

LES DISTANCES DE CHANFREIN EN GEOMETRIE DISCRETE

Edouard THIEL - Annick MONTANVERT

Equipe RFMQ - TIM3 - IMAG - USRB 00690 - Université Joseph Fourier
CERMO - BP 53X - 38041 GRENOBLE Cedex - FRANCE
tél. : (33) 76 51 48 13 - fax : (33) 76 51 49 48
e-mail : thiel@orange.imag.fr - montanv@imag.imag.fr

Résumé: Cet article traite des distances discrètes, et de leur utilisation en analyse d'images. Les distances du chanfrein sont basées sur la définition de masques dont la taille est choisie en fonction de la qualité de l'approximation de la distance euclidienne souhaitée. Nous justifions le choix et la validité de telles distances, nous présentons les principales méthodes d'optimisation, puis nous énumérons leurs applications majeures.

Mots clés : Analyse d'Images - Distance Discrète - Distance du Chanfrein - Description de Formes - Axe Médian - Géométrie Discrète - Optimisation.

1 - L'option distance du chanfrein

En analyse d'images, on a bien souvent besoin de mesurer des distances entre objets. Les images et les capteurs sont basés sur l'échantillonnage et la quantification, et les ordinateurs sont entièrement discrets ; c'est pourquoi nous préférons des distances qui génèrent des nombres entiers.

Comme la distance euclidienne d_E donne des nombres réels, et que ni $(d_E)^2$ ni $\text{Round}(d_E)$ ne définissent une distance au sens mathématique, nous ne pouvons les employer ici.

Les distances bien connues d_4 et d_8 sont faciles à mettre en œuvre [Rosenfeld 68], mais elles ne sont pas isotropes, ce qui provoque de nombreuses erreurs dans les applications, telles que la séparation d'agrégats cellulaires, ou de bulles dans du béton poreux.

Nous ne nous intéressons pas davantage à la distance octogonale (ici dans le maillage carré), qui s'écarte moins de d_E que d_8 , mais apporte un progrès figé.

Deux catégories de distances retiennent notre attention : les *distances rationnelles* [Montanari 68], précurseurs de la famille des *distances de chanfrein* [Borgefors 86].

U. Montanari introduit une catégorie de distances qui consiste à pondérer un certain nombre de déplacements par la distance euclidienne équivalente. Les points affectés sont choisis parmi les points *visibles* du maillage carré (points dont les coordonnées sont premières entre elles), et la valeur de tout autre point s'obtient en cherchant sur le réseau ainsi défini, le *chemin minimal* pour l'atteindre, à partir des déplacements permis. Ce problème se formalise aisément grâce aux propriétés des suites de Farey [Hardy & Wright].

Un inconvénient majeur est l'emploi de rationnels. G. Borgefors les adapte au discret en approchant les racines par des fractions, dont les approximations sont choisies selon divers critères (par exemple $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ par $1, 7/5, 11/5$). Un masque de chanfrein représente alors les distances pondérées (figure 1) ; ce masque est 8-symétrique, et défini par le premier octant.

On appelle a, b, c .. les points visibles. Par exemple $a=3$, $b=4$ dans un masque de taille $3*3$, et $a=5$, $b=7$, $c=11$ dans un masque $5*5$.

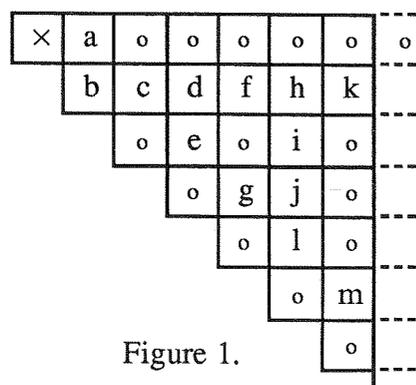


Figure 1.

2 - Etude Théorique

Ces masques de chanfrein existent depuis une dizaine d'années, mais personne ne s'était jusqu'à présent intéressé à établir les conditions exactes pour qu'ils induisent une distance. Nous rappelons la théorie des chanfreins [Thiel 92] et apportons quelques compléments.

On renomme $M_1, M_2 \dots M_n$ les n points visibles affectés du générateur d'un masque de chanfrein, en les ordonnant suivant l'ordre croissant de leur angle avec la demi-droite (Ox) (remarque : $M_1 = a$ et $M_n = b$). On note $|M_i|$ le poids et $\|M_i\| = \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}$. Cet ordre correspond exactement aux suites de Farey $y_i/x_i < y_{i+1}/x_{i+1}$.

On appelle *cône d'influence* des points M_i/M_{i+1} le cône délimité par les droites séparatrices de pixels (O, M_i) et (O, M_{i+1}) .

Théorème 1. Dans un tel cône, les seuls points du masque à intervenir dans la recherche du minimum pour le calcul des distances à O sont les distances locales $|M_i|$ et $|M_{i+1}|$.

Les déplacements élémentaires dx et dy à partir d'un point (x, y) correspondent au coût d'un déplacement de une case; ainsi $dx = |x+1, y| - |x, y|$ et $dy = |x, y+1| - |x, y|$.

Théorème 2. Si M_i/M_{i+1} sont consécutifs, (i.e. si $x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i = 1$) alors les déplacements élémentaires sont constants dans tout l'intérieur du cône d'influence, et leurs pondérations sont données par :

$$dx = y_{i+1} \cdot |M_i| - y_i \cdot |M_{i+1}|$$

$$dy = x_i \cdot |M_{i+1}| - x_{i+1} \cdot |M_i|$$

Il en résulte que, dans un tel cône, les intervalles de niveaux $[n-a, n]$ sont des droites *-connexes (i.e. à la fois 4 ou 8-connexes).

Théorème 3. Un masque de chanfrein induit une distance si et seulement si, pour chaque cône d'influence de son masque, les déplacements élémentaires correspondants dx et dy , calculés à partir du théorème 2, respectent l'inégalité $dx \geq dy \geq 0$ et $dx > 0$.

Explication : ceci tient au fait que dans un cône (M_i, M_{i+1}, dx, dy) on a $d_C = dy \cdot d_4 + (dx - dy) \cdot d_8$, et que $u \cdot d_4 + v \cdot d_8$ est une distance si et seulement si $u \geq 0, v \geq 0, (u, v) \neq (0, 0)$.

On souligne la possibilité de déterminer directement les contraintes sur les pondérations locales, à partir des théorèmes 2 et 3 : $dx \geq dy \geq 0$ et $dx > 0 \Leftrightarrow$

$$|M_i| \cdot (x_{i+1} + y_{i+1}) \geq |M_{i+1}| \cdot (x_i + y_i) ; |M_{i+1}| \cdot x_i \geq |M_i| \cdot x_{i+1} \text{ et } |M_i| \cdot y_{i+1} > |M_{i+1}| \cdot y_i$$

Cela revient à dire pour deux points M_i et M_k quelconques tels que $y_i/x_i > y_k/x_k$

$$|M_i| \cdot \frac{x_k + y_k}{x_i + y_i} \geq |M_k| \geq |M_i| \cdot \frac{x_k}{x_i} \text{ et } |M_i| \cdot \frac{y_k}{y_i} > |M_k|$$

Le calcul d'un masque de chanfrein se fait comme suit : on choisit un voisinage de points visibles et une valeur $|M_1| = a$, puis on affecte les points $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 2..n$) du voisinage par $|M_i| = \text{Round}(a \cdot \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)})$. Il est aisé de rechercher les valeurs de a interdites par le théorème 3 en fonction de la taille du masque :

3*3	aucun	9*9	1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 16, 23
5*5	2	11*11	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 16, 21, 23, 26, 28, 33, 40
7*7	1, 2, 3, 4, 6, 9		

Tout masque de chanfrein comportant au moins les points a et b , composé uniquement de points visibles et affectés par le procédé ci-dessus, respectera les inégalités du théorème 3 et donc induira une distance si et seulement si la valeur $|M_1| = a$ n'est pas interdite.

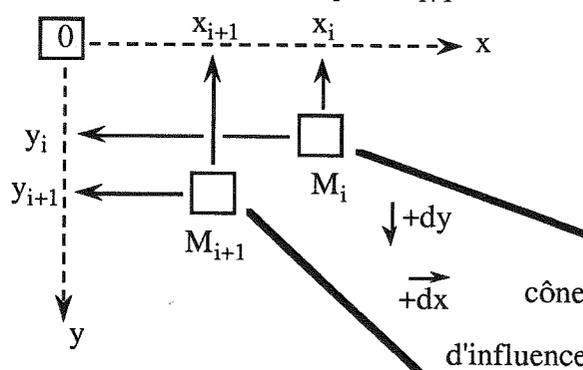


Figure 2.

3 - Optimisations

Les distances de chanfrein peuvent donner de très bonnes approximations de la distance euclidienne, ce qui constitue un bon critère d'isotropie. Plusieurs méthodes existent pour y parvenir. Dans [Borgefors 86] sont résolus des systèmes d'inéquations pour trouver des intervalles en nombres réels pour a, b, c..., puis on choisit des fractions d'entiers. Enfin on teste l'erreur relative à la distance euclidienne sur des droites limitant le support image. Ce critère est contesté dans [Verwer 91], qui préfère minimiser l'erreur sur des droites obliques, voire sur des cercles euclidiens (mais ne correspondant plus au support image).

Dans ces deux articles, les auteurs recherchent des erreurs *théoriques*, et ne trouvent que des *majorants*, qui sont éloignés des valeurs *effectives* dans \mathbb{Z}^2 . Quant au critère de minimisation, on a le choix dans la pratique (discrète) entre le maximum de l'erreur, l'amplitude de l'erreur, ou la minimalité sur les coefficients de chanfrein eux-mêmes. Cette dernière possibilité revient à minimiser les erreurs sur les petites distances ; quant aux deux premières, elles font minimiser les erreurs sur les grandes distances. Une façon d'unifier la minimisation est de procéder sur la totalité des points de l'image (l'intégrale discrète).

Nous proposons une nouvelle approche dans [Thiel 91b]. Notre propos est de calculer des masques de plus grande taille, puis de minimiser les erreurs effectives dans l'image des distances (notée DT). Nous savons que les boules de chanfrein sont des polygones, dont les angles sont portés par les points visibles affectés du masque. Nous approcherons donc le cercle euclidien par des *polygones les plus réguliers possibles*, en choisissant avec soin les points à affecter puis en optimisant les valeurs, selon un des critères exposés précédemment. Pour ce faire, nous testons toutes les valeurs de a entre 2 et 255, calculons les poids des points p(x,y) affectés avec la formule $p = \text{Round}(a \cdot \sqrt{x^2+y^2})$, puis nous calculons les erreurs effectives sur la droite limitant le support de l'image des distances DT.

Dans un voisinage 7*7, le chanfrein 12-17-0-38-43 réalise ainsi une meilleure approximation que le chanfrein 14-20-31-44 de Borgefors. Cela est dû au fait que a/d/e/b sont mieux distribués que a/d/c/b dans le premier octant.

Un autre exemple est le chanfrein 203-287-454-642-732-837-1015-1035-1093 dans un voisinage 11*11, où le maximum de l'erreur tombe à 0,48 % ! La boule résultante est un polygone à 64 côtés, extrêmement proche du cercle euclidien (figure 3).

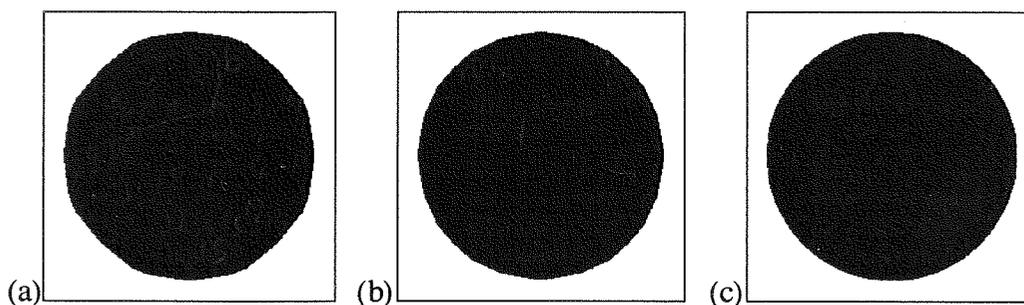


Figure 3. (a) d_{14..} (b) d_{12..} (c) d_{203..}

Le tableau ci-dessous montre que la progression de d₄ à d_{203..} est de l'ordre du facteur 100. Nous pouvons voir que l'erreur effective pour chanfrein 3-4 est de 5,72 % et non 8,09 %, comme cela était annoncé dans [Borgefors 86].

distance	classique		G. Borgefors			E. Thiel	
	d ₄	d ₈	d _{3..}	d _{5..}	d _{14..}	d _{12..}	d _{203..}
max erreur	41,42 %	29,29 %	5,72 %	1,98 %	1,52 %	1,38 %	0,48 %
amplitude	41,42 %	29,29 %	11,13 %	3,59 %	2,49 %	2,00 %	0,51 %

4 - Résultats

Les distances de chanfrein sont rendues particulièrement intéressantes par le calcul extrêmement rapide de leur image de distance, en deux passages séquentiels sur l'image seulement, et sur une structure de données discrète (des entiers 16) [Rosenfeld 68].

On peut obtenir des boules de chanfrein par ce moyen en donnant en entrée une image de taille 'infinie', où un seul point est fond (le centre), et en ne conservant à la sortie que les poids inférieurs à $R \cdot a + r$: on obtient ainsi une famille de boules de rayon R , en faisant varier r entre 0 et $a-1$, avec un passage progressif au disque de rayon $R+1$. Cela peut être intéressant pour l'animation, et pour la topologie discrète [Reveillès 91] [Kovalesky 89] [Andrès 91]. Nous montrons fig. 4 un exemple pour chanfrein 3-4 et $R=3$.

Une utilisation courante des chanfreins est la transformation en axe médian, qui revient à chercher un recouvrement de la forme par des disques maximaux [Arcelli 88]. Cette transformation est encore une fois très rapide (un seul passage sur l'image), réversible, et permet de calculer la ligne médiane (le squelette pondéré) de la forme [Arcelli 91][Thiel 91a].

Une application très intéressante de cette dernière est la détection des rétrécissements dans une forme. En effet, un rétrécissement détectable pour une métrique donnée correspond à un point col sur l'image des distances. Il suffit de parcourir la ligne médiane et de rechercher les minimums locaux qui ne sont pas aux extrémités.

L'apport essentiel des chanfreins par rapport à d_g est de fournir des distances nettement plus isotropes : en effet, bien des rétrécissements indétectables pour d_g le seront pour d_C .

Enfin, une autre utilisation de première importance des distances du chanfrein est le calcul de granulométrie, courant en étude de matériaux. L'approche usuelle met en œuvre l'opérateur itératif d'érosion de la morphologie mathématique. Une image de distance de chanfrein contient *directement* l'équivalent des érodés successifs. A titre comparatif, une granulométrie par morphologie mathématique nécessite 1h 30mn contre 2mn avec les distances de chanfrein.

5 - Conclusion

Les distances du chanfrein sont particulièrement adaptées au support discret d'une image, tant du point de vue de leur représentation que de leur calcul, et offrent ainsi une excellente alternative à la distance euclidienne. Les exemples cités montrent l'étendue de leurs champs d'application, où elles apportent des avantages substantiels en robustesse et efficacité.

[ANDRES 91] Eric ANDRES, "Cercles discrets et rotations discrètes", 1^{er} coll. de géométrie discrète, CRI Strasbourg 91.
 [ARCELLI 88] C. ARCELLI, G. SANNITI DI BAJA, "Finding local maxima in a pseudo-euclidean distance transform", CVGIP 43, p. 361-367, 1988.
 [ARCELLI 91] C. ARCELLI, M. FRUCCI, "Reversible skeletonization by (5-7-11)-erosion", First International Workshop on Visual Form, May 27-30, 1991, Capri, Italy, published in Plenum Press, New York, 1992, p. 21-28.
 [BORGEFORS 86] G. BORGEFORS, "Distance transformations in digital images", CVGIP 34, p. 344-371, 1986.
 [CHASSERY 91] J.M. CHASSERY, A. MONTANVERT, *Géométrie discrète en analyse d'images*, Ed. Hermès, 1991.
 [HARDY & WRIGHT] HARDY & WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, fifth edition (october 1978), § III.3.1.
 [KOVALESKY 89] KOVALESKY V.A, "Finite Topology as applied to image analysis", CVGIP, 46, 1989, p.141-161.
 [MONTANARI 68] U. MONTANARI, "A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance", J. of ACM vol 15 n°4, October 1968, p. 600-624.

[REVEILLES 91] J.P. REVEILLES, "Géométrie Discrète, Calcul en Nombres Entiers et Algorithmique", Thèse U.L.P. Strasbourg, 1991.
 [ROSENFELD 68] A. ROSENFELD, J.L. PFALTZ, "Distance functions on digital pictures", Pattern Recognition, vol. 1, p. 33-61, 1968.
 [THIEL 91a] Edouard THIEL, Annick MONTANVERT, "Shape splitting from medial lines using the 3-4 chamfer distance", International Workshop on Visual Form, May 1991, Capri, published in Plenum Press, New York, 1992, p. 537-546.
 [THIEL 91b] E. THIEL, A. MONTANVERT, "Approximation discrète de la distance euclidienne pour l'analyse d'images : étude et amélioration des distances du chanfrein", 8^{ème} congrès RFIA, Lyon 1991, p.829-839.
 [THIEL 92] E. THIEL, A. MONTANVERT, "Etude et amélioration des distances du chanfrein pour l'analyse d'images", revue TSI ed. Hermès, *vision par ordinateur*, 1992.
 [VERWER 91] J.H. VERWER, "Local distance for distance transformations in two and three dimensions" Pattern Recognition Letters 12 (1991), p. 671-682.

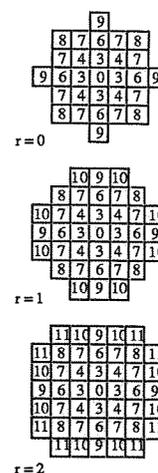


Figure 4.