la démonstration de (a) :

D'après le théorème 1, toutes les valeurs P à l'intérieur du cône M_i/M_{i+1} , privé du parallélogramme $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$ sont égales à des combinaisons linéaires de M_i et M_{i+1} , plus un point X du parallélogramme (cf. figure 7) ; i.e. $P = X + u \cdot M_i + v \cdot M_{i+1}$.

Or ici M_i et M_{i+1} sont consécutifs, d'où d'après le lemme 1, le parallélogramme est d'intérieur vide.

Donc X est égal à un des sommets du parallélogramme, d'où $P = u \cdot M_i + v \cdot M_{i+1}$.

Autrement dit, tous les points de l'intérieur du cône sont atteints par une combinaison linéaire de M_i et M_{i+1} , et donc les différences entre deux points l'un au-dessus de l'autre, ou l'un à côté de l'autre, sont *indépendantes de leur position*, ce qui prouve (a).

Preuve du (b) : nous allons utiliser une propriété arithmétique des M_i :

Lemme 2 : Soit M_n l'ensemble des points visibles consécutifs $M_i(x_i, y_i)$ tels que $x_i \leq n$. Alors les y_i/x_i forment une suite de Farey F_n d'ordre n [H&W, III.3.1] [Montanari 68]

En effet, les suites de Farey F_n sont les séries croissantes de fractions irréductibles entre 0 et 1, dont les dénominateurs n'excèdent pas n .

Donc $(h/k \in F_n) \Leftrightarrow (0 \leq h \leq k \leq n, \text{PGCD}(h,k) = 1)$

Donc M_i, M_{i+1} sont deux points visibles consécutifs (propriété notée (*))

$$\Leftrightarrow \text{PGCD}(x_i, y_i) = \text{PGCD}(x_{i+1}, y_{i+1}) = 1$$

$$\text{et } \angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OM_{i+1})$$

$$\text{or } \angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OM_{i+1}) \Leftrightarrow y_i \cdot x_{i+1} < y_{i+1} \cdot x_i \Leftrightarrow$$

$$y_i/x_i < y_{i+1}/x_{i+1}$$

donc (*) $\Leftrightarrow y_i/x_i$ et y_{i+1}/x_{i+1} sont 2 termes successifs de F_n

D'où le lemme 2.

Construction de F_n : F_1 est $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

Propriété [H&W, th.30] : si $\frac{h}{k} < \frac{h'}{k'}$ alors $\frac{h}{k} < \frac{h+h'}{k+k'} < \frac{h'}{k'}$

et $\frac{h+h'}{k+k'} \in F_n$ si $k+k' \leq n$.

$$\text{donc } F_2 : \frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$$

$$F_3 : \frac{0}{1} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1}$$

$$F_4 : \frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1}$$

$$F_5 : \frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$$

ce qui correspond à $a/k/h/f/d/i/c/j/e/g/l/m/b$

Retour à la démonstration du théorème 2 :

Pour calculer dx et dy , il faut trouver des couples (s, t) et (u, v) tels que :

$$\begin{cases} s \cdot x_i + t \cdot x_{i+1} = 1 \\ u \cdot y_i + v \cdot y_{i+1} = 1 \end{cases}$$

pour des déplacements de 1 dans le sens (Ox) ou (Oy) .

Or d'après le lemme 2, y_i/x_i et y_{i+1}/x_{i+1} sont deux termes successifs d'une suite de Farey, donc d'après le théorème 28 de [H&W], on a toujours $x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1} = 1$.

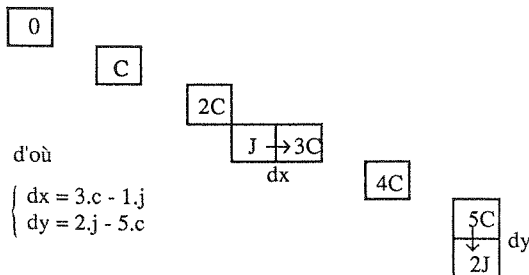
$$\text{d'où } \begin{cases} y_{i+1} \cdot x_i - y_i \cdot x_{i+1} = 1 \\ -x_{i+1} \cdot y_i + x_i \cdot y_{i+1} = 1 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} s = y_{i+1}, t = -y_i \\ u = -x_{i+1}, v = x_i \end{cases}$$

Finalement, il vient

$$\begin{cases} dx = s \cdot |M_i| + t \cdot |M_{i+1}| = y_{i+1} \cdot |M_i| - y_i \cdot |M_{i+1}| \\ dy = u \cdot |M_i| + v \cdot |M_{i+1}| = -x_{i+1} \cdot |M_i| + x_i \cdot |M_{i+1}| \end{cases}$$

Illustration :

Considérons les deux points visibles consécutifs $c(2,1)$ et $j(5,3)$. On a bien $3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1$



Du théorème 2 on déduit immédiatement le corollaire :

Corollaire : Dans le cône d'influence de deux points consécutifs, les intervalles de niveaux $]n-a, n]$ sont des droites *-connexes (i.e. 4-connexe par endroits, ou 8-connexe par endroits).

Ceci explique la caractéristique déjà remarquée à propos des boules de chanfrein : ce sont des polygones 8-symétriques, dont chaque côté est porté par un cône d'influence. Pour un masque de chanfrein dont le générateur a n points, la boule est un polygone à $8 \cdot (n-1)$ côtés.

Avant d'aborder le calcul et l'optimisation d'un masque à n points, nous devons encore étudier le cas où M_i et M_{i+1} ne sont pas consécutifs. Les différents cas de figures que l'on peut imaginer sont bien trop nombreux et particuliers pour être abordés ici ; nous admettrons donc que les dx, dy , qui ne sont plus uniques dans le cône, ont des valeurs périodiques, et que les intervalles de niveaux $]n-a, n]$ sont des droites épaisses, mais cependant proches d'une droite de Bresenham (un exemple sera étudié en §IV.1).

III. Calcul d'un masque de chanfrein

Le principe de calcul des pondérations pour un voisinage donné est de minimiser l'erreur commise par rapport à la distance euclidienne.

III.1. Première approche

Pour des masques de chanfrein à deux points a et b , l'idée la plus intuitive consiste à approximer $\sqrt{2}$ avec b/a , par exemple avec les fractions continues :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

En initialisant par $a := 1$ et $b := 2$ et en bouclant sur $b' := 2a+b, a' := a+b$, on obtient la série :

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{24}{17}, \frac{58}{41}, \frac{140}{99}, \frac{338}{239}, \frac{816}{577}$$

qui converge très vite vers $\sqrt{2}$, mais dont les termes deviennent aussi très grands.

Or en pratique nous travaillons sur des images 512×512 codées sur 16 bits (0..65535). Un objet dans cet image ne pourra avoir une épaisseur supérieure à $512/2 = 256$, et donc la première pondération devra impérativement être inférieure à $65535/256$.

Les valeurs de a que l'on s'autorise seront donc comprises entre 2 et 255.

Remarques :

pour $a = 3$ (avec chanfrein 3-4), un objet de taille maximale dans l'image 512×512 , c'est-à-dire d'épaisseur 256, devra être codé sur des nombres jusqu'à $3 \cdot 256 = 768$, ce qui interdit un codage de l'image sur 8 bits. Il en va de même pour des images 256×256 ($128 \cdot 3 > 2^8$).

Pour en revenir aux fractions continues, on dépasse 255 dès le 8^{ème} terme ($816/577$), et le gain réalisé par $140/99$ est paradoxalement négatif par rapport à $4/3$, comme nous allons le voir par la suite !

Enfin, pour généraliser ce type de méthode à des masques à plus de deux points il faudrait approcher simultanément $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$, etc, ce qui n'est pas possible.

III.2. La solution de G. Borgfors

G. Borgfors propose une approche qui consiste à minimiser le maximum de l'erreur commise sur une droite

verticale (le support de l'image étant rectangulaire) [Borgefors 84]. Dans un premier temps, elle cherche à ce que la distance d_p calculée en un point soit la plus proche possible de la distance euclidienne d_E , en autorisant des résultats en réels.

Par exemple dans un masque $3*3$, on cherchera pour un point $Q(x,y)$ à minimiser l'erreur :

$$E_p(Q) = d_p(Q) - d_E(Q) = y.b + (x-y).a - \sqrt{(x^2+y^2)}$$

Dans ce cas, la recherche de la valeur optimale b pour $a=1$ est donnée par :

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 1,35070.$$

On notera que cette valeur n'est pas $\sqrt{2}$, et que $4/3 \approx 1,3333$ l'approche bien mieux que $140/99 \approx 1,4141$, qui est un autre terme de la suite des fractions continues.

La seconde étape consiste à chercher une approximation fractionnaire de 1,35070, en faisant un compromis entre la précision souhaitée et la taille des nombres a, b .

Si on supprime la contrainte $a=1$, on obtient une minimisation plus fine avec $a \approx 0,95509$ et $b \approx 1,36930$ [Borgefors 86], où $b/a \approx 1,43368$. Mais $4/3$ est encore conseillé car le facteur d'échelle n'est pas trop grand.

Le même raisonnement a été appliqué pour des voisinages $5*5$ et $7*7$, où des pondérations supplémentaires (c,d,e) sont ajoutées. Mais les formules à minimiser rendent très vite la méthode lourde (résolution d'équations), et ne permettent pas en pratique de dépasser un voisinage $7*7$.

III.3. Méthode proposée

Nous proposons ici une autre classe de méthodes qui, tout en nous redonnant les classiques chanfreins 3-4 et 5-7-11 nous permet, comme nous le verrons au §IV, de calculer des masques beaucoup plus larges ; et fournit même, dans le cas $7*7$, un chanfrein plus performant que celui de G. Borgefors (qui est le chanfrein 14-20-31-44).

Les boules de chanfrein étant des polygones, notre idée est d'approximer le cercle euclidien par des polygones les plus réguliers possibles. Cela implique de bien répartir les angles, et de respecter la longueur des rayons.

Comme nous l'avons vu au §II, ce sont les cônes d'influence M_i/M_{i+1} des points du masque qui portent les côtés du polygone, donc le choix des M_i parmi les points visibles intervient directement dans la répartition des angles (cf figure 9).

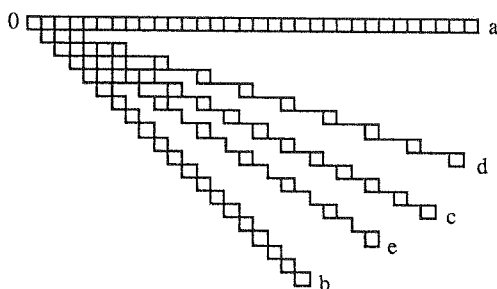


Figure 9 : exemple de la répartition des angles.

On construit un masque de chanfrein dans un voisinage de taille donnée $(2n+1)*(2n+1)$ en deux étapes :

Première étape. On commence par considérer l'ensemble M_n des points visibles dans le premier octant de ce voisinage. Pour une valeur a quelconque, les autres points $M_i(x_i, y_i)$ devront prendre la valeur $|M_i| = [a*\sqrt{(x_i^2+y_i^2)}]$. Il faut donc trouver un a tel que la partie tronquée $|M_i| - a*\sqrt{(x_i^2+y_i^2)} = \text{FRAC}(a*\sqrt{(x_i^2+y_i^2)})$ soit la plus petite possible pour chaque coefficient M_i du masque.

Autrement dit, on doit minimiser le maximum de l'erreur commise entre le poids donné à chaque point, et sa distance euclidienne au centre :

Pour chaque a de 2 à 255, on calcule la valeur E_a , qui est le maximum des erreurs des M_i pour ce a et ce voisinage.

On classe ensuite les E_a par ordre croissant, de telle sorte que les a intéressants soient en tête de liste.

Seconde étape. La seconde étape s'opère par un choix entre les différents masques proposés en tête de la liste, en fonction des critères suivants :

- On veut respecter un certain ordre de grandeur entre a et n . C'est par ce critère que l'on retrouvera 3-4 et 5-7-11.

- Pour des voisinages plus grands (à partir de $7*7$), on s'autorise à supprimer certains points (notés "out"), si leur absence profite à l'allure générale du polygone ; parfois en raison d'une partie fractionnaire de $a*\sqrt{(x_i^2+y_i^2)}$ qui est trop importante, mais le plus souvent parce que l'angle que génère ce point est mal conditionné (un exemple illustre cela en §IV.1).

Exemple dans un voisinage $7*7$, avec $a = 14$:

nom	coord.	d_E	trunc	frac	
a	(1,0)	a	14	0	
b	(1,1)	$a*\sqrt{2}$	20	-0,201	
c	(2,1)	$a*\sqrt{5}$	31	0,305	← E_{14}
d	(3,1)	$a*\sqrt{10}$	44	0,272	
e	(3,2)	$a*\sqrt{13}$	50	0,478	← out

(M_i)

C'est dans l'optique d'une simple minimisation dans \mathbb{R}^2 que G. Borgefors a supprimé le point e, dont l'erreur (0,478) a été jugée trop importante. En effet, elle s'attache avant tout à minimiser des erreurs dans l'espace continu \mathbb{R}^2 , ce qui ne correspond pas forcément à la minimisation des erreurs dans l'espace discret \mathbb{Z}^2 . C'est pour cela que nous nous plaçons directement dans \mathbb{Z}^2 , afin de minimiser les erreurs effectives.

Mais notre approche insiste avant tout sur la répartition des angles. Dans le paragraphe suivant, nous allons voir sur un cas précis que ce critère peut effectivement être prépondérant.

IV Nouveaux chanfreins

IV.1 Optimisation d'un masque $7*7$

La première étape du §III nous donne en tête de la liste $a = 12$, avec $E_{12} = 0,267$:

nom	coord.	d_E	trunc	frac	
a	(1,0)	a	12	0	
b	(1,1)	$a*\sqrt{2}$	17	-0,029	
c	(2,1)	$a*\sqrt{5}$	27	-0,167	
d	(3,1)	$a*\sqrt{10}$	38	-0,053	
e	(3,2)	$a*\sqrt{13}$	43	0,267	← E_{12}

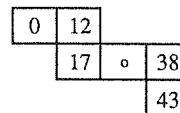
Le masque s'écrit donc :

0	12		
	17	27	
		38	
			43

On calcule ensuite les déplacements élémentaires dans les zones d'influence avec le th. 2 :

- cône 12/38 $\begin{cases} dx := 1*12 - 0*38 = 12 \\ dy := 1*38 - 3*12 = 2 \end{cases}$
- cône 38/27 $\begin{cases} dx := 1*38 - 1*27 = 11 \\ dy := 3*27 - 2*38 = 5 \end{cases}$
- cône 27/43 $\begin{cases} dx := 2*27 - 1*43 = 11 \\ dy := 2*43 - 3*27 = 5 \end{cases}$
- cône 43/17 $\begin{cases} dx := 1*43 - 2*17 = 9 \\ dy := 3*17 - 1*43 = 8 \end{cases}$

C'est en conclusion par ces deux critères, conformes à l'esprit de la méthode du §III, que nous supprimons le point c ; dans un voisinage 7*7, le masque de chanfrein que nous retenons possède 4 points (on notera que ce n'est pas le masque que G. Borgefors a optimisé) :



On a vu en §III que les intervalles de niveaux sont des droites discrètes (d'épaisseur proche de 1) sur chaque cône. Or on remarque que les déplacements locaux dx et dy sont ici les mêmes (dx=11, dy=5) dans 38/27 et 27/43.

Cela fait que les deux côtés du polygone, correspondant à ces deux cônes, seront portés par la même droite ; de ce point de vue, le point c = 27 n'apporte donc rien au polygone.

Sur le plan de la répartition des angles, on voit sur la figure précédente que $\angle(Oa,Od) \approx \angle(Od,Oe) \approx \angle(Oe,Ob)$ tandis que $\angle(Od,Oc) \approx \angle(Oc,Oe)$; ainsi la suppression du point c est encore ici judicieuse.

En annexe 1 figurent les boules définies par ces deux chanfreins ; on remarque immédiatement que $d_{12}...$ a une boule plus régulière que $d_{14}...$, qui semble biseautée à 45°. Mais cette simple appréciation visuelle ne suffit pas. Notre masque étant déjà le meilleur pour notre critère exposé en §III, nous allons opérer une comparaison avec cette fois les critères de G.Borgefors, à savoir comparer les erreurs sur une droite bordant le support image. On commence par observer les deux boules en gros plan sur la figure 10 :

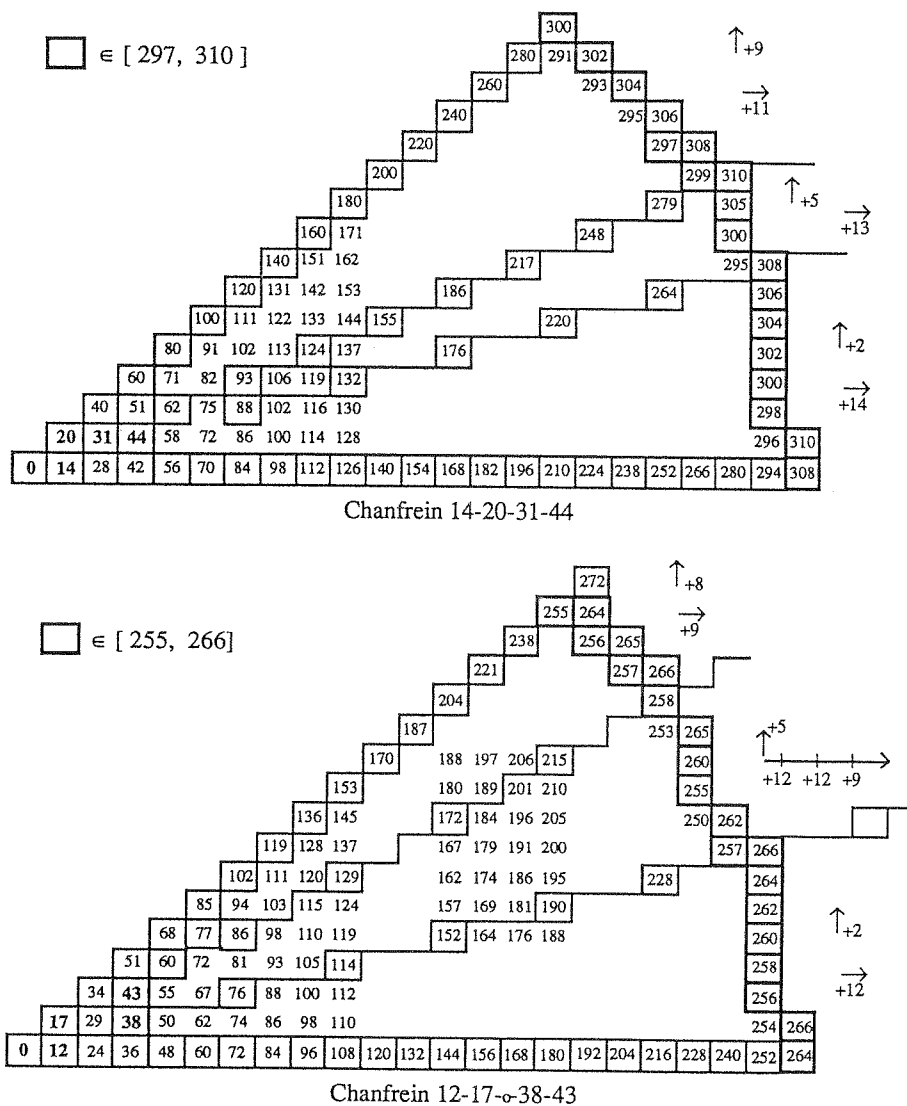


Figure 10 : vue macroscopique des deux boules.

Pour diverses raisons nous avons choisi de tester la droite $x=60$. Cette valeur est d'un ordre de grandeur à la fois réaliste et significatif, car les écarts sont proportionnels, et ainsi l'erreur que l'on va calculer ne change pas. Elle a aussi la propriété utile d'être située sur l'abscisse d'une période de chacun des points affectés des deux masques. Cela nous permet de générer très facilement les valeurs de la distance de chanfrein le long de la droite, connaissant les déplacements élémentaires d_y pour chaque cône.

Dans les tableaux de la figure 12 nous indiquons pour y de 0 à 60 :

- le cône d'influence
- l'ordonnée relative y_r à la période inférieure du cône
- la valeur générée par la métrique de chanfrein, notée d_C
- la distance euclidienne d_E au centre
- le taux d'erreur d_C/d_E

Maximum de l'erreur : $d_{14..}$: 1,52% $d_{12..}$: 1,38%
Ecart total : $d_{14..}$: 2,49% $d_{12..}$: 2,00%

Donc $d_{12..}$ minimise mieux le maximum de l'erreur sur une droite que $d_{14..}$.

On remarque enfin que les extréma sont mieux placés sur $d_{12..}$ que sur $d_{14..}$, le maximum de l'erreur se localisant pour cette dernière au milieu de l'arête du 3^{ème} cône : cela explique l'allure aplatie du polygone de $d_{14..}$ aux directions de 45°.

IV.2. Exemple de construction d'un grand masque

La difficulté pour mettre au point des grands masques tient au fait qu'il est dur de trouver une valeur a , dans la première étape du §III.3, qui minimise simultanément toutes les parties fractionnaires. Or dans le cas d'un masque de taille $11*11$, il se trouve que nous avons de la chance : en effet on obtient en tête de liste le coefficient 'magique' $a = 203$, pour qui les parties fractionnaires sont exceptionnellement faibles :

nom	coord.	d_E	trunc	frac
a	(1,0)	a	203	0
b	(1,1)	$a\sqrt{2}$	287	0,085
c	(2,1)	$a\sqrt{5}$	454	-0,078
d	(3,1)	$a\sqrt{10}$	642	-0,057
e	(3,2)	$a\sqrt{13}$	732	-0,073
f	(4,1)	$a\sqrt{17}$	837	-0,009
g	(4,3)	a.5	1015	0
h	(5,1)	$a\sqrt{26}$	1035	0,101
i	(5,2)	$a\sqrt{29}$	1093	0,188 ← E_{203}
j	(5,3)	$a\sqrt{34}$	1184	-0,317 ← out
l	(5,4)	$a\sqrt{41}$	1300	-0,166 ← out

En supprimant les points $j = 1184$ et $l = 1300$, on se ramène à $E_{203} = 0,188$, à comparer avec $E_{12} = 0,267$ et $E_{14} = 0,305$ (pour 4 points).

Ce masque est le chanfrein 203-287-454-642-732-837-1015-1035-1093, et sa boule est un polygone à $8*(9-1) = 64$ côtés. Le résultat obtenu en annexe 1 pour un rayon de 110 est une boule quasi-euclidienne.

Il est intéressant de tester ce nouveau masque avec le critère de G. Borgfors. Comme les points j et l que l'on a supprimés sont de module et de poids supérieurs à tous ceux que l'on garde, ce chanfrein est régulier. On peut donc calculer très simplement les déplacements élémentaires pour chaque cône d'influence avec le théorème 2. Puis on calcule le

maximum de l'erreur commise sur une droite, de façon analogue à §IV.1. (cf figure 12). Les résultats obtenus sont :

Maximum de l'erreur : 0,48 %
Ecart total : 0,51 %

Ces chiffres montrent l'intérêt d'un masque de cette taille pour la qualité des approximations. Son emploi peut se justifier lorsqu'on a besoin d'une grande précision, par exemple dans le cas d'objets très épais. Le temps de calcul de la transformation de distance (§II.1) étant linéaire par rapport au nombre de points affectés du masque, celui-ci sera donc huit fois plus long avec $d_{203..}$ qu'avec chanfrein 3-4, mais toujours indépendant de la taille des objets dans l'image. D'autre part $a = 203$ étant inférieur à 255, on a vu en §III.1 que le stockage de l'image de distance s'effectue bien sur 16 bits, tandis que d_E en consomme 32. Enfin contrairement à d_E , ce masque induit une distance discrète, ce qui nous laisse envisager des adaptations pour les applications de la partie suivante.

V. Applications : axe médian, ligne médiane et décoalescence

Nous présentons ici des applications développées avec le chanfrein 3-4, et énumérons les étapes à franchir pour la généralisation aux autres chanfreins.

V.1. Axe médian

Une métrique donnée par un masque définit des boules ; l'axe médian (noté AM) est le centre des boules dites *maximales*, i.e. qui ne sont incluses dans aucune autre. AM correspond ainsi à un recouvrement par des boules de la métrique choisie, et l'union de ces boules redonne l'image. La transformation en AM est donc réversible, et ne nécessite qu'un seul parcours de l'image de distances (notée DT) ; la reconstruction nécessite deux parcours [Pfaltz 67].

Un point (x,y) d'une image appartient à AM s'il est *maximum local* au sens de la métrique choisie, i.e. $(x,y) \in AM \Leftrightarrow DT[x,y] > \text{MAX}_i \{ \text{Pic}[x+M[i].x, y+M[i].y] - M[i].p \}$ (*), où $(M[i].x, M[i].y)$ est le $i^{\text{ème}}$ point du masque, de poids $M[i].p$.

Cette caractérisation n'est malheureusement pas immédiatement généralisable pour les chanfreins. En effet, Arcelli [87, 88] a mis en évidence sur l'AM obtenu d'après (*), la présence de *pseudo* AM, points qui tout en étant des maximums locaux, ne sont pas centres de boules maximales. On les observe souvent à la périphérie des objets, et leur nombre croît avec la complexité du masque. Situés sur les deux premiers intervalles de niveaux avec chanfrein 3-4, ils occupent pratiquement tout l'objet pour $d_{203..}$ (voir annexe 1).

Ces points redondants sont certes importants pour retrouver les valeurs exactes de DT par transformation inverse, mais ne contribuent pas à retrouver la forme. Pour les supprimer, Arcelli a élaboré une table de correspondance dans le cas de chanfrein 3-4 ($6 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 1$) qu'on applique à DT pour obtenir DTC ; en appliquant (*) à DTC on n'obtient plus que les vrais AM.

Cette métrique étant un cas particulier des chanfreins (8-voisinage, 2 pondérations d'où un seul cône d'influence), la généralisation aux autres est plus complexe, et fait l'objet de travaux de notre part.

V.2. Ligne médiane

L'axe médian est un sous-ensemble de "squelette pondéré", car il est étiqueté *via* DT, est centré dans la forme, mais il n'est pas connexe. Il faut donc reconnecter AM pour l'analyse et la description d'objets. Cependant, la présence des pseudo-AM gêne cette phase ; c'est pourquoi nous nous sommes actuellement limités au chanfrein 3-4.

Principe de connexion : On reconnecte les vrais points de l'axe médian en ajoutant entre eux certains points, tout en veillant à ce que la ligne médiane (notée LM) soit mince, et possède un fort pouvoir descripteur de l'objet (homotopie, réversibilité).

D'une façon analogue à [Montanvert 86] pour dg, on propage à partir de AM, pour construire LM, par un suivi de crête récurrent des poids faibles vers les poids forts. La méthode, qui est décrite en détail dans [Thiel 91], est légèrement différente dans le sens où les courbes de niveau de dg sont 4-connexes, ce qui facilite l'analyse locale, tandis que les intervalles de niveaux du chanfrein 3-4 sont *-connexes.

Ce qu'il faut retenir : la ligne médiane que l'on obtient est *rigoureusement* caractérisée (ce qui n'est pas le cas pour les squelettes, qui sont le résultat d'algorithmes). Sa formation est aussi rapide que pour dg ; enfin cette LM est quasiment isotrope, ce qui rend l'application du §IV.3 très robuste.

Enfin, il est à noter que cette phase de calcul de LM est aussi valable pour les autres chanfreins, le seul obstacle restant la suppression des points redondants.

V.3. Décoalescence

Le problème que l'on se pose consiste à détecter des rétrécissements dans une forme.

La ligne médiane, étiquetée *via* DT, définit un recouvrement de la forme par des boules centrées de la métrique choisie. Une zone de rétrécissement détectable, c'est-à-dire un col sur DT, se traduit sur LM par un minimum local (qui n'est pas une extrémité). Il suffit donc de parcourir les éléments de même niveau sur LM et de détecter ces *lieux de rétrécissements*.

La supériorité du chanfrein 3-4 sur dg [Montanvert 89] tient au fait que les boules de cette dernière sont des carrés, ce qui peut rendre une zone de rétrécissement indétectable sur DT [Thiel 91].

La séparation de deux agrégats s'effectue enfin en suivant les lignes de plus grande pente de DT depuis les lieux de rétrécissement.

En annexe 2 figurent des exemples, où le contour des objets ainsi que leur LM figurent dans la rangée du haut, et le résultat de la phase de déconnexion dans la rangée du bas.

- La première image montre des couples de disques dans différentes orientations, pour tester la robustesse du procédé vis-à-vis de la rotation.

- Dans la deuxième image sont séparés de gros disques avec des barbulles.

- Dans la dernière, figure un exemple de décoalescence de grains, testé sur un cas réel de béton cellulaire.

VI. Conclusion

L'étude des distances du chanfrein nous a permis de dégager des caractéristiques locales d'une image de distance, tant du point de vue des valeurs attribuées dans un cône d'influence, que de la géométrie des boules (droites de Bresenham *-connexes). Ces propriétés nous ont conduits à élaborer un procédé d'optimisation de masques du chanfrein. Les résultats obtenus garantissent une erreur minimale, ce qui est particulièrement intéressant dans le cas où l'on souhaite accéder à une grande précision dans la mesure de distance. Les utilisations en calcul d'axe médian, de ligne médiane et de séparation d'agrégats sont significatives de l'utilité de telles distances et de leur importance en analyse d'images.

Références

[Arcelli 85] C. Arcelli ; G. Sanniti di Baja.
"A width-independent fast thinning algorithm" ; I.E.E.E. trans. on PAMI vol. 7, n° 4, pp. 463-474, July 1985.

[Arcelli 87] C. Arcelli ; G. Sanniti di Baja.
"Weighted distance transforms : a characterization" ; 4th Int. Conf. on IAPR ; Cefalu (Italy) ; pp. 205-212, Sept 1987.

[Arcelli 88] C. Arcelli ; G. Sanniti di Baja.
"Finding local maxima in a pseudo-euclidean distance transform" ; CVGIP 43, pp. 361-367, 1988.

[Borgefors 84] G. Borgefors.
"Distance transformations in arbitrary dimensions" CVGIP 27, p.321-345, 1984

[Borgefors 86] G. Borgefors.
"Distance transformations in digital images". CVGIP 34, p. 344-371, 1986.

[Danielsson 80] P.E. Danielsson.
"Euclidean distance mapping". CGIP 14, p. 227-248, 1980.

[Das 88] P.P. Das.
"More on path generated digital metrics". Pattern Recognition Letters 10, 25-31, 1989.

[H&W] Hardy and Wright.
An introduction to the theory of numbers ; Oxford University Press, fifth edition (october 1978), §III.3.1

[Montanari 68] U. Montanari
"A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance" ; J. of ACM vol 15 n°4, October 1968, p. 600-624.

[Montanvert 86] A. Montanvert.
"Median line : graph representation and shape description". 8th ICPR. Paris. Octobre 86. pp.430-432.

[Montanvert 89] A. Montanvert ; D. Adelh.
"Tools for shape complexity evaluation and associated decomposition processes". 5th ICIAP, September 1989, Positano (Italy). Published in Progress in Image Analysis and Processing 1990. pp. 348-355.

[Pfaltz 67] Pfaltz J.L., Rosenfeld A.
"Computer representation of planar regions by their skeletons" Comm. of ACM, 10, February 1967, P. 119-125

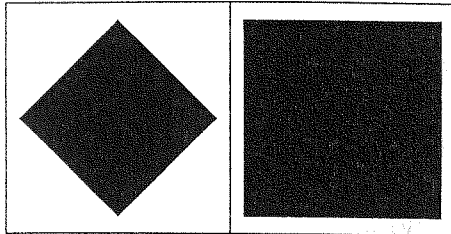
[Rosenfeld 66] A. Rosenfeld ; J.L. Pfaltz.
"Sequential operations in digital picture processing" Journal of ACM, 13(4), 1966, p. 471-494.

[Rosenfeld 68] A. Rosenfeld ; J.L. Pfaltz.
"Distance functions on digital pictures". Pattern Recognition, vol. 1, p. 33-61, 1968

[Thiel 91] Thiel E., Montanvert A.
"Shape splitting from medial lines using the 3-4 chamfer distance". International Workshop on Visual Form, May 1991, Capri.

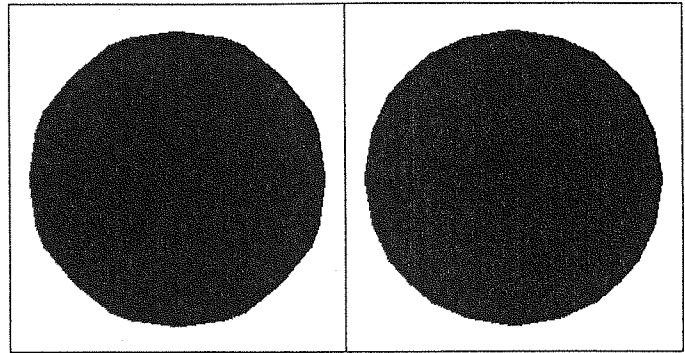
[Yamada 84] H. Yamada.
"Complete euclidean distance transformation by parallel operation" ; 7th ICPR. Montréal. August 1984, p. 69-71.

ANNEXE 1
Boules de chanfreins



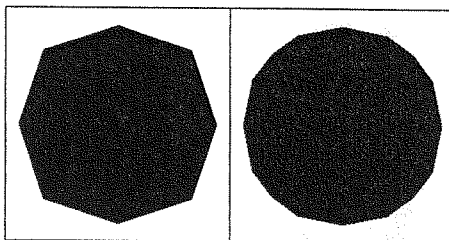
d_4

d_8



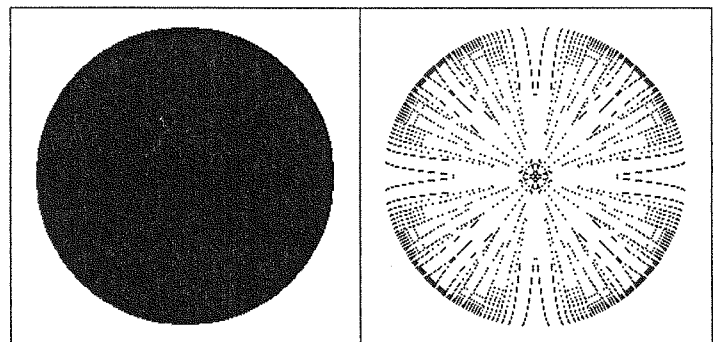
chanfrein 14-20-31-44

chanfrein 12-17-o-38-43



chanfrein 3-4

chanfrein 5-7-11



chanfrein 203-...-1093

points redondants

ANNEXE 2
Décoalescence

