
Recherche

Etude et amélioration des distances du chanfrein pour l'analyse d'images

Edouard Thiel ; Annick Montanvert

*Equipe RFMQ - TIM3 - IMAG - USRB 00690
Université Joseph Fourier - CERMO - BP 53X
38041 GRENOBLE Cedex - FRANCE
tél. : (33) 76 51 48 13 - fax : (33) 76 51 49 48
e-mail : thiel@orange.imag.fr - montanv@imag.imag.fr*

RESUME. Cet article traite des distances discrètes, et de leur utilisation en description de formes et en analyse d'images. Il s'intéresse aux distances efficaces en termes de calcul et de stockage, à savoir les distances du chanfrein. Les principes inhérents au calcul de l'image de distance induisent des propriétés géométriques sur cette image et sur la structure des boules discrètes construites. Nous démontrons ces propriétés, puis nous donnons un procédé de calcul de masques du chanfrein de taille quelconque, assurant une erreur minimale par rapport à la distance euclidienne. La minimisation est réalisée directement dans l'espace discret, par exploitation des suites de Farey. Nous présentons comme utilisation des images de distances, les représentations en axe médian et ligne médiane, utilisées pour la séparation d'agrégats. Le procédé est invariant en rotation et indépendant en taille.

ABSTRACT. This paper deals with discrete distances, and their utilization for shape description and image analysis. We are interested in distances which have an effective computation and storage : namely the chamfer distances. The inherent principles to the distance transform computation induce geometric properties on this image and the structure of the resulting discrete disks. We prove these properties, and then we give a process to compute the chamfer distance weights which is size-independent. This allows fast and robust algorithms and a good approximation of the euclidean distance. We minimize the relative error compared to the Euclidean distance working directly in the discrete space and using the series of Farey. We present some utilizations of these distance images, which are medial axis and medial line representations, used for the separation of aggregations. The process is invariant under rotation and width-independent.

MOTS CLES : Analyse d'images - Distance discrète - Distance du chanfrein - Représentation de formes - Axe médian - Géométrie discrète - Optimisation.

KEYWORDS : Image analysis - Discrete distance - Chamfer distance - Shape description - Medial axis - Discrete geometry - Optimization.

1. Introduction

En analyse d'images, et plus précisément en représentation et description de formes, on a besoin de mesurer des distances entre objets, ou de séparer des objets accolés. On utilise pour cela des images de distance, où chaque point est étiqueté à sa distance au fond (le plus court chemin au complémentaire).

Les premières métriques à avoir été employées sont les distances d_4 et d_8 , relatives également à la connexité entre points d'une image, qui pour deux points $P(x_p, y_p)$ et $Q(x_q, y_q)$ sont définies par :

$$d_4(P, Q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$$
$$d_8(P, Q) = \max (|x_p - x_q|, |y_p - y_q|)$$

Les boules discrètes de ces métriques (cf. figure 7) sont non circulaires, et les valeurs obtenues sont sensiblement différentes (41,4 % pour d_4 et 29,3 % pour d_8) de celles associées au calcul de la distance euclidienne *réelle* d_E définie par :

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

d'où une non robustesse à la rotation de l'image, appelée *anisotropie*, des traitements fondés sur d_4 et d_8 .

Le calcul de d_E est possible par un parcours exhaustif de l'image, mais il est coûteux en temps de calcul. Des méthodes itératives sont décrites dans [DAN 80] et [VIN 91], mais sont dépendantes de l'épaisseur des objets dans l'image. Il existe de plus une approche séquentielle par allez-retours sur les lignes [YAM 84], mais qui génère des erreurs dans certaines configurations (cônes aigus).

Le problème d'une structure de données adaptée à d_E est soulevé pour stocker un résultat $d = \sqrt{x^2 + y^2}$: on peut conserver le couple (x, y) sur 2×16 bits, ou $(x^2 + y^2)$ sur 32 bits. Enfin, si l'on veut stocker une image d'entiers, on est gêné par le fait que ni $(d_E)^2$, ni $\text{Int}(d_E)$, ni $\text{Round}(d_E)$ ne sont des fonctions de distance.

Ces imperfections sont à l'origine des efforts menés pour définir des distances discrètes qui approchent au mieux d_E et qui se calculent avec des algorithmes efficaces sur l'image [ROS 66].

Ajoutons enfin que les images et les capteurs reposent sur l'échantillonnage et la quantification, et que les ordinateurs sont entièrement discrets ; c'est pourquoi nous préférons des distances qui génèrent des nombres entiers.

Les distances qui sont le mieux adaptées à ces objectifs sont celles de type chanfrein, introduites par G. Borgefors [BOR 84, 86]. Elles consistent à pondérer chaque déplacement par un entier dans un voisinage donné, et permettent d'approximer d_E autant que souhaité. Il y a d'autres moyens d'envisager des distances discrètes, la distance octogonale d_o [ROS 68] ou la distance du cavalier [DAS 88], mais elles ne satisfont pas complètement ces objectifs. En particulier, elles restent figées, et ne peuvent être améliorées.

Aussi, l'objet de cet article est de rechercher les propriétés mathématiques des distances de chanfrein, de façon à exploiter au maximum un algorithme déjà existant et particulièrement efficace de transformation de distance, séquentiel en deux passages sur l'image, qui est indépendant de l'épaisseur des objets (§ 2.1).

Dans le § 2 nous donnons les définitions d'image de distance et de distance de chanfrein, et nous présentons le schéma des algorithmes de calcul associés. Nous présentons dans ce même paragraphe les boules définies par ces métriques entières.

Nous relevons au §3 des propriétés induites par ces masques sur l'image de distance, de façon à établir la structure locale, géométrique et arithmétique de leur disques. On en déduit les contraintes *exactes* pour qu'un masque de chanfrein induise bien une distance au sens mathématique.

Ces propriétés donnent lieu à une nouvelle conception des masques de chanfrein, qui est exposée au § 4. Cette conception est relative à l'optimisation du masque dans un voisinage donné pour approximer au mieux d_E . Sa comparaison avec les distances du chanfrein proposées par G. Borgefors est détaillée dans le § 5, ainsi que la génération de masques de plus grande taille.

Nous présentons en dernier lieu (§ 6) ce qu'apportent les distances du chanfrein par rapport à d_4 et d_8 , dans des applications telles que le calcul de l'axe médian, la ligne médiane, la séparation d'agrégats (tissus cellulaires, béton poreux).

2. Masques du chanfrein

2.1. Image de distance au fond

Etant donné une image contenant des objets (ensembles connexes de points à 1, le complémentaire étant à 0), on appelle *image de distance au fond* l'image telle que la valeur attribuée en tout point P est égale à la distance de P au complémentaire (cf. figure 1).

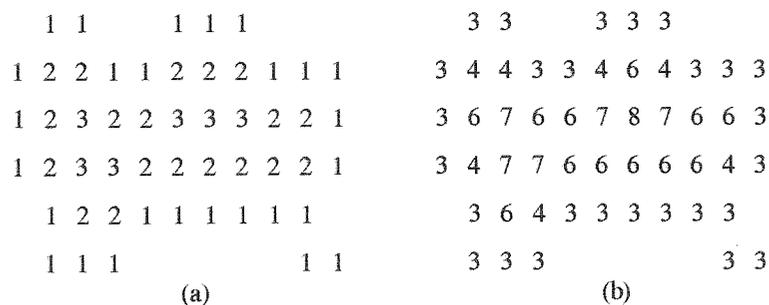


Figure 1. Images de distance au fond pour (a) d_4 et (b) d_{3-4}

Définition : On appelle *distance* (ou *métrique*) *entière* sur un ensemble \mathbb{E} une application $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} d(a,b) &\geq 0 \\ d(a,b) = 0 &\Leftrightarrow a = b && \textit{séparabilité} \\ d(a,b) &= d(b,a) && \textit{transitivité} \\ d(a,c) &\leq d(a,b) + d(b,c) && \textit{inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

Le principe de calcul pour des distances telles que d_4 , d_8 ou du type chanfrein, consiste à pondérer les déplacements dans un voisinage donné. On construit la métrique d_4 en donnant le poids 1 aux voisins directs ; pour d_8 on rajoute le même coût de 1 aux voisins indirects (cf. figure 2.a,b).

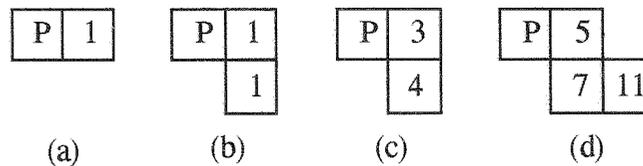


Figure 2. *Pondérations locales dans un octant à partir de P*

Le chanfrein 3-4 est obtenu à partir des pondérations données en figure 2.c, où $4/3$ est une approximation de $\sqrt{2}$. Dans un voisinage un peu plus étendu, on cite le chanfrein 5-7-11, où $7/5 \approx \sqrt{2}$ et $11/5 \approx \sqrt{5}$ (cf. figure 2.d).

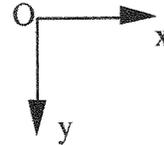
Plus généralement, on se donne la possibilité de travailler sur le maillage carré avec des masques entiers de taille quelconque, symétriques par rapport à (Ox) , (Oy) et les bissectrices. Le choix des pondérations et de leur emplacement est primordial. Nous définissons au § 3.3 des conditions strictes pour que ces masques induisent bien des métriques discrètes. Un choix judicieux permet alors de bonnes approximations de la distance euclidienne, le but recherché étant l'obtention de masques optimaux pour une taille donnée (§ 4).

Il y a plusieurs familles d'algorithmes de transformation de distance :

- Le parcours exhaustif, qui est en $O(n^4)$ et donc très lent.
- L'approche parallèle, qui travaille courbe de niveau à courbe de niveau en itératif, est en $O(n^3)$ et dépend de l'épaisseur des objets dans l'image.
- Le calcul séquentiel en $O(n^2)$ et indépendant de la taille des objets, que l'on détaille plus loin.
- L'algorithme cellulaire de [VER 91], aussi rapide que le précédent, mais demandant une structure particulière en mémoire, et ne fonctionnant que pour des masques 3×3 .

Nous rappelons l'algorithme séquentiel qui, en deux passages sur une image (notée Pic), donne l'image des distances au fond [ROS 66].

Etant donné l'orientation de l'écran d'ordinateur, nous utilisons dans tout l'article le repère suivant :



On décompose le masque en deux demi-masques symétriques par rapport à O, chacun servant pour un balayage. Le *demi-masque avant* commence après le milieu P dans le *sens du balayage*. Ses points M[i] ont les coordonnées (M[i].x, M[i].y) et le poids M[i].p, où i donne un parcours de l'ensemble des points pondérés du demi-masque (cf. figure 3) :

$$m_{3-4} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow m_{av} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad m_{ar} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Figure 3. Décomposition d'un masque en deux

Le demi-masque arrière est alors constitué des points (-M[i].x, -M[i].y) de poids M[i].p.

Algorithme :

Parcours avant : de haut en bas et de gauche à droite
 pour y de 1 à ymax faire
 pour x de 1 à xmax faire
 si Pic[x,y] ≠ 0
 alors Pic[x,y] := MIN_i { Pic[x-M[i].x, y-M[i].y] + M[i].p }

Parcours arrière : de bas en haut et de droite à gauche
 pour y de ymax à 1 faire
 pour x de xmax à 1 faire
 si Pic[x,y] ≠ 0
 alors Pic[x,y] := MIN_i { Pic[x,y] , Pic[x+M[i].x, y+M[i].y] + M[i].p }

Cet algorithme est actuellement le plus efficace sur machine séquentielle. A titre d'exemple, le temps de calcul pour une image 256*256 sur un SUN 4 est de l'ordre du dixième de seconde. A noter la possibilité de l'implémenter sur machine parallèle pour des masques de taille quelconque [MIG 90], avec une *efficacité* remarquable de 0,81 !

2.2. Définition du masque de chanfrein

Nous limitant à des masques symétriques par rapport à (Ox) , (Oy) et les bissectrices, nous appelons **générateur** d'un masque le premier octant de celui-ci (cf. figure 4.a).

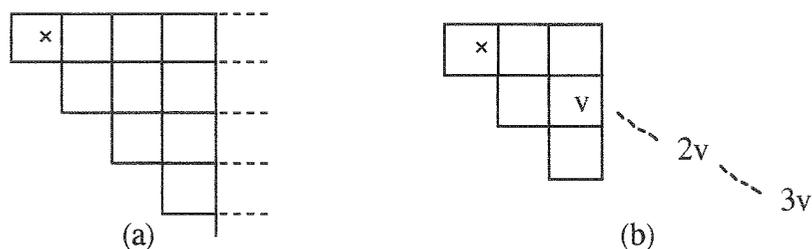


Figure 4. (a) générateur ; (b) point visible et périodes

Définition :

- On appelle *point visible* un point de coordonnées (x,y) telles que $\text{pgcd}(x,y) = 1$ (avec la convention $\text{pgcd}(0,a) = a$).
- Le poids affecté à un point du masque est nommé *pondération locale*.
- Un point v du masque engendre par translation les valeurs $2v, 3v, \dots$

Dans l'exemple de la figure 4.b, $v(2,1)$ est un point visible, mais pas $2v, 3v, \dots$, suite de points que nous appellerons *périodes*. Un masque ne sera donc constitué que de points visibles, car une pondération locale placée sur la période d'une autre alourdirait inutilement l'extraction des MIN dans l'algorithme du § 2.1.

On note a, b, c, \dots les points visibles du masque, dans l'ordre croissant de leur distance euclidienne par rapport au centre x . Cela ne correspond pas à un parcours lignes/colonnes du masque, comme on le constate pour l et k sur la figure 5.

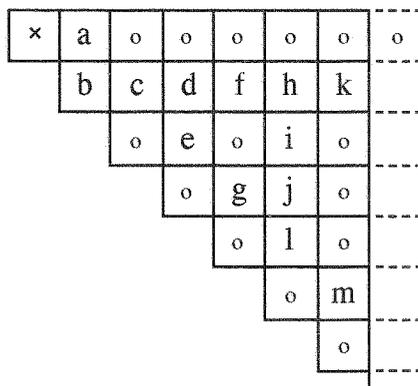


Figure 5. Points visibles

Voici maintenant la structure générale d'un masque de chanfrein :

Définition : Le générateur d'un masque de chanfrein est tel que

- (1) il possède au moins les points a et b ;
- (2) il ne comporte que des points visibles ;
- (3) ses pondérations locales vérifient certaines inégalités.

Remarques :

- Cette définition exclut volontairement d_4 , dont le générateur du masque ne possède qu'un seul point, ce qui ne remplit pas (1).

- Les conditions fixées en (3) font respecter les inégalités triangulaires, le théorème de la projection entre les points du masque et la séparabilité, de telle sorte qu'un masque de chanfrein induise bien une métrique discrète.

Par exemple, dans un masque de taille $3*3$, les contraintes sont $2.a \geq b \geq a > 0$. Pour une taille $5*5$ on doit avoir $3.a \geq c \geq 2.a$, $4.c \geq 6.b \geq 3.c$, $a > 0$ et $c > b$.

Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour tous les voisinages au § 3.3 avec le théorème 3.

On note "chanfrein a-b-c-.." un tel masque, en remplaçant a,b,c,.. par leur valeur, ou par "o" si le point correspondant n'est pas affecté.

En effet, on est libre de ne pas pondérer certains points visibles parmi c,d,e,.., tout en conservant la validité de la définition du chanfrein. Ces choix éventuels vont conférer certaines propriétés à la distance discrète ainsi obtenue, propriétés que l'on étudie dans la suite.

Nous allons aussi montrer que ces distances sont des combinaisons linéaires de d_4 et d_8 (par exemple $d_{3-4} = 2.d_8 + d_4$ [ARC 87]) et que ces combinaisons *dépendent du cône d'influence* où l'on se trouve.

2.3. Boule de chanfrein

On peut obtenir une boule de rayon R pour un masque donné en appliquant l'algorithme donné en 2.1 de calcul des distances au fond, sur une image de taille infinie où chaque point est à 1, sauf le centre qui est à 0 ; la boule est alors l'ensemble des points de valeur inférieure ou égale à $R*a+r$, où r appartient à $[0,a-1]$.

Pour un rayon R fixé il y a donc une *famille* de a boules, en faisant varier r (cf. figure 6).

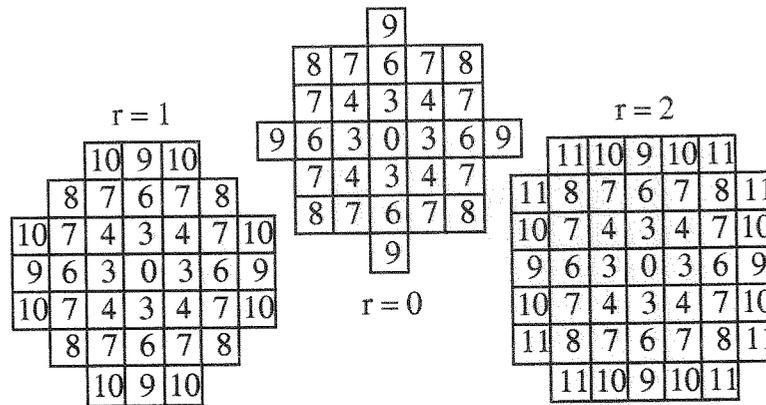


Figure 6. Boules de chanfrein 3-4 avec $R = 3$

L'allure générale de ces boules (cf. figure 7) est un carré pour d_4 et d_8 , un octogone pour chanfrein 3-4, un hexadécagone pour chanfrein 5-7-11, etc. A mesure que l'on enrichit le masque, le nombre de côtés de ces polygones augmente. Nous allons étudier d'où provient ce phénomène.

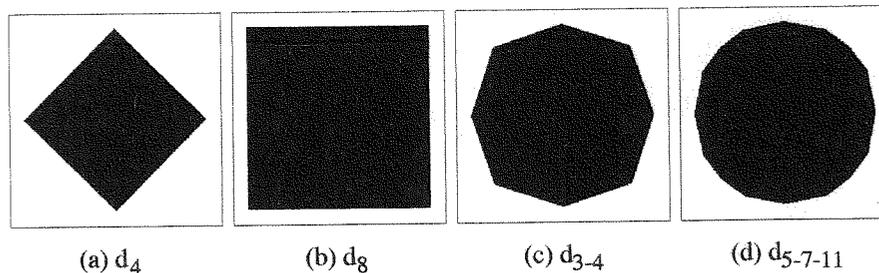


Figure 7. Boules classiques

3. Etude théorique

3.1. Cônes d'influence

On étudie l'algorithme du § 2.1 de calcul des distances, qui donne à un point le *minimum* des valeurs affectées aux points alentour augmentées des pondérations locales. Dans l'exemple ci-après, présenté pour le chanfrein 5-7-11, nous avons noté dans le haut de chaque case la ou les provenances possibles parmi 5, 7 et 11 de ces minimums (cf. figure 8).

Dans le cas général :

On renomme $M_1, M_2, ..$ les n points affectés du générateur d'un masque de chanfrein, en les ordonnant suivant l'ordre croissant de leur angle avec la demi-droite (Ox) . On note $|M_i|$ le poids et $\|M_i\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sachant que pour deux points du premier octant $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$ on a :

$$\angle(Ox, OP) < \angle(Ox, OQ) \Leftrightarrow y_1 \cdot x_2 < y_2 \cdot x_1$$

on obtient pour chanfrein 3-4 : $|M_1| = 3, |M_2| = 4$, noté 3/4.

De même, d'après leur position donnée au § 2.2 :

5-7-11 \rightarrow 5/11/7
 12-17-o-38-43 \rightarrow 12/38/o/43/17
 a-b-c-d-e-f-g-h-i-j-k-l-m \rightarrow a/k/h/f/d/i/c/j/e/l/m/b

Définitions :

- On appelle *cône d'influence* des points M_i/M_{i+1} le cône délimité par les droites séparatrices de pixels (O, M_i) et (O, M_{i+1}) .

- Les *déplacements élémentaires* dx et dy à partir d'un point (x, y) correspondent au coût d'un déplacement de une case ; ainsi $dx = |(x+1, y)| - |(x, y)|$ et $dy = |(x, y+1)| - |(x, y)|$.

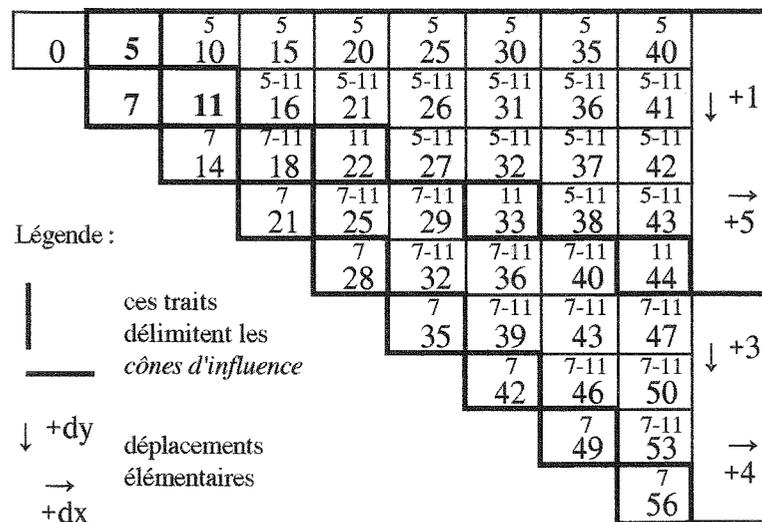


Figure 8. Cônes d'influence de chanfrein 5-7-11

Dans l'exemple de la figure 8 avec chanfrein 5-7-11, les cônes 5/11 et 11/7 sont délimités par des traits gras. Nous allons maintenant présenter des propriétés essentielles des cônes :

Théorème 1 :

Dans un cône d'influence M_i/M_{i+1} , les seuls points du masque à intervenir dans la recherche du minimum pour le calcul des distances à O, sont les distances locales $|M_i|$ et $|M_{i+1}|$:

- $|M_i|$ engendre par translation les valeurs $2|M_i|$, $3|M_i|$, etc ;
- de même pour $|M_{i+1}|$;
- tous les points strictement compris entre les droites séparatrices (O, M_i) et (O, M_{i+1}) , et qui sont au-delà du parallélogramme $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$, sont obtenues par M_i ou par M_{i+1} , et ceci de façon équivalente.

Preuve :

- Les déplacements locaux $|M_j|$ du masque engendrent chacun leur période, car dans la condition (3) de la définition du chanfrein, on impose que la valeur d'une période soit inférieure à toutes les autres combinaisons données par le masque, et le calcul des distances prend justement leur minimum.

- Pour montrer le théorème 1 à l'intérieur d'un cône d'influence M_i/M_{i+1} , on commence par considérer le parallélogramme discret $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$, éventuellement d'intérieur vide, comme illustré à la figure 9 :

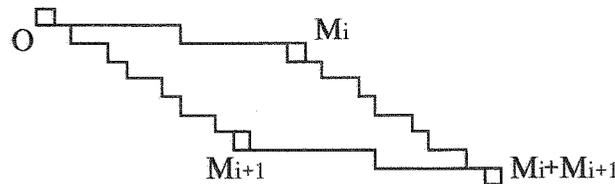


Figure 9. Le parallélogramme discret $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$

Les points intérieurs à ce parallélogramme, s'il y en a, sont déterminés par certains points du masque, mais sans être atteints par M_i ou M_{i+1} ; dans tous les cas, le point M_i+M_{i+1} a bien la valeur $|M_i+M_{i+1}|$ comme minimum.

A partir de là, on translate le parallélogramme et les valeurs de son adhérence (l'intérieur plus les points bords, qui sont ici les sommets) dans tout le cône M_i/M_{i+1} : pour calculer le poids en un point P, il suffit de chercher à quel point X du premier parallélogramme il correspond, et de lui ajouter le nombre de déplacements M_i et M_{i+1} nécessaires pour l'atteindre ; donc ce sont bien les distances locales $|M_i|$ et $|M_{i+1}|$ qui interviennent dans le cône.

En notant $A = P - M_{i+1}$ et $B = P - M_i$ (cf. figure 10), on a bien A et B sur le grand parallélogramme qui mène à X ; A et B sont deux points du cône d'influence, et la valeur P est donc bien obtenue par M_i ou par M_{i+1} (de façon similaire) dans la

recherche du minimum local, depuis A comme depuis B (ceci est à rapprocher des travaux de [MON 68] dans les réseaux).

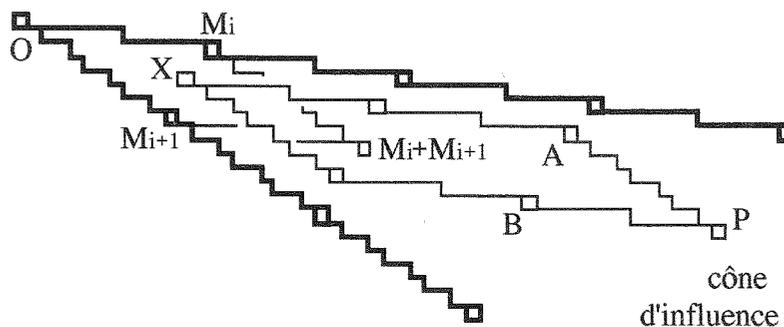


Figure 10. P provient de A comme de B

3.2. Déplacements élémentaires

Définition :

Les points M_i et M_{i+1} sont dits *consécutifs* s'il n'existe pas de point visible P du premier octant tel que :

$$\begin{cases} \|P\| < \max (\|M_i\|, \|M_{i+1}\|) \\ \angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OP) < \angle(Ox, OM_{i+1}) \end{cases}$$

Si tous les points affectés sont consécutifs, alors le masque est dit *régulier*.

Exemples :

- Dans chanfrein 5-7-11, tous les points sont consécutifs ; ce masque est *régulier*.
- Dans chanfrein 12-17-0-38-43, l'ordre croissant par angles est 12/38/0/43/17 ; les points 12/38 et 43/17 sont consécutifs mais pas 38/43, car le point c n'a pas été affecté.

Nous allons donner maintenant la loi générale de calcul des déplacements élémentaires, dans un cône d'influence M_i/M_{i+1} , avec les notations de la figure 11.

Théorème 2 :

Si les points M_i/M_{i+1} sont *consécutifs*, alors

(a) les déplacements élémentaires dx et dy sont constants dans tout l'intérieur du cône d'influence.

(b) leurs pondérations sont données par :

$$\begin{aligned} dx &:= y_{i+1} \cdot |M_j| - y_i \cdot |M_{i+1}| \\ dy &:= x_j \cdot |M_{i+1}| - x_{i+1} \cdot |M_j| \end{aligned}$$

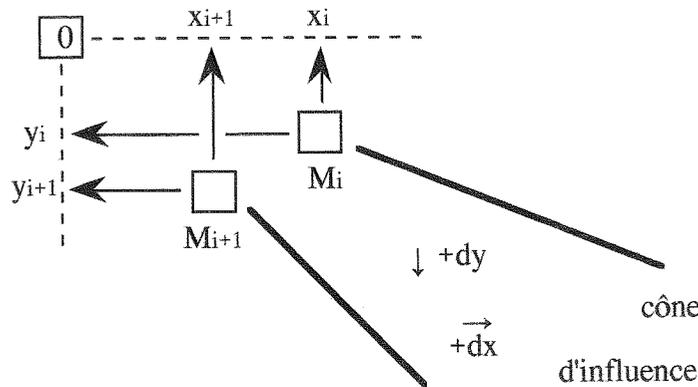


Figure 11. Notations du théorème 2

Démonstration du théorème 2 :

- Pour montrer (a) nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1: Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) Les points visibles M_i/M_{i+1} sont consécutifs.
- (2) Le parallélogramme discret $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$ est d'intérieur vide.

Preuve du lemme 1:

On a le système logique suivant :

le parallélogramme discret $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$ n'est pas d'intérieur vide

- \Leftrightarrow le triangle (O, M_i, M_{i+1}) n'est pas d'intérieur vide
- $\Leftrightarrow \exists P$ tel que $\|P\| < \max(\|M_i\|, \|M_{i+1}\|)$
et $\angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OP) < \angle(Ox, OM_{i+1})$
- $\Leftrightarrow M_i/M_{i+1}$ sont non consécutifs.

Retour à la démonstration de (a) :

D'après le théorème 1, toutes les valeurs P à l'intérieur du cône M_i/M_{i+1} , privé du parallélogramme $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$ sont égales à des combinaisons linéaires de M_i et M_{i+1} , plus un point X du parallélogramme (cf. figure 10) ; i.e. $P = X + u \cdot M_i + v \cdot M_{i+1}$.

Or ici M_i et M_{i+1} sont consécutifs, d'où d'après le lemme 1, le parallélogramme est d'intérieur vide.

Donc X est égal à un des sommets du parallélogramme, d'où $P = u' \cdot M_i + v' \cdot M_{i+1}$.

Autrement dit, tous les points de l'intérieur du cône sont atteints par une combinaison linéaire de M_i et M_{i+1} , et donc les différences entre deux points l'un au-dessus de l'autre, ou l'un à côté de l'autre, sont *indépendantes de leur position*, ce qui prouve (a).

Preuve du (b) : nous allons utiliser une propriété arithmétique des M_i :

Lemme 2 : Soit M_n l'ensemble des points visibles consécutifs $M_i(x_i, y_i)$ tels que $x_i \leq n$. Alors les y_i/x_i forment une suite de Farey F_n d'ordre n [H&W, III.3.1] [MON 68].

En effet, les suites de Farey F_n sont les séries *croissantes* de fractions irréductibles entre 0 et 1, dont les dénominateurs n'excèdent pas n .

Autrement dit, $(h/k \in F_n) \Leftrightarrow (0 \leq h \leq k \leq n, \text{pgcd}(h,k) = 1)$.

Soit $M_i(x_i, y_i)$ et $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ 2 points visibles tels que $x_i \leq n$ et $x_{i+1} \leq n$.

$\Leftrightarrow \text{pgcd}(x_i, y_i) = \text{pgcd}(x_{i+1}, y_{i+1}) = 1, x_i \leq n, x_{i+1} \leq n$

$\Leftrightarrow y_i/x_i$ et y_{i+1}/x_{i+1} sont 2 termes de F_n .

Ordonnons M_i et M_{i+1} dans l'ordre croissant de leur angle par rapport à (Ox) .

On a : $\angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OM_{i+1}) \Leftrightarrow y_i \cdot x_{i+1} < y_{i+1} \cdot x_i \Leftrightarrow y_i/x_i < y_{i+1}/x_{i+1}$

L'ensemble des points visibles $M_i(x_i, y_i)$ tels que $x_i \leq n$ est donc en bijection avec tous les termes y_i/x_i de la suite de Farey F_n , et cette bijection conserve l'ordre, d'où le lemme 2.

Construction de F_n : F_1 est $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

Propriété : si $\frac{h}{k} < \frac{h'}{k'}$ alors $\frac{h}{k} < \frac{h+h'}{k+k'} < \frac{h'}{k'}$ et $\frac{h+h'}{k+k'} \in F_n$ si $k+k' \leq n$.

[H&W, th.30]

donc F_2 : $\frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$

F_3 : $\frac{0}{1} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1}$

F_4 : $\frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1}$

F_5 : $\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$

Ainsi F_5 correspond bien aux points du masque notés $a/h/f/d/i/c/j/e/g/l/b$ présentés en figure 5.

Retour à la démonstration du théorème 2 :

Pour calculer dx et dy, il faut trouver des couples (s,t) et (u,v) tels que :

$$\begin{cases} s \cdot x_i + t \cdot x_{i+1} = 1 \\ u \cdot y_i + v \cdot y_{i+1} = 1 \end{cases}$$

pour des déplacements de 1 dans le sens (Ox) ou (Oy).

Or d'après le lemme 2, y_i/x_i et y_{i+1}/x_{i+1} sont deux termes successifs d'une suite de Farey, donc d'après le théorème 28 de [H&W], on a toujours

$$x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1} = 1.$$

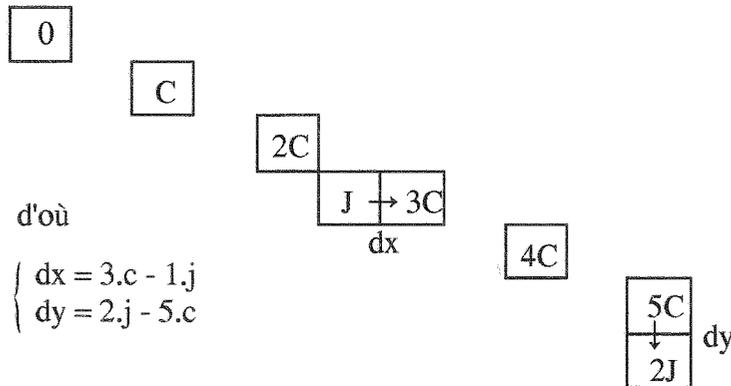
$$\text{d'où } \begin{cases} y_{i+1} \cdot x_i - y_i \cdot x_{i+1} = 1 \\ -x_{i+1} \cdot y_i + x_i \cdot y_{i+1} = 1 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} s = y_{i+1}, t = -y_i \\ u = -x_{i+1}, v = x_i \end{cases}$$

Finalement, il vient

$$\begin{cases} dx = s \cdot |M_i| + t \cdot |M_{i+1}| = y_{i+1} \cdot |M_i| - y_i \cdot |M_{i+1}| \\ dy = u \cdot |M_i| + v \cdot |M_{i+1}| = -x_{i+1} \cdot |M_i| + x_i \cdot |M_{i+1}| \end{cases}$$

Illustration :

Pour les deux points visibles consécutifs c(2,1) et j(5,3), on a bien $3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1$



Corollaire du théorème 2 :

Dans le cône d'influence de deux points consécutifs, les *intervalles de niveaux* $[n, a, n]$ sont des *droites *-connexes* (i.e. 4-connexes par endroits, ou 8-connexes par endroits).

Ceci explique la caractéristique déjà remarquée à propos des boules de chanfrein : ce sont des polygones 8-symétriques, dont chaque côté est porté par un cône d'influence. Pour un masque de chanfrein dont le générateur a n points, la boule est un polygone à $8 \cdot (n-1)$ côtés.

3.3. Contraintes exactes sur les pondérations locales

Reprenons l'exemple de la figure 8 pour chanfrein 5-7-11 avec les formules du théorème 2 :

$$\bullet \text{ cône } 5/11 \left\{ \begin{array}{l} dx := 1*5 - 0*11 = 5 \\ dy := 1*11 - 2*5 = 1 \end{array} \right.$$

$$\bullet \text{ cône } 11/7 \left\{ \begin{array}{l} dx := 1*11 - 1*7 = 4 \\ dy := 2*7 - 1*11 = 3 \end{array} \right.$$

Sachant que pour d_4 on a $(dx = 1, dy = 1)$ et pour d_8 on a $(dx = 1, dy = 0)$, on peut écrire d_{5-7-11} en une combinaison linéaire $u.d_4 + v.d_8$ pour chacun des cônes, où $u = dy$ et $v = dx - dy$:

- dans 5/11, $dx = 5$ et $dy = 1$, d'où $u = 1$ et $v = 4$, et $d_{5-7-11} = d_4 + 4.d_8$.
- dans 11/7, $dx = 4$ et $dy = 3$, d'où $u = 3$ et $v = 1$, et $d_{5-7-11} = 3.d_4 + d_8$.

Remarque : on retrouve de cette façon $d_{3-4} = d_4 + 2.d_8$ dans tout le plan [ARC 87]. En effet, il n'y a qu'un cône (3-4) égal au premier octant, avec $dx = 1.3 - 0.4 = 3$, $dy = 1.4 - 1.3 = 1$, d'où $u = dy = 1$ et $v = dx - dy = 2$.

Théorème 3 :

Un masque de chanfrein induit une distance si et seulement si, pour chaque cône d'influence de son masque, les déplacements élémentaires correspondants dx et dy , calculés à partir du théorème 2, respectent l'inégalité $dx \geq dy \geq 0$, et $dx > 0$.

Étudions les valeurs de u et v pour lesquelles $u.d_4 + v.d_8$ respecte l'inégalité triangulaire et la séparabilité.

Pour deux points quelconques p et q , on pose $X = |x_p - x_q|$ et $Y = |y_p - y_q|$; ainsi $d_4(p,q) = X + Y$ et $d_8(p,q) = \min(X,Y)$.

D'où $u.d_4 + v.d_8 = u.X + u.Y + v.\min(X,Y)$.

SI $u \geq 0, v \geq 0$ et $(u,v) \neq (0,0)$, il n'y a pas de problème : $u.d_4 + v.d_8$ est une fonction de distance.

Si $u.v < 0$, nous devons distinguer deux cas pour la séparabilité, dont il résulte que $u \geq 0$ et $u+v \geq 0$. Pour le respect de l'inégalité triangulaire, il y a en tout huit cas, qui impliquent $u \geq 0$ et $v \geq 0$.

Conclusion : $u.d_4 + v.d_8$ est une distance si et seulement si $u \geq 0, v \geq 0$ et $(u,v) \neq (0,0)$.

Démonstration du théorème 3 : nous avons vu dans l'exemple précédent que dans un cône dont les déplacements élémentaires sont dx, dy , on a $d_C = dy.d_4 + (dx-dy).d_8$.

Or $u.d_4+v.d_8$ est une distance si et seulement si $u \geq 0, v \geq 0$ et $(u,v) \neq (0,0)$, d'où le résultat.

On souligne la possibilité de déterminer directement les contraintes sur les pondérations affectées d'un masque, à partir des théorèmes 2 et 3 :

- $dx \geq dy \Leftrightarrow |M_i| \cdot (x_{i+1}+y_{i+1}) \geq |M_{i+1}| \cdot (x_i+y_i)$
- $dy \geq 0 \Leftrightarrow x_i \cdot |M_{i+1}| \geq x_{i+1} \cdot |M_i|$
- $dx > 0 \Leftrightarrow y_{i+1} \cdot |M_i| > y_i \cdot |M_{i+1}|$

Les deux premières conditions peuvent se résumer par la double inégalité :
 $|M_i| \cdot x_i \cdot (x_{i+1}+y_{i+1}) \geq |M_{i+1}| \cdot x_i \cdot (x_i+y_i) \geq |M_i| \cdot x_{i+1} \cdot (x_i+y_i)$

Or $x_i \cdot (x_{i+1}+y_{i+1}) - x_{i+1} \cdot (x_i+y_i) = x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i = 1$ car M_i et M_{i+1} sont consécutifs. On peut donc écrire :

$$|M_i| \cdot (m+1) \geq |M_{i+1}| \cdot x_i \cdot (x_i+y_i) \geq |M_i| \cdot m, \text{ où } m = x_{i+1} \cdot (x_i+y_i).$$

Application dans un voisinage $7*7$. On classe les 5 points visibles a-b-c-d-e dans l'ordre croissant de leur angle par rapport à (Ox), et on obtient :

nom	M_i	x_i	y_i	x_i+y_i
a	M_1	1	0	1
d	M_2	3	1	4
c	M_3	2	1	3
e	M_4	3	2	5
b	M_5	1	1	2

D'après le théorème 3, un masque a-b-c-d-e n'induirait une distance que lorsque les inégalités suivantes seront respectées :

$$\begin{array}{ll}
 4.a \geq d \geq 3.a & a > 0 \\
 9.d \geq 12.c \geq 8.d & d > c \\
 10.c \geq 6.e \geq 9.c & 2.c > e \\
 6.e \geq 15.b \geq 5.e & e > 2.b
 \end{array}$$

En suivant cette démarche, il est aisé de vérifier que tous les chanfreins dont il est question dans l'article sont des distances.

Avant d'aborder le calcul et l'optimisation d'un masque à n points, nous devons encore étudier le cas où M_i et M_{i+1} ne sont pas consécutifs. Les différents cas de

figures que l'on peut imaginer sont très nombreux et font l'objet de recherches ; nous avons constaté que les dx, dy, qui ne sont plus uniques dans le cône, ont des valeurs périodiques, et que les intervalles de niveaux [n-a-t,n] sont des droites épaisses, mais cependant proches d'une droite de Bresenham (un exemple sera étudié au § 5.1).

4. Calcul d'un masque de chanfrein

Le principe de calcul des pondérations pour un voisinage donné est de minimiser l'erreur commise par rapport à la distance euclidienne.

4.1. Première approche

Pour des masques de chanfrein à deux points a et b, l'idée la plus intuitive consiste à approximer $\sqrt{2}$ avec b/a, par exemple avec les fractions continues :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

En initialisant par a := 1 et b := 2 et en bouclant sur b' := 2a+b, a' := a+b, on obtient la série :

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{24}{17}, \frac{58}{41}, \frac{140}{99}, \frac{338}{239}, \frac{816}{577}$$

qui converge très vite vers $\sqrt{2}$, mais dont les termes deviennent aussi très grands.

Or en pratique nous travaillons sur des images 512*512 codées sur 16 bits (0..65535). Un objet dans cet image ne pourra avoir une épaisseur supérieure à 512/2 = 256, et donc la première pondération devra impérativement être inférieure à 65535/256.

Les valeurs de a que l'on s'autorise seront donc comprises entre 2 et 255.

Remarques :

pour a = 3 (avec chanfrein 3-4), un objet de taille maximale dans l'image 512*512, c'est-à-dire d'épaisseur 256, devra être codé sur des nombres jusqu'à 3*256 = 768, ce qui interdit un codage de l'image sur 8 bits. Il en va de même pour des images 256*256 (128*3 > 2⁸).

Pour en revenir aux fractions continues, on dépasse 255 dès le 8^{ème} terme (816/577), et le gain réalisé par 140/99 est paradoxalement négatif par rapport à 4/3, comme nous le verrons ensuite !

Enfin, pour généraliser ce type de méthode à des masques à plus de deux points il faudrait approcher simultanément $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, etc, ce qui n'est pas possible.

4.2. La solution de G. Borgefors

G. Borgefors propose une approche qui consiste à minimiser le maximum de l'erreur commise sur une droite verticale (le support de l'image étant rectangulaire) [BOR 84]. Dans un premier temps, elle cherche à ce que la distance d_p calculée en un point soit la plus proche possible de la distance euclidienne d_E , en autorisant des résultats en réels.

Par exemple dans un masque 3*3, elle minimise l'erreur pour un point $Q(x,y)$:

$$E_p(Q) = d_p(Q) - d_E(Q) = y.b + (x-y).a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dans ce cas, la recherche de la valeur optimale b pour $a=1$ est donnée par :

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 1,35070.$$

On notera que cette valeur n'est pas $\sqrt{2}$, et que $4/3 \approx 1,3333$ l'approche bien mieux que $140/99 \approx 1,4141$, qui est un autre terme de la suite des fractions continues. De là, elle cherche une approximation fractionnaire de 1,35070, en faisant un compromis entre la précision souhaitée et la taille des nombres a, b .

En supprimant la contrainte $a = 1$, elle obtient une minimisation dans \mathbb{R} plus fine avec $a \approx 0,95509$ et $b \approx 1,36930$ [BOR 86], où $b/a \approx 1,43368$. Mais $4/3$ est encore conseillé car le facteur d'échelle n'est pas trop grand.

Le même raisonnement a été appliqué pour des voisinages 5*5 et 7*7, où des pondérations supplémentaires (c,d,e) sont ajoutées, pour obtenir chanfrein 5-7-11 et chanfrein 14-20-31-44.

Mais les formules à minimiser rendent très vite la méthode lourde (résolution d'équations), et ne permettent pas en pratique de dépasser un voisinage 7*7.

4.3. Méthode proposée

Nous proposons ici une autre classe de méthodes qui, tout en nous redonnant les classiques chanfreins 3-4 et 5-7-11 nous permet, comme nous le verrons au § 5, de calculer des masques beaucoup plus larges ; et fournit même, dans le cas 7*7, un

chanfrein plus performant que celui de G. Borgefors (le chanfrein 14-20-31-44), suivant le critère qu'elle a elle-même proposé !

Les boules de chanfrein étant des polygones, notre idée est d'approximer le cercle euclidien par des polygones les plus réguliers possible. Cela implique de bien répartir les angles, et de respecter la longueur des rayons.

Comme nous l'avons vu au § 2, ce sont les cônes d'influence M_i/M_{i+1} des points du masque qui portent les côtés du polygone, donc le choix des M_i parmi les points visibles intervient directement dans la répartition des angles (cf. figure 12).

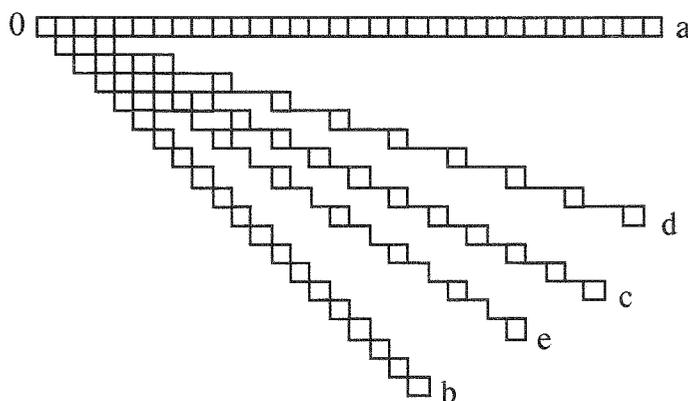


Figure 12. Exemple de la répartition des angles

On construit un masque de chanfrein dans un voisinage de taille donnée $(2n+1)*(2n+1)$ en deux étapes :

Première étape. On commence par considérer l'ensemble M_n des points visibles affectés dans le premier octant. Pour une valeur a quelconque, les autres points $M_i (x_i, y_i)$ devront prendre la valeur $|M_i| = [a*\sqrt{x_i^2 + y_i^2}]$. Il faut donc trouver un a tel que la partie tronquée $|M_i| - a*\sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \text{Frac}(a*\sqrt{x_i^2 + y_i^2})$ soit la plus petite possible pour chaque coefficient M_i du masque.

Autrement dit, on doit minimiser le maximum de l'erreur commise entre le poids donné à chaque point, et sa distance euclidienne au centre :

Pour chaque a de 2 à 255, on calcule la valeur E_a , qui est le maximum des erreurs des M_i pour ce a .

On classe ensuite les E_a par ordre croissant, de telle sorte que les a intéressants soient en tête de liste.

Seconde étape. La seconde étape s'opère par un choix entre les différents masques proposés en tête de la liste, en fonction des critères suivants :

- On veut respecter un certain ordre de grandeur entre a et n . C'est par ce critère que l'on retrouvera 3-4 et 5-7-11.

- Pour des voisinages plus grands (à partir de $7*7$), on s'autorise à supprimer certains points (notés "out"), si leur absence profite à l'allure générale du polygone ; parfois en raison d'une partie fractionnaire de $a*\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ qui est trop importante, mais le plus souvent parce que l'angle que génère ce point est mal conditionné, ce qui fait que les angles n'ont pas la même importance (un exemple illustre cela au § 5.1).

Exemple dans un voisinage $7*7$, avec $a = 14$:

nom	coord.	d_E	trunc	frac	
a	(1,0)	a	14	0	
b	(1,1)	$a*\sqrt{2}$	20	-0,201	
c	(2,1)	$a*\sqrt{5}$	31	0,305	← E_{14}
d	(3,1)	$a*\sqrt{10}$	44	0,272	
e	(3,2)	$a*\sqrt{13}$	50	0,478	← out

(M_1)

C'est dans l'optique d'une simple minimisation dans \mathbb{R}^2 que G.Borgefors a supprimé le point e, dont l'erreur (0,478) a été jugée trop importante. Notons que sa méthode s'attache avant tout à minimiser des erreurs dans l'espace *continu* \mathbb{R}^2 , ce qui ne correspond pas forcément à la minimisation des erreurs dans l'espace *discret* \mathbb{Z}^2 . C'est pour cela que nous nous plaçons *directement* dans \mathbb{Z}^2 , afin de minimiser les erreurs *effectives*.

Notre approche insiste également sur la *répartition des angles*. Dans le paragraphe suivant, nous allons voir sur un cas précis que ce critère peut effectivement être prépondérant.

5. Nouveaux chanfreins

5.1 Optimisation d'un masque $7*7$

La première étape du § 4.3 nous donne en bonne position $a = 12$, avec $E_{12} = 0,267$:

nom	coord.	d_E	trunc	frac	
a	(1,0)	a	12	0	
b	(1,1)	$a\sqrt{2}$	17	-0,029	
c	(2,1)	$a\sqrt{5}$	27	-0,167	
d	(3,1)	$a\sqrt{10}$	38	-0,053	
e	(3,2)	$a\sqrt{13}$	43	0,267	$\leftarrow E_{12}$

Le masque s'écrit donc :

0	12		
	17	27	38
			43

On calcule les déplacements élémentaires dans les cônes d'influence avec le théorème 2 :

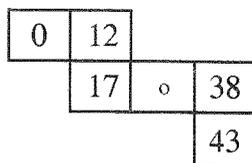
$$\begin{array}{l}
 \bullet \text{ cône } 12/38 \left\{ \begin{array}{l} dx := 1*12 - 0*38 = 12 \\ dy := 1*38 - 3*12 = 2 \end{array} \right. \quad \bullet \text{ cône } 38/27 \left\{ \begin{array}{l} dx := 1*38 - 1*27 = 11 \\ dy := 3*27 - 2*38 = 5 \end{array} \right. \\
 \bullet \text{ cône } 27/43 \left\{ \begin{array}{l} dx := 2*27 - 1*43 = 11 \\ dy := 2*43 - 3*27 = 5 \end{array} \right. \quad \bullet \text{ cône } 43/17 \left\{ \begin{array}{l} dx := 1*43 - 2*17 = 9 \\ dy := 3*17 - 1*43 = 8 \end{array} \right.
 \end{array}$$

On a vu au § 3.2 que les intervalles de niveaux sont des droites discrètes (d'épaisseur proche de 1) sur chaque cône. Or on remarque que les déplacements locaux dx et dy sont ici les mêmes ($dx=11$, $dy=5$) dans $38/27$ et $27/43$.

Cela fait que les deux côtés du polygone, correspondant à ces deux cônes, seront portés par la même droite ; de ce point de vue, le point $c = 27$ n'apporte donc rien au polygone.

Sur le plan de la répartition des angles, on voit sur la figure précédente que $\angle(Oa,Od) \approx \angle(Od,Oe) \approx \angle(Oe,Ob)$ tandis que $\angle(Od,Oc) \approx \angle(Oc,Oe)$; ainsi la suppression du point c est judicieuse également suivant ce critère.

C'est en conclusion par ces deux critères, conformes à l'esprit de la méthode du § 4.3, que nous supprimons le point c ; dans un voisinage $7*7$, le masque de chanfrein que nous retenons possède 4 points (on notera que ce n'est pas le masque que G. Borgfors a optimisé, selon un autre critère il est vrai, mais pour un voisinage de même taille) :



Sur la figure 13 figurent les boules définies par ces deux chanfreins ; on remarque immédiatement que $d_{12..}$ a une boule plus régulière que $d_{14..}$, qui semble biseautée à 45° :

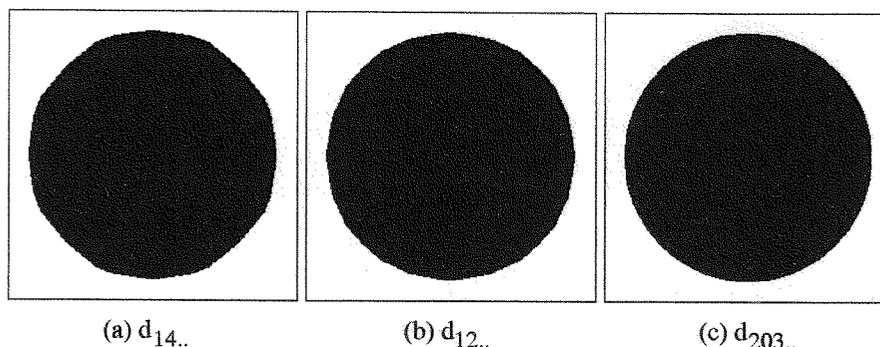


Figure 13. Boules dans de grands voisinages

Mais cette simple appréciation visuelle ne suffit pas. Notre masque étant déjà le meilleur pour notre critère exposé au § 4.3, nous allons opérer une comparaison avec cette fois les critères proposés par G.Borgefors, à savoir comparer les erreurs sur une droite bordant le support image. On commence par observer les deux boules en gros plan sur la figure 14.

Quelques remarques :

- *Intervalles de niveaux* : ceux-ci sont tantôt 4-connexes, tantôt 8-connexes, ce qui nous éloigne des propriétés bien arrêtées des courbes de niveau de d_4 , d_8 et d_0 [ARC 87].

- *Déplacements élémentaires* : lors de la suppression du point c dans le masque $d_{12..}$, on avait implicitement supposé que l'arête du polygone dans le cône résultant 38/43 garderait la même pente. Du point de vue théorique, les points 38 et 43 ne sont pas consécutifs, donc sur les bases énoncées à la fin du § 3.3, les dx, dy ne sont plus constants, mais de valeurs périodiques.

Dans l'étude de cet exemple, on voit que

- les dy sont constants, de valeur 5 ; cela est dû au fait que $x_{38} = x_{43}$: il n'y a pas d'incidence pour dy dans la formule du théorème 2.

• les dx ont une période de 3 (qui est l'abscisse commune de 38 et 43), et prennent les valeurs 12, 12, 9 ; on vérifie immédiatement que $(12+12+9)/3 = 11$.

Donc on retrouve en moyenne les valeurs espérées : $dx = 11$ et $dy = 5$.

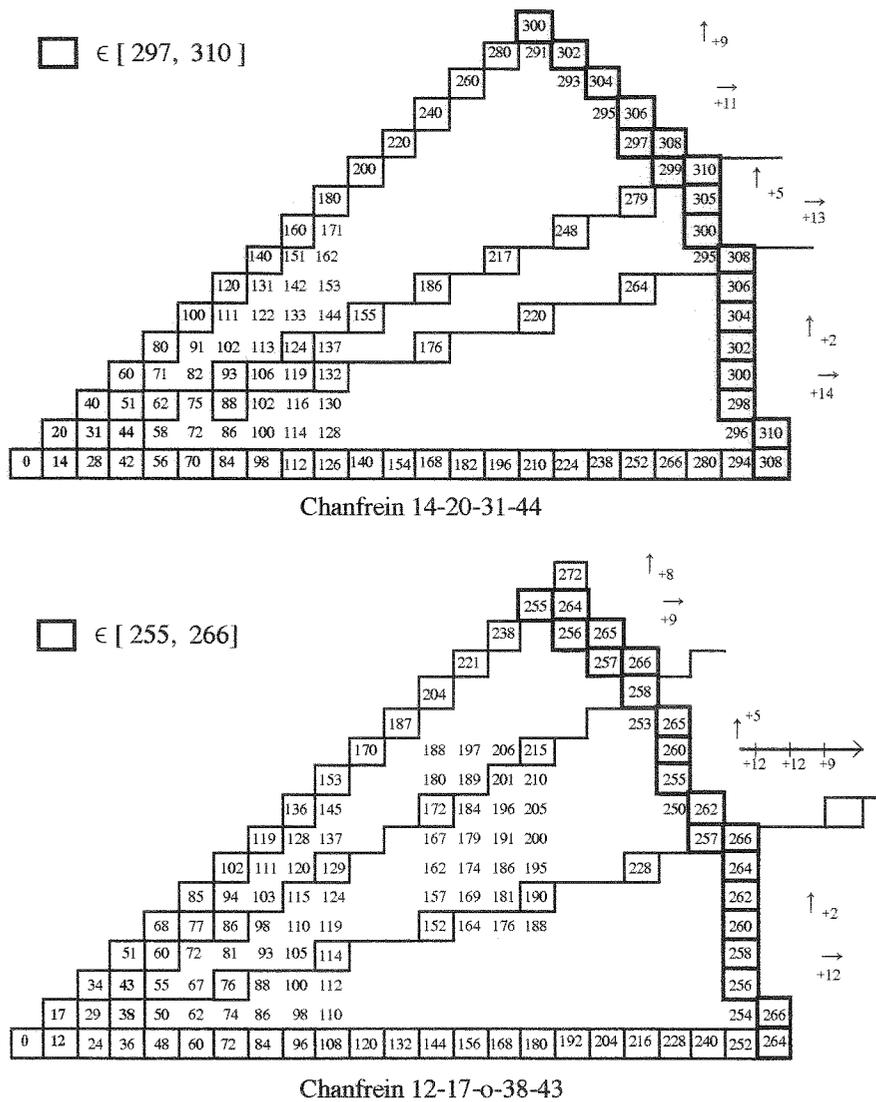


Figure 14. *Vue macroscopique des deux boules*

- On illustre le *phénomène de cycle* 12-12-9 pour dx en détaillant le voisinage d'une période de 38 sur la figure 15.

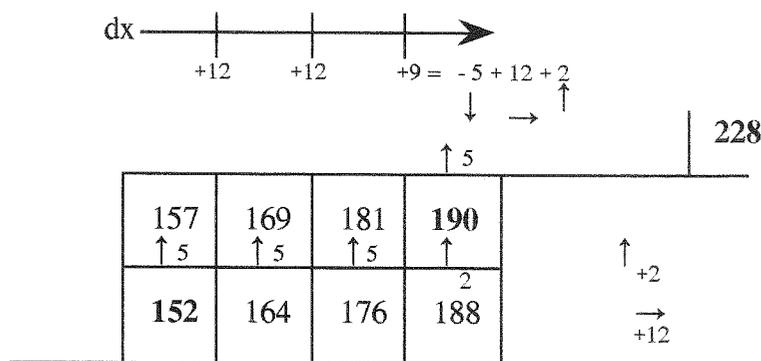


Figure 15. *Le phénomène de cycle*

On en vient maintenant à la comparaison des erreurs sur une droite verticale.

Dans les tableaux de la figure 16 nous indiquons pour y de 0 à 60 :

- le cône d'influence
- l'ordonnée relative y_T à la période inférieure du cône
- la valeur générée par la métrique de chanfrein, notée d_C
- la distance euclidienne d_E au centre
- le taux d'erreur d_C/d_E sur la droite verticale $x = 60$

Pour diverses raisons, nous avons choisi de tester la droite $x=60$. Cette valeur est d'un ordre de grandeur à la fois réaliste et significatif, car les écarts sont proportionnels, et ainsi l'erreur que l'on va calculer ne change pas. Elle a aussi la propriété utile d'être située sur l'abscisse d'une période de chacun des points affectés des deux masques. Cela nous permet de générer très facilement les valeurs de la distance de chanfrein le long de la droite, connaissant les déplacements élémentaires dy pour chaque cône.

Maximum de l'erreur : $d_{14..}$: 1,52% $d_{12..}$: 1,38%

Ecart total : $d_{14..}$: 2,49% $d_{12..}$: 2,00%

Donc $d_{12..}$ minimise mieux le maximum de l'erreur sur une droite que $d_{14..}$.

On remarque enfin que les extréma sont mieux placés sur $d_{12..}$ que sur $d_{14..}$, le maximum de l'erreur se localisant pour cette dernière au milieu de l'arête du 3^{ème} cône : cela explique l'allure aplatie du polygone de $d_{14..}$ aux directions à 45°.

cône	y_r	d_c	d_E	d_c/d_E		cône	y_r	d_c	d_E	d_c/d_E		
14	0	840	840.000	1.0000		12	0	720	720.000	1.0000		
	1	842	840.117	1.0022			1	722	720.100	1.0026		
	2	844	840.467	1.0042			2	724	720.400	1.0050		
	3	846	841.049	1.0059			3	726	720.899	1.0071		
	4	848	841.865	1.0073			4	728	721.598	1.0089		
	5	850	842.912	1.0084			5	730	722.496	1.0104		
	6	852	844.190	1.0093			6	732	723.591	1.0116		
	7	854	845.697	1.0098			7	734	724.883	1.0126		
	8	856	847.434	1.0101			8	736	726.372	1.0133		
	9	858	849.397	1.0101			9	738	728.055	1.0137		
	10	860	851.587	1.0099			10	740	729.932	1.0138	sup	
	11	862	854.000	1.0094			11	742	732.000	1.0137		
	12	864	856.635	1.0086			12	744	734.259	1.0133		
	13	866	859.491	1.0076			13	746	736.706	1.0126		
	14	868	862.564	1.0063			14	748	739.340	1.0117		
	15	870	865.852	1.0048			15	750	742.159	1.0106		
	16	872	869.354	1.0030			16	752	745.160	1.0092		
	17	874	873.066	1.0011			17	754	748.342	1.0076		
	18	876	876.986	0.9989			18	756	751.702	1.0057		
	19	878	881.111	0.9965			19	758	755.238	1.0037		
44	20	880	885.438	0.9939		38	20	760	758.947	1.0014		
	1	885	889.964	0.9944			1	765	762.826	1.0028		
	2	890	894.687	0.9948			2	770	766.874	1.0041		
	3	895	899.602	0.9949			3	775	771.088	1.0051		
	4	900	904.708	0.9948			4	780	775.464	1.0058		
	5	905	910.000	0.9945			5	785	780.000	1.0064		
	6	910	915.476	0.9940			6	790	784.694	1.0068		
	7	915	921.132	0.9933			7	795	789.542	1.0069		
	8	920	926.965	0.9925			8	800	794.541	1.0069		
	9	925	932.972	0.9915			9	805	799.690	1.0066		
31	10	930	939.149	0.9903	inf		10	810	804.984	1.0062		
	1	939	945.492	0.9931			11	815	810.422	1.0056		
	2	948	952.000	0.9958			12	820	816.000	1.0049		
	3	957	958.668	0.9983			13	825	821.715	1.0040		
	4	966	965.493	1.0005			14	830	827.565	1.0029		
	5	975	972.471	1.0026			15	835	833.547	1.0017		
	6	984	979.600	1.0045			16	840	839.657	1.0004		
	7	993	986.876	1.0062			17	845	845.894	0.9989		
	8	1002	994.296	1.0077			18	850	852.253	0.9974		
	9	1011	1001.856	1.0091			19	855	858.734	0.9957		
	10	1020	1009.554	1.0103			20	860	865.332	0.9938	inf	
	11	1029	1017.387	1.0114			1	868	872.046	0.9954		
	12	1038	1025.351	1.0123			2	876	878.872	0.9967		
	13	1047	1033.443	1.0131			3	884	885.808	0.9980		
	14	1056	1041.660	1.0138			4	892	892.852	0.9990		
	15	1065	1050.000	1.0143			5	900	900.000	1.0000		
	16	1074	1058.459	1.0147			6	908	907.251	1.0008		
	17	1083	1067.035	1.0150			7	916	914.602	1.0015		
	18	1092	1075.725	1.0151			8	924	922.050	1.0021		
	19	1101	1084.526	1.0152	sup		9	932	929.593	1.0026		
	20	1110	1093.435	1.0151			10	940	937.230	1.0030		
	21	1119	1102.450	1.0150			11	948	944.957	1.0032		
	22	1128	1111.568	1.0148			12	956	952.773	1.0034		
	23	1137	1120.787	1.0145			13	964	960.675	1.0035		
	24	1146	1130.104	1.0141			14	972	968.661	1.0034		
	25	1155	1139.517	1.0136			15	980	976.729	1.0033		
	26	1164	1149.024	1.0130			16	988	984.878	1.0032		
	27	1173	1158.622	1.0124			17	996	993.104	1.0029		
	28	1182	1168.308	1.0117			18	1004	1001.407	1.0026		
	29	1191	1178.081	1.0110			19	1012	1009.784	1.0022		
20	30	1200	1187.939	1.0102			17	20	1020	1018.234	1.0017	
Chanfrein 14-20-31-44						Chanfrein 12-17-o-38-43						

Figure 16. Tableaux d'erreurs sur la droite $x = 60$

5.2. Exemple de construction d'un grand masque

La difficulté pour mettre au point des grands masques tient au fait qu'il est rare de trouver une valeur a , dans la première étape du § 4.3, qui minimise simultanément toutes les parties fractionnaires. Or dans le cas d'un masque de taille 11×11 , il se trouve que nous avons de la chance : en effet on obtient en tête de liste le coefficient 'magique' $a = 203$, pour qui les parties fractionnaires sont exceptionnellement faibles :

nom	coord.	d_E	trunc	frac	
a	(1,0)	a	203	0	
b	(1,1)	$a \cdot \sqrt{2}$	287	0,085	
c	(2,1)	$a \cdot \sqrt{5}$	454	-0,078	
d	(3,1)	$a \cdot \sqrt{10}$	642	-0,057	
e	(3,2)	$a \cdot \sqrt{13}$	732	-0,073	
f	(4,1)	$a \cdot \sqrt{17}$	837	-0,009	
g	(4,3)	$a \cdot 5$	1015	0	
h	(5,1)	$a \cdot \sqrt{26}$	1035	0,101	
i	(5,2)	$a \cdot \sqrt{29}$	1093	0,188	← E_{203}
j	(5,3)	$a \cdot \sqrt{34}$	1184	-0,317	← out
l	(5,4)	$a \cdot \sqrt{41}$	1300	-0,166	← out

En supprimant les points $j = 1184$ et $l = 1300$, on se ramène à $E_{203} = 0,188$, à comparer avec $E_{12} = 0,267$ et $E_{14} = 0,305$ (pour 4 points).

Ce masque est le chanfrein 203-287-454-642-732-837-1015-1035-1093, et sa boule est un polygone à $8 \cdot (9-1) = 64$ côtés. Le résultat obtenu à la figure 13.c pour un rayon de 110 est une boule quasi-euclidienne.

Il est intéressant de tester ce nouveau masque avec le critère de G. Borgefors. Comme les points j et l que l'on a supprimés sont de module et de poids supérieurs à tous ceux que l'on garde, ce chanfrein est *régulier*. On peut donc calculer très simplement les déplacements élémentaires pour chaque cône d'influence avec le théorème 2. Puis on calcule le maximum de l'erreur commise sur une droite, de façon analogue au § 5.1. Les résultats obtenus sont :

Maximum de l'erreur : 0,48 %

Ecart total : 0,51 %

Ces chiffres montrent l'intérêt d'un masque de cette taille pour la qualité des approximations. Le temps de calcul de la transformation de distance (§ 2.1) étant

linéaire par rapport au nombre de points affectés du masque, celui-ci sera donc huit fois plus long avec $d_{203..}$ qu'avec chanfrein 3-4, mais toujours indépendant de la taille des objets dans l'image. D'autre part $a = 203$ étant inférieur à 255, on a vu au § 4.1 que le stockage de l'image de distance s'effectue bien sur 16 bits, tandis que d_E en consomme 32. Enfin contrairement à d_E plongée dans Z^2 , ce masque induit une distance discrète, ce qui nous laisse envisager des adaptations pour les applications du § 6.

5.3. Compléments

Nous rappelons les principaux résultats du § 5 dans la figure 17, qui montre les courbes pour le critère (de Borgefors) du maximum de l'erreur sur une droite verticale. Cette figure synthétise le tableau de la figure 16, dont l'intérêt est de montrer comment l'on cherche les erreurs effectives dans Z^2 , alors que G. Borgefors raisonne dans \mathbb{R}^2 et ne trouve que des bornes supérieures, éloignées des résultats de la table 1, où la progression de d_4 à $d_{203..}$ est de l'ordre du facteur 100 :

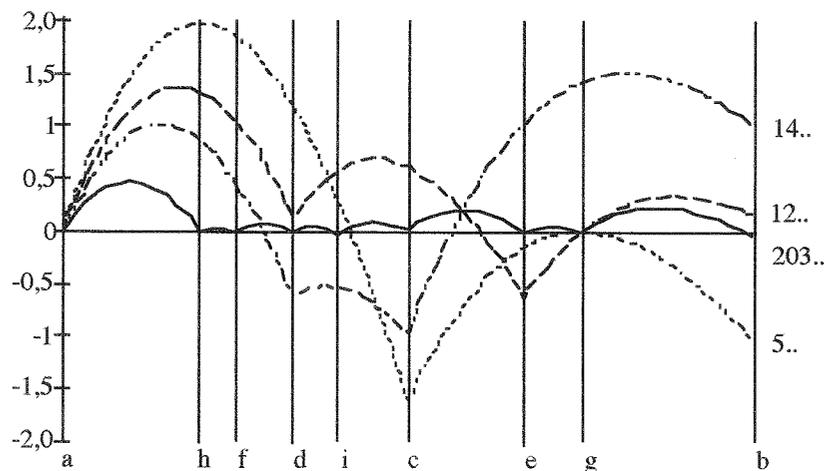


Figure 17. Courbes des erreurs sur une droite verticale

distance	classique		G. Borgefors			E. Thiel	
	d_4	d_8	$d_{3..}$	$d_{5..}$	$d_{14..}$	$d_{12..}$	$d_{203..}$
max erreur	41,42 %	29,29 %	5,72 %	1,98 %	1,52 %	1,38 %	0,48 %
amplitude	41,42 %	29,29 %	11,13 %	3,59 %	2,49 %	2,00 %	0,51 %

Table 1. Tableau récapitulatif

Le choix des critères d'optimisation est naturellement ouvert. Une critique adressée à Borgéfors dans [VER 91] est de tester les erreurs sur des droites verticales, ce qui influencerait trop le résultat et serait un mauvais gage pour l'isotropie ; il préconise d'effectuer les minimisations sur des droites obliques, voire sur des cercles euclidiens (mais qui ne correspondent alors plus au support image).

Dans la pratique (discrète) il en va autrement : en effet, les critères prépondérants à choisir pour l'optimisation sont (a) le maximum de l'erreur, l'amplitude de l'erreur, ou (b) la minimalité sur les coefficients de chanfrein eux-mêmes. Une façon d'unifier la minimisation est de procéder sur la totalité des points de l'image (l'intégrale discrète).

- Le critère (b) revient à chercher le minimum E_a des erreurs sur les petites distances (c'est la méthode proposée au § 4.3).

- Quant aux deux critères (a), ils font minimiser les erreurs sur les grandes distances. Pour ce faire, nous testons toutes les valeurs de a entre 2 et 255, calculons les poids des points $p(x,y)$ affectés avec la formule $p = \text{Round}(a \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$, puis nous calculons les erreurs effectives sur la droite limitant le support de l'image des distances. Voici un exemple pour un voisinage $7*7$:

valeur a	maximum de l'erreur en %			amplitude de l'erreur en %		
	abode	abcd	abde	abcde	abcd	abde
12	1,379	1,721	1,379	1,996	1,721	1,996
14	1,015	1,519	1,015	1,989	2,493	1,962
15	1,005	1,762	1,005	1,890	2,767	1,890

Table 2. Optimisation dans un voisinage $7*7$

La table 2 montre que pour un chanfrein a-b-d-e, les erreurs sont les mêmes que pour a-b-c-d-e, et inférieures à celles de a-b-c-d. La valeur $a = 15$ pour a-b-d-e donne ici de meilleurs résultats que 12 ou 14 (même si $E_{15} = 0,434$ est moins bon que $E_{12} = 0,267$ et $E_{14} = 0,305$).

Comparons enfin dans la table 3 les a optimaux pour chacun des trois critères dans un voisinage a-b-c-d-e-f-g-h-i :

a	34	152	203
max erreur	0,388	0,486	0,484
amplitude	0,600	0,494	0,514
E_a	0,483	0,455	0,188

Table 3. Valeur a optimale dans un voisinage $11*11$

6. Applications : axe médian, ligne médiane et décoalescence

Nous présentons ici des applications développées avec le chanfrein 3-4, et énumérons les étapes à franchir pour la généralisation aux autres chanfreins. Cette approche est structurelle, et se distingue ainsi de la morphologie mathématique.

6.1. Axe médian

Une métrique donnée par un masque définit des boules ; l'axe médian (noté AM) est le centre des boules dites *maximales*, i.e. qui ne sont incluses dans aucune autre. AM correspond ainsi à un recouvrement par des boules de la métrique choisie, et l'union de ces boules redonne l'image.

Un point (x,y) d'une image appartient à AM s'il est *maximum local* au sens de la métrique choisie,

$$\text{i.e. } (x,y) \in \text{AM} \Leftrightarrow \text{DT}[x,y] > \text{MAX}_i \left\{ \text{Pic}[x+M[i].x,y+M[i].y] - M[i].p \right\} \quad (2)$$

où $(M[i].x, M[i].y)$ est le $i^{\text{ème}}$ point du masque, de poids $M[i].p$.

La transformation en AM est donc réversible, et ne nécessite qu'un seul parcours de l'image de distance (notée DT) pour extraire les maximums locaux ; la reconstruction nécessite deux parcours [PFA 67]. La caractérisation de maximum local n'est malheureusement pas immédiatement généralisable pour les chanfreins. En effet, Arcelli [ARC 87, 88] a mis en évidence sur l'AM obtenu d'après (2), la présence de *pseudo AM*, points qui tout en étant des maximums locaux, ne sont pas centres de boules maximales. On les observe souvent à la périphérie des objets, et leur nombre croît avec la complexité du masque.

Situés sur les deux premiers intervalles de niveaux avec chanfrein 3-4, ils occupent pratiquement tout l'objet pour d_{203} .

Ces points redondants sont certes importants pour retrouver les valeurs exactes de DT par transformation inverse, mais ne contribuent pas à retrouver la forme. Pour les supprimer, Arcelli a élaboré une table de correspondance dans le cas de chanfrein 3-4 ($6 \rightarrow 5$, $3 \rightarrow 1$) qu'on applique à DT pour obtenir DTC ; en appliquant (2) à DTC on n'obtient plus que les vrais AM.

Cette métrique étant un cas particulier des chanfreins (8-voisinage, 2 pondérations d'où un seul cône d'influence), la généralisation aux autres est plus complexe.

6.2. Ligne médiane

L'axe médian est un sous-ensemble de "squelette pondéré", car il est étiqueté *via* DT, et centré dans la forme, mais il n'est pas connexe. Il faut donc reconnecter AM pour l'analyse et la description d'objets.

Pendant, la présence des pseudo-AM gêne cette phase ; c'est pourquoi nous nous sommes actuellement limités au chanfrein 3-4.

Principe de connexion : on reconnecte les vrais points de l'axe médian en ajoutant entre eux certains points, tout en veillant à ce que la ligne médiane (notée LM) soit mince, et possède un fort pouvoir descripteur de l'objet (homotopie, réversibilité).

D'une façon analogue à [MON 85] pour d_g , [ARC 86] pour d_4 et [GON 92] pour d_0 , on propage à partir de AM, pour construire LM, par un suivi de crête récurrent des poids faibles vers les poids forts. La méthode, qui est décrite en détail dans [THI 91], est sensiblement différente dans le sens où les courbes de niveau de d_g sont 4-connexes, ce qui facilite l'analyse locale, tandis que les intervalles de niveaux du chanfrein 3-4 sont *-connexes.

Il faut retenir que la ligne médiane que l'on obtient est *rigoureusement* caractérisée (ce qui n'est pas le cas pour les squelettes, qui sont le résultat d'algorithmes) [CHA 91].

Sa formation est aussi rapide que pour d_g ; enfin cette LM est quasiment isotrope, ce qui rend l'application du § 5.3 très robuste.

Enfin, il est à noter que cette phase de calcul de LM est aussi valable pour les autres chanfreins, le seul obstacle restant la suppression des points redondants.

6.3. Décoalescence

Le problème que l'on se pose consiste à détecter des rétrécissements dans une forme.

La ligne médiane, étiquetée *via* DT, définit un recouvrement de la forme par des boules centrées de la métrique choisie. Une zone de rétrécissement détectable, c'est-à-dire un col sur DT, se traduit sur LM par un minimum local (qui n'est pas une extrémité).

Il suffit donc de parcourir les éléments de même niveau sur LM et de détecter ces *lieux de rétrécissements*.

La supériorité du chanfrein 3-4 sur d_g [MON 89] tient au fait que les boules de cette dernière sont des carrés, ce qui peut rendre une zone de rétrécissement indétectable sur DT [THI 91].

La séparation de deux agrégats s'effectue enfin en suivant les lignes de plus grande pente de DT depuis les lieux de rétrécissement.

Dans les exemples de la figure 18, le contour des objets ainsi que leur LM figurent dans la colonne de gauche, et le résultat de la phase de déconnexion dans la colonne de droite.

- La première image montre des couples de disques dans différentes orientations, pour tester la robustesse du procédé vis-à-vis de la rotation.
- Dans la deuxième image sont séparés de gros disques avec des barbules.
- Dans la dernière, figure un exemple de décoalescence de grains, testé sur un cas réel de béton cellulaire.

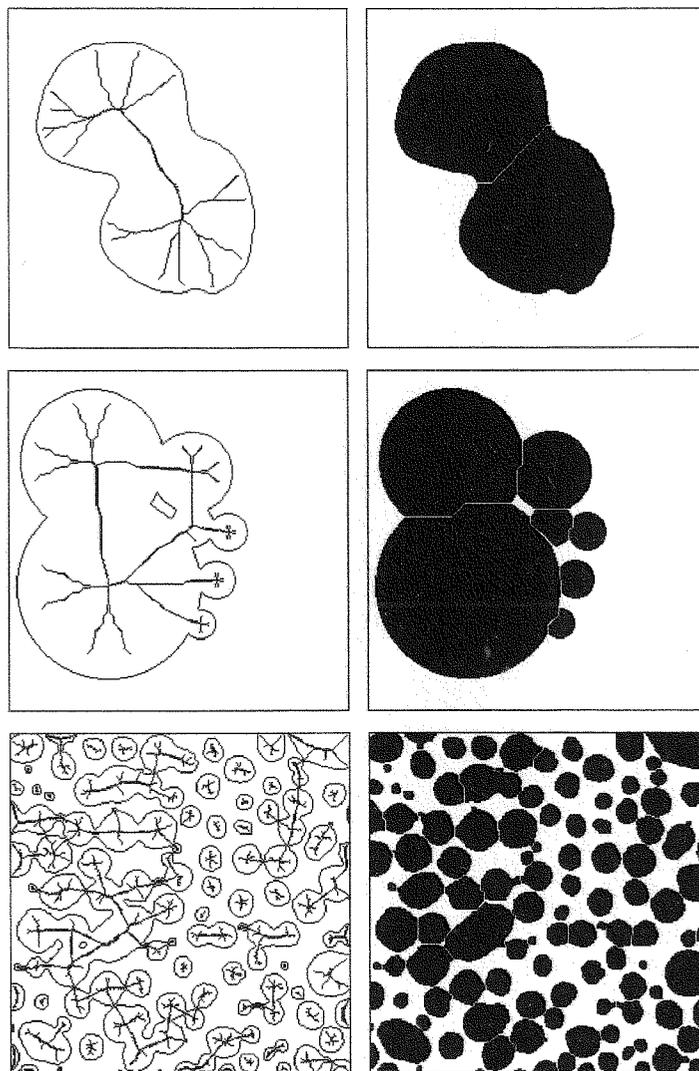


Figure 18. *Ligne médiane et décoalescence*

7. Conclusion

Dans cette étude des distances du chanfrein, nous avons dégagé des caractéristiques locales d'une image de distance, tant du point de vue des valeurs attribuées dans un cône d'influence, que de la géométrie des boules (droites épaisses).

Chaque famille de boules, pour tout rayon R , induit un passage progressif au disque de rayon $R+1$. Ces résultats rejoignent les recherches de topologies discrète [KOV 89] et peuvent apporter des améliorations en synthèse d'image, en antialiasage et en animation [REV 91][AND 91].

Ces propriétés arithmétiques nous ont permis d'établir rigoureusement les conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients d'un masque pour qu'il induise bien une distance ; un autre moyen pour y parvenir serait la formule analytique générale donnant la distance entre deux points pour un chanfrein quelconque.

Les propriétés géométriques que nous avons montrées nous ont conduits de plus à élaborer un procédé d'optimisation de masques de chanfrein. Les résultats obtenus garantissent une erreur minimale, ce qui est particulièrement intéressant dans le cas où l'on souhaite accéder à une grande précision dans la mesure de distance.

Le choix des distances de chanfrein a satisfait nos objectifs de contraintes de stockage, de grande rapidité de calcul (séquentiel en deux passages) et de minimalité de l'erreur par rapport à la distance euclidienne, qui est un bon critère d'isotropie. Ce dernier point est très important pour la robustesse des applications basées sur l'axe médian, la ligne médiane et la séparation d'agrégats [THI 91], qui sont significatives de l'utilité de telles distances et de leur importance en analyse d'images.

8. Bibliographie

- [AND 91] Eric ANDRES, "Cercles discrets et rotations discrètes", 1^{er} colloque de géométrie discrète, C.R.I. Strasbourg, 1991. (pages non numérotées)
- [ARC 85] C. ARCELLI, G. SANNITI DI BAJA, "A width-independent fast thinning algorithm", I.E.E.E. trans. on PAMI vol. 7, n° 4, p. 463-474, July 1985.
- [ARC 87] C. ARCELLI, G. SANNITI DI BAJA, "Weighted distance transforms : a characterization", 4th Int. Conf. on IAPR, Cefalu (Italy), p. 205-212, Sept 1987.
- [ARC 88] C. ARCELLI, G. SANNITI DI BAJA, "Finding local maxima in a pseudo-euclidean distance transform", CVGIP 43, p. 361-367, 1988.
- [ARC 91] C. ARCELLI, M. FRUCCI, "Reversible skeletonization by (5-7-11)-erosion", First International Workshop on Visual Form, May 27-30, 1991, Capri, Italy, published in Plenum Press, New York, 1992, p. 21-28.

- [BOR 84] G. BORGEFORS, "Distance transformations in arbitrary dimensions", CVGIP 27, p.321-345, 1984.
- [BOR 86] G. BORGEFORS, "Distance transformations in digital images", CVGIP 34, p. 344-371, 1986.
- [CHA 91] J.M. CHASSERY, A. MONTANVERT, *Géométrie discrète en analyse d'images*, Editions Hermès, 1991.
- [DAN 80] P.E. DANIELSON, "Euclidean distance mapping", CGIP 14, p. 227-248, 1980.
- [DAS88] P.P. DAS, "More on path generated digital metrics", Pattern Recognition Letters 10, p. 25-31, 1989.
- [GON 92] Weixin GONG, *Nouveaux algorithmes et squelettisation en 2 et 3 dimensions*, Thèse CNAM, 1992.
- [H&W] HARDY & WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, fifth edition (october 1978), § III.3.1.
- [KOV 89] KOVALESKY V.A, "Finite Topology as applied to image analysis", CVGIP, 46, 1989, p.141-161.
- [MIG 91] Serge MIGUET, Yves ROBERT, "Parallélisation d'algorithmes de balayage d'image sur un anneau de processeurs", TSI, vol 10, n°4, 1991, p. 287-295.
- [MON 68] U. MONTANARI, "A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance", J. of ACM vol 15 n°4, October 1968, p. 600-624.
- [MON 86] A. MONTANVERT, "Median line : graph representation and shape description", 8th ICPR. Paris. Octobre 86. p.430-432.
- [MON 89] A. MONTANVERT, D. ADELH, "Tools for shape complexity evaluation and associated decomposition processes", 5th ICIAP, September 1989, Positano (Italy), published in Progress in Image Analysis and Processing, 1990. p. 348-355.
- [PFA 67] PFALTZ J.L., ROSENFELD A, "Computer representation of planar regions by their skeletons", Comm. of ACM, 10, February 1967, p. 119-125
- [REV 91] J.P. REVEILLES, "Géométrie Discrète, Calcul en Nombres Entiers et Algorithmique", Thèse U.L.P. Strasbourg, 1991.
- [ROS 66] A. ROSENFELD, J.L. PFALTZ, "Sequential operations in digital picture processing", Journal of ACM, 13(4), 1966, p. 471-494.
- [ROS 68] A. ROSENFELD, J.L. PFALTZ, "Distance functions on digital pictures", Pattern Recognition, vol. 1, p. 33-61, 1968.
- [THI 91] Edouard THIEL, Annick MONTANVERT, "Shape splitting from medial lines using the 3-4 chamfer distance", International Workshop on Visual Form, May 1991, Capri, published in Plenum Press, New York, 1992, p. 537-546.
- [VER 91] J.H. VERWER, "Local distance for distance transformations in two and three dimensions" Pattern Recognition Letters 12 (1991), p. 671-682.
- [YAM 84] H. YAMADA, "Complete euclidean distance transformation by parallel operation", 7th ICPR, Montréal, August 1984, p. 69-71.

Article reçu le 16 janvier 1992, version révisée le 16 mars 1992.

Rédacteur responsable : R. Mohr.

Edouard THIEL

Edouard THIEL est né à Saint-Avold en 1968. Il a obtenu sa Maîtrise de Mathématiques Pures à Strasbourg en 1990, puis son D.E.A. de Mathématiques Appliquées à la Géométrie Algorithmique à Grenoble en 1991. Il est actuellement en thèse au sein de l'équipe RFMQ-TIMC-IMAG. Ses intérêts scientifiques comprennent les distances discrètes, les représentations de formes internes pour l'analyse d'images, leurs applications en étude de matériaux et en biologie, et les interfaces graphiques.

Annick MONTANVERT

Annick MONTANVERT est ingénieur ENSIMAG (1984) et Docteur de l'Université de Grenoble (1987) en Informatique. Après avoir effectué un séjour post-doctoral à l'Université de Maryland (Computer Vision Laboratory ; USA) en 1989, elle est actuellement Maître de Conférences en Informatique à l'Université de Grenoble 2.

Sa recherche en Analyse d'Images s'effectue au sein de l'équipe RFMQ-TIMC-IMAG. Ses centres d'intérêt portent sur l'exploitation de l'espace discret, et sur le développement de méthodes hiérarchiques tant pour la représentation de formes que pour la segmentation d'images.

Improvement of chamfer distances for image analysis

GLOSSAIRE

Image des distances : Une image est représentée par une matrice d'entiers. Elle contient des *objets*, qui sont des ensembles connexes de points à 1, le fond étant à 0. On appelle *image des distances au fond* l'image telle que la valeur attribuée en tout point P est égale à la distance de P au complémentaire. (Anglais : "Distance Transformed picture", notée DT). Etant donné une image .. (cf § 2.1).

Distance du chanfrein : distances discrètes consistant à pondérer chaque déplacement élémentaire par un entier dans un voisinage donné. Famille de distances permettant de bonnes approximations de la distance euclidienne, avec un calcul particulièrement efficace par deux balayages séquentiels de l'image. (Anglais : "Chamfer distance", notée d_C).

Points visibles : points de coordonnées entières (x,y) telles que $x > y \geq 0$ et $\text{pgcd}(x,y) = 1$ (avec la convention $\text{pgcd}(0,a) = a$). L'ensemble des points visibles est fortement lié aux suites de Farey, la fonction ϕ d'Euler, et se construit avec un crible d'Eratosthène. (Anglais : visible point).

Axe médian : lieu des centres des boules *maximales* dans un objet (i.e. qui ne sont pas complètement incluses dans une autre). L'axe médian correspond à un recouvrement par des boules centrées de la métrique choisie, et est ainsi réversible. Il est utile pour la représentation interne, et la compression des données. (Anglais : "Medial Axis", noté AM).