

DISTANCES DISCRETES

Edouard THIEL

Equipe RFMQ - TIM3 - IMAG - USRB 00690 - Université Joseph Fourier

CERMO - BP 53X - 38041 GRENOBLE Cedex - FRANCE

tél. : (33) 76 51 48 13 - fax : (33) 76 51 49 48

e-mail : thiel@orange.imag.fr

Résumé

Cet article traite de distances discrètes utilisées en analyse d'images : les distances de chanfrein. Elles sont particulièrement prisées en raison de leur temps de calcul très réduit, et de la qualité de leurs approximations de la distance euclidienne réelle, qui gage de leur isotropie. Un point majeur n'a cependant jamais été éclairci : dans quels cas un masque de chanfrein induit-il une distance au sens mathématique ? Pour traiter cette question nous justifions d'abord l'intérêt des chanfreins dans l'espace discret ; nous reprenons ensuite la construction d'une image de distances, puis rappelons les structures particulières qui apparaissent dans les boules de chanfrein. Nous pouvons alors écrire un théorème qui prévoit de façon rigoureuse les conditions pour valider une distance de chanfrein. Enfin il nous a semblé intéressant de présenter des cas incorrects, qui montrent que cette théorie forme un tout.

Mots clés

Analyse d'Images - Distance Discrète - Distance du Chanfrein - Description de Formes - Axe Médian - Géométrie Discrète - Optimisation.

1 - L'option distance du chanfrein

En analyse d'images, on a bien souvent besoin de mesurer des distances entre objets. Les images et les capteurs sont basés sur l'échantillonnage et la quantification, et les ordinateurs sont entièrement discrets ; c'est pourquoi nous préférons des distances qui génèrent des nombres entiers.

Deux catégories de distances retiennent notre attention : les *distances rationnelles* [Montanari 68], précurseurs de la famille des *distances de chanfrein* [Borgefors 86].

Comme la distance euclidienne d_E donne des nombres réels, et que ni $(d_E)^2$ ni $\text{Round}(d_E)$ ne définissent une distance au sens mathématique (non respect de l'inégalité triangulaire), nous ne pouvons les employer ici.

Les distances bien connues d_4 et d_8 sont faciles à mettre en œuvre [Rosenfeld 68], sont relatives également à la connexité entre points d'une image, mais elles ne sont pas isotropes, ce qui provoque de nombreuses erreurs dans les applications, telles que la séparation d'agrégats cellulaires, ou de bulles dans du béton poreux.

Nous ne nous intéressons pas davantage à la distance octogonale (ici dans le maillage carré), qui s'écarte moins de d_E que d_8 , mais apporte un progrès figé.

U. Montanari introduit une catégorie de distances qui consiste à pondérer un certain nombre de déplacements par la distance euclidienne équivalente (par exemple 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ figure 1.a).

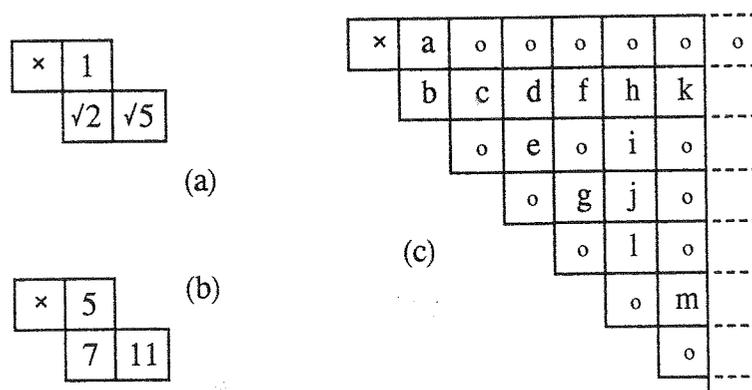


Figure 1. 1^{er} octant et pondérations

Les points affectés sont choisis parmi les points *visibles* du maillage carré (points dont les coordonnées sont premières entre elles), et la valeur de tout autre point s'obtient en cherchant sur le réseau ainsi défini, le *chemin minimal* pour l'atteindre, à partir des déplacements permis. Ce problème se formalise aisément grâce aux propriétés des suites de Farey [Hardy & Wright].

Un inconvénient majeur est l'emploi de rationnels. G. Borgefors les adapte au discret en approchant les racines par des fractions, dont les approximations sont choisies selon divers critères (par exemple $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ par $1, 7/5, 11/5$ figure 1.b). Un masque de chanfrein représente alors les distances pondérées. Nous allons principalement parler du cas des masques 8-symétriques, qui sont donc définis par leur premier octant (figure 1.c).

On appelle a, b, c .. les points visibles. Par exemple a=3, b=4 dans un masque de taille 3*3, et a=5, b=7, c=11 dans un masque 5*5.

2 - Image des distances au fond

Une image est une matrice d'entiers, codant le fond par 0 et les objets par les ensembles de points connexes non nuls. On appelle image des distances au fond, l'image telle que la valeur attribuée en tout point P est égale à la distance de P au complémentaire.

Les différentes méthodes de calcul envisageables sont détaillées dans [Thiel 91b]. Nous rappelons la plus efficace, qui en deux passages séquentiels sur l'image seulement, donne l'image des distances au fond.

On décompose le masque en deux demi-masques symétriques par rapport à O, chacun servant pour un balayage. Le *demi-masque avant* commence après le milieu P dans le *sens du balayage*. Ses points M[i] ont les coordonnées (M[i].x, M[i].y) et le poids M[i].p, où i donne un parcours de l'ensemble des points pondérés du demi-masque (cf. figure 2). Le demi-masque arrière est alors constitué des points (-M[i].x, -M[i].y) de poids M[i].p.

Figure 2. Décomposition d'un masque en deux.

Algorithme :

Parcours avant (de haut en bas et de gauche à droite)

```

pour y de 1 à ymax faire
  pour x de 1 à xmax faire
  si Pic[x,y] ≠ 0 alors Pic[x,y] := MINi { Pic[x-M[i].x,y-M[i].y] + M[i].p }

```

Parcours arrière (de bas en haut et de droite à gauche)

```

pour y de ymax à 1 faire
  pour x de xmax à 1 faire
  si Pic[x,y] ≠ 0 alors Pic[x,y] = MINi { Pic[x,y] , Pic[x+M[i].x,y+M[i].y] + M[i].p }

```

Cette méthode est actuellement la plus efficace sur machine séquentielle (en $O(n^2)$), et se parallélise également bien [Miguet 90]. A noter la possibilité de générer très simplement des boules de chanfrein. On peut alors calculer le taux d'erreur d'un chanfrein par rapport à d_E , en

prenant $\text{MAX}_{\substack{y \in [0..x] \\ x \text{ fixé}}} \left(\left| \frac{d_C - d_E}{d_E} \right| (x,y) \right)$ directement sur l'image des distances.

Ces taux sont de 41.42 % pour d_4 , 29.29 % pour d_8 , 5.72 % pour d_{3-4} , 1.98 % pour d_{5-7-11} , et tombe à 0.48 % dans un voisinage 11×11 pour $d_{203..}$, construit dans [Thiel 91c] : les chanfreins ont décidément bien des attrait.

3 - Etude Théorique

Ces masques de chanfrein existent depuis une dizaine d'années, mais personne ne s'était jusqu'à présent intéressé à établir les conditions exactes pour qu'ils induisent une distance. Nous rappelons la théorie des chanfreins [Thiel 92a] et apportons quelques compléments.

On renomme $M_1, M_2 \dots M_n$ les n points visibles affectés du générateur d'un masque de chanfrein, en les ordonnant suivant l'ordre croissant de leur angle avec la demi-droite (Ox) (remarque : $M_1 = a$ et $M_n = b$). On note $|M_i|$ le poids et $\|M_i\| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Cet ordre correspond exactement aux suites de Farey $y_i/x_i < y_{i+1}/x_{i+1}$.

On appelle *cône d'influence* des points M_i/M_{i+1} le cône délimité par les droites séparatrices de pixels (O, M_i) et (O, M_{i+1}) (voir figure 3).

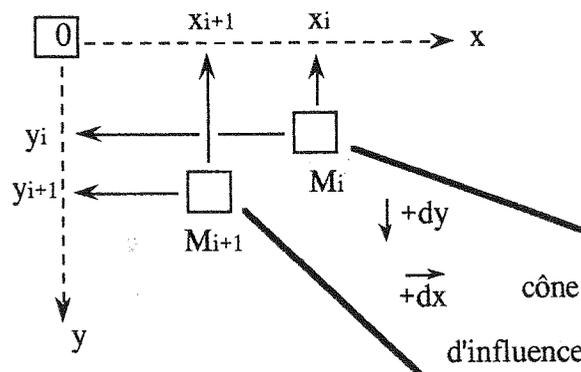


Figure 3. Cône d'influence et déplacements élémentaires

Théorème 1. Dans un tel cône, les seuls points du masque à intervenir dans la recherche du minimum pour le calcul des distances à O sont les distances locales $|M_i|$ et $|M_{i+1}|$.

Les déplacements élémentaires dx et dy à partir d'un point (x,y) correspondent au coût d'un déplacement de une case; ainsi $dx = |(x+1,y)| - |(x,y)|$ et $dy = |(x,y+1)| - |(x,y)|$ (fig. 3).

Théorème 2. Si M_i/M_{i+1} sont consécutifs ($x_i.y_{i+1} - x_{i+1}.y_i = 1$), alors les déplacements élémentaires sont constants dans tout l'intérieur du cône d'influence, et leurs pondérations sont données par :

$$\begin{aligned} dx &= y_{i+1} \cdot |M_i| - y_i \cdot |M_{i+1}| \\ dy &= x_i \cdot |M_{i+1}| - x_{i+1} \cdot |M_i| \end{aligned}$$

Appliquons les formules du théorème 2 au chanfrein 5-7-11 :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ cône } 5/11 \left\{ \begin{array}{l} dx = 1 \cdot 5 - 0 \cdot 11 = 5 \\ dy = 1 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 1 \end{array} \right. & \quad \bullet \text{ cône } 11/7 \left\{ \begin{array}{l} dx = 1 \cdot 11 - 1 \cdot 7 = 4 \\ dy = 2 \cdot 7 - 1 \cdot 11 = 3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Sachant que pour d_4 on a ($dx = 1$, $dy = 1$) et pour d_8 on a ($dx = 1$, $dy = 0$), on peut écrire d_{5-7-11} en une combinaison linéaire $u \cdot d_4 + v \cdot d_8$ pour chacun des cônes, où $u = dy$ et $v = dx - dy$:

- dans 5/11, $dx = 5$ et $dy = 1$, d'où $u = 1$ et $v = 4$, et $d_{5-7-11} = d_4 + 4 \cdot d_8$.
- dans 11/7, $dx = 4$ et $dy = 3$, d'où $u = 3$ et $v = 1$, et $d_{5-7-11} = 3 \cdot d_4 + d_8$.

Remarque : on retrouve de cette façon $d_{3-4} = d_4 + 2 \cdot d_8$ dans tout le plan [Arcelli 87]. En effet, il n'y a qu'un cône (3/4) égal au premier octant, avec $dx = 1.3 - 0.4 = 3$, $dy = 1.4 - 1.3 = 1$, d'où $u = dy = 1$ et $v = dx - dy = 2$.

Théorème 3. Un masque de chanfrein induit une distance si et seulement si, pour chaque cône d'influence de son masque, les déplacements élémentaires correspondants dx et dy , calculés à partir du théorème 2, respectent l'inégalité $dx \geq dy \geq 0$, et $dx > 0$.

Etudions les valeurs de u et v pour lesquelles $u \cdot d_4 + v \cdot d_8$ respecte l'inégalité triangulaire et la séparabilité.

Pour deux points quelconques p et q , on pose $X = |x_p - x_q|$ et $Y = |y_p - y_q|$;

ainsi $d_4(p,q) = X + Y$ et $d_8(p,q) = \min(X,Y)$.

D'où $u \cdot d_4 + v \cdot d_8 = u \cdot X + u \cdot Y + v \cdot \min(X,Y)$.

Si $u \geq 0$, $v \geq 0$ et $(u,v) \neq (0,0)$, il n'y a pas de problème : $u \cdot d_4 + v \cdot d_8$ est une fonction de distance.

Si $u \cdot v < 0$, nous devons distinguer deux cas pour la séparabilité, dont il résulte que $u \geq 0$ et $u+v \geq 0$. Pour le respect de l'inégalité triangulaire, il y a en tout huit cas, qui impliquent $u \geq 0$ et $v \geq 0$.

Conclusion : $u \cdot d_4 + v \cdot d_8$ est une distance si et seulement si $u \geq 0$, $v \geq 0$ et $(u,v) \neq (0,0)$.

Preuve du théorème 3 : nous avons vu dans l'exemple précédent que dans un cône dont les déplacements élémentaires sont dx, dy , on a $d_C = dy.d_4 + (dx-dy).d_8$.

Or $u.d_4 + v.d_8$ est une distance si et seulement si $u \geq 0, v \geq 0$ et $(u,v) \neq (0,0)$, d'où le résultat.

On souligne la possibilité de déterminer directement les contraintes sur les pondérations affectées d'un masque, à partir des théorèmes 2 et 3 :

- $dx \geq dy \Leftrightarrow |M_i|. (x_{i+1} + y_{i+1}) \geq |M_{i+1}|. (x_i + y_i)$
- $dy \geq 0 \Leftrightarrow x_i. |M_{i+1}| \geq x_{i+1}. |M_i|$
- $dx > 0 \Leftrightarrow y_{i+1}. |M_i| > y_i. |M_{i+1}|$

Cela revient à dire pour deux points M_i et M_k quelconques tels que $1 \leq i < k \leq n$

$$|M_i|. \frac{x_k + y_k}{x_i + y_i} \geq |M_k| \geq |M_i|. \frac{x_k}{x_i} \text{ et } |M_i|. \frac{y_k}{y_i} > |M_k|$$

Application dans un voisinage $7*7$. On classe les 5 points visibles a-b-c-d-e dans l'ordre croissant de leur angle par rapport à (Ox) , et on obtient :

nom	M_i	x_i	y_i	$x_i + y_i$
a	M_1	1	0	1
d	M_2	3	1	4
c	M_3	2	1	3
e	M_4	3	2	5
b	M_5	1	1	2

D'après le théorème 3, un masque a-b-c-d-e n'induirait une distance que lorsque les inégalités suivantes seront respectées :

$$\begin{array}{ll}
 4.a \geq d \geq 3.a & a > 0 \\
 9.d \geq 12.c \geq 8.d & d > c \\
 10.c \geq 6.e \geq 9.c & 2.c > e \\
 6.e \geq 15.b \geq 5.e & e > 2.b
 \end{array}$$

Revenons au cas général. Le calcul d'un masque de chanfrein se fait comme suit : on choisit un voisinage de points visibles et une valeur $|M_1| = a$, puis on affecte les points $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 2..n$) du voisinage par $|M_i| = \text{Round}(a \cdot \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)})$. Il est aisé de rechercher les valeurs de $a \in [2..255]$ interdites par le théorème 3 en fonction de la taille du masque :

3*3	aucune	9*9	1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 16, 23
5*5	2	11*11	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 16, 21, 23, 26, 28, 33, 40
7*7	1, 2, 3, 4, 6, 9		

Tout masque de chanfrein comportant au moins les points a et b, composé uniquement de points visibles et affectés par le procédé ci-dessus, respectera les inégalités du théorème 3 et donc induira une distance si et seulement si la valeur $|M_1| = a$ n'est pas interdite.

Il y a bien sûr d'autres façons de construire des masques de chanfrein, moins usuelles mais intéressantes.

- Dans [Becker 92] on construit un équivalent des chanfreins dans le continu, avec une famille de distances appelées *jauges*. Des principes élégants y sont exposés, mais ils sont pour l'heure inapplicables dans le discret, car *non pensés comme tels*. Il serait fort intéressant de chercher le 'chemin' pour relier ces deux contextes ...

- Dans [Bolon 92] on s'attache à développer des chanfreins sur des pixels de forme rectangulaire (de rapport L), en construisant des masques non symétriques par rapport aux diagonales. Cette approche pourrait simplifier bien des applications, mais il faut encore établir la validité des distances.

Prenons le cas d'un voisinage 5*5. Les points à affecter sont a(1,0), b(1,1), c(2,1), d(0,1) et e(1,2), avec la formule $|M_i| = \text{Round}(a \cdot \sqrt{(x_i^2 + L^2 y_i^2)})$.

Par extension du théorème 3, ce chanfrein induira une distance ssi $3a \geq c \geq 2a$, $a > 0$, $4c \geq 6b \geq 3c$, $c > b$, $3d \geq e \geq 2d$, $d > 0$, $4e \geq 6b \geq 3e$, $e > b$.

Les points b et c ayant les poids $|b| = \text{Round}(a \cdot \sqrt{(1+L^2)})$ et $|c| = \text{Round}(a \cdot \sqrt{(4+L^2)})$, la condition $4c \geq 6b$ se traduit par $L < 1.18$. On ne peut donc avoir de distance dès que $L > 1.18$, et une telle borne limite sérieusement l'aspect 'rectangulaire' des pixels !

Mais relevons cependant que la transformation de distance de Rosenfeld fonctionne très bien, y compris pour des $L > 2$, et que certaines applications pourront se passer d'avoir une vraie fonction de distance.

4 - Cas incorrects

Pour bien se convaincre de l'intérêt du théorème 3, nous allons chercher dans les exemples suivants les éléments dont la validité est infirmée.

Chanfrein 5-7-9

Ce masque n'a pas été construit avec le modèle classique $|M_i| = \text{Round}(a\sqrt{(x_i^2+y_i^2)})$, donc au lieu de simplement vérifier si a n'est pas une valeur interdite pour le voisinage 5*5, il faut tester toutes les inégalités, à savoir $3a \geq c \geq 2a$, $a > 0$, $4c \geq 6b \geq 3c$ et $c > b$. Dans le cas présent ni $(c \geq 2a)$ ni $(2c \geq 3b)$ ne sont respectées, donc d_{5-7-9} n'est pas une distance.

Cela se traduit à la figure 4.a par le non respect de l'inégalité triangulaire, dans l'image des distances obtenue par le calcul séquentiel. En comparant cette image avec le résultat du calcul parallèle (fig. 4.b), nous nous apercevons qu'elles ne sont pas identiques : voilà un contre-exemple frappant à l'assertion de l'équivalence entre ces deux méthodes !

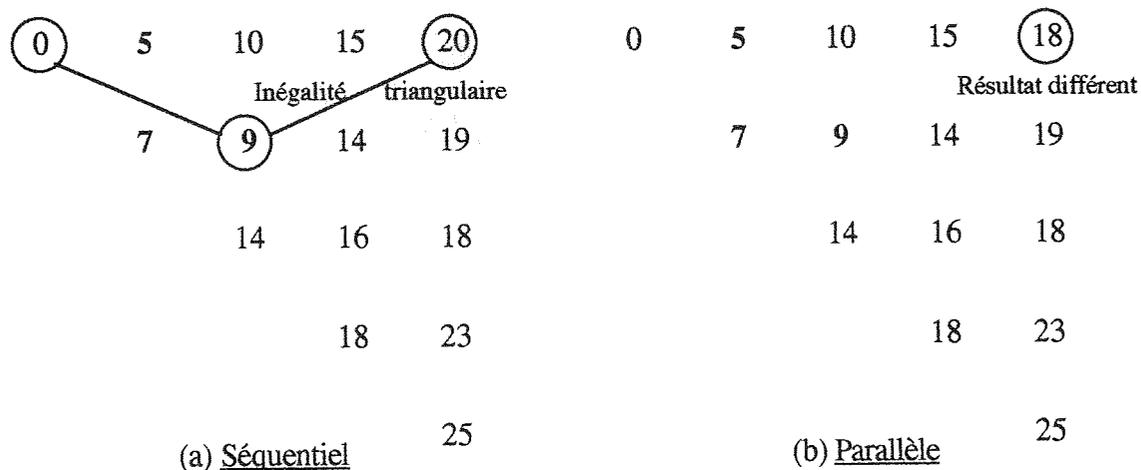


Figure 4. Séquentiel ≠ Parallèle

Chanfrein 2-3-4

Ce masque quant à lui a bien été construit avec le modèle classique, mais avec une valeur de a interdite pour le voisinage 5*5 ; donc d_{2-3-4} n'est pas une distance.

Regardons les conséquences sur les images de distances. Figure 5.a, la pondération b n'engendre plus sa période, et l'algorithme de Rosenfeld est ainsi mis en défaut. De la sorte, l'image séquentielle est différente de l'image idéale (fig. 5.b), qui correspond au modèle de la théorie exposée au § 3. Celui-ci prévoit que dans le cône 2/4 on a $dx = 2$, $dy = 0$ et dans le cône 4/3, $dx = 1$ et $dy = 2$. Dans le second cône, ni $(dx \geq dy)$ ni $(2c \geq 3b)$ ne sont respectées.

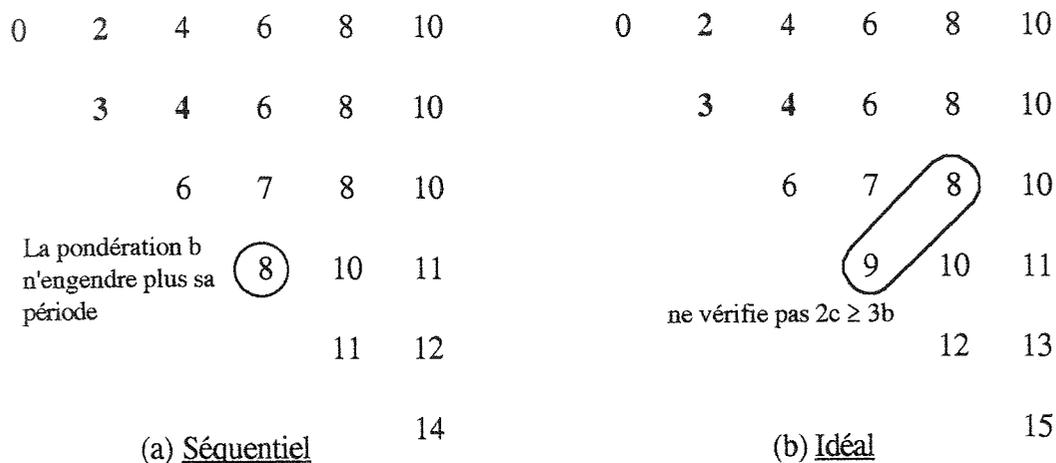


Figure 5. Séquentiel ≠ Idéal

Nous retiendrons de ces exemples que la validité de l'algorithme de Rosenfeld par rapport au modèle idéal, et son équivalence à la méthode parallèle, sont tous étroitement liés au fait que le masque induise une distance. Créer des masques non conformes peut amener à des surprises !

5 - Conclusion

Les distances du chanfrein sont particulièrement adaptées au support discret d'une image, tant du point de vue de leur représentation que de leur calcul, et offrent ainsi une excellente alternative à la distance euclidienne.

Elles ont entièrement été pensées dans l'espace discret, et les démarches continues conduisent souvent à des erreurs, y compris pour l'optimisation.

Un lien très fort existe entre cette très belle théorie et la pratique.

Nous avons montré dans cet article que les distances de chanfrein, sous certaines conditions, sont bien des distances au sens mathématique. Cela est important pour justifier les applications des chanfreins, tels que l'axe médian et la ligne médiane [Thiel 91.a].

Notre démarche étant récente, l'extraction des points de l'axe médian n'est définie actuellement que pour des voisinages de taille 3*3. La structure des cônes exposée plus haut va nous permettre d'élaborer une méthode rigoureuse et efficace de caractérisation pour des voisinages de taille quelconque.

Enfin, le passage au 3D est non seulement envisagé, mais il est aussi utile. En effet des capteurs tels que le microscope confocal fournissent directement des structures voxels (mais pas forcément cubiques), avec d'importantes implications dans le domaine de la recherche biomédicale.

6 - Bibliographie

- [ARCELLI 87] C. ARCELLI, G. SANNITI DI BAJA, "Weighted distance transforms : a characterization", 4th Int. Conf. on IAPR, Cefalu (Italy), Sept 87, p. 205-212.
- [BECKER 92] J.M. BECKER, "Approximations de la distance euclidienne sur trame : extension de la méthode Montanari-Borgefors", Congrès Distancia 92, Rennes, juin 1992, p. 263-266.
- [BOLON 92] P. BOLON, J.L. VILA, T. AUZEPY, "Opérateur local de distance en maillage rectangulaire", 2ème Colloque Géométrie Discrète en Imagerie : Fondements et Applications, Grenoble, 17-18 sept 1992.
- [BORGEFORS 86] G. BORGEFORS, "Distance transformations in digital images", CVGIP 34, p. 344-371, 1986.
- [CHASSERY 91] J.M. CHASSERY, A. MONTANVERT, *Géométrie discrète en analyse d'images*, Ed. Hermès, 1991.
- [HARDY & WRIGHT] HARDY & WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, fifth edition (october 1978), § III.3.1.
- [MONTANARI 68] U. MONTANARI, "A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance", J. of ACM vol 15 n°4, October 1968, p. 600-624.
- [ROSENFELD 68] A. ROSENFELD, J.L. PFALTZ, "Distance functions on digital pictures", Pattern Recognition, vol. 1, p. 33-61, 1968.
- [THIEL 91a] E. THIEL, A. MONTANVERT, "Shape splitting from medial lines using the 3-4 chamfer distance", International Workshop on Visual Form, May 1991, Capri, published in Plenum Press, New York, 1992, p. 537-546.
- [THIEL 91b] E. THIEL, A. MONTANVERT, "Approximation discrète de la distance euclidienne", 1er Colloque Géométrie Discrète en Imagerie : Fondements et Applications, Strasbourg, 26-27 sept 1991.
- [THIEL 91c] E. THIEL, A. MONTANVERT, "Approximation discrète de la distance euclidienne pour l'analyse d'images : étude et amélioration des distances du chanfrein", 8ème congrès RFIA, Lyon 1991, p. 829-839.
- [THIEL 92a] E. THIEL, A. MONTANVERT, "Etude et amélioration des distances du chanfrein pour l'analyse d'images", revue TSI ed. Hermès, vision par ordinateur, 1992.
- [THIEL 92b] E. THIEL, A. MONTANVERT, "Les distances du chanfrein en géométrie discrète", Congrès Distancia 92, Rennes, juin 1992, p. 295-298.
- [THIEL 92c] E. THIEL, A. MONTANVERT, "Chamfer masks : discrete distance function, geometrical properties and optimization", 11th International Conference on Pattern Recognition, The Hague, The Netherlands, Aug. 30 - Sept. 3, 1992, published in IEEE.