

RFIA'94

Unification de la Squelettisation menée en Distance

Edouard Thiel

*Equipe Infodis - Laboratoire TIMC-IMAG (URA CNRS D1618)
CERMO BP 53, 38041 GRENOBLE Cedex 9
Fax 76.51.49.48 - Tél 76.51.48.13
Email Edouard.Thiel@imag.fr*

RESUME :

Nous proposons une méthode unifiée pour extraire le squelette pondéré d'une image de distance, calculée avec les distances discrètes les plus courantes. L'algorithme de squelettisation est quasi réversible car presque tous les points de l'axe médian sont inclus dans le squelette. Il supporte bien les rotations si l'on adopte une distance qui approxime correctement la distance euclidienne. Il inclut une étape d'ébarbulage et d'embellissement, qui permet de simplifier la structure du squelette selon les besoins et d'en améliorer l'esthétique. Le temps de calcul est très limité et est indépendant de l'épaisseur des objets à squelettiser.

MOTS CLES :

Image de distance, axe médian, ligne médiane, squelette, ébarbulage.

ABSTRACT :

A unified scheme is introduced to extract the labeled skeleton from distance maps, computed according to the most common distance functions. The skeletonization algorithm is reversible since (almost all) the maximal centers are included in the skeleton, is nearly invariant under figure rotation (when the adopted distance function provides a reasonable approximation of the Euclidean distance), and includes the pruning and beautifying steps, which allow to simplify skeleton structure according to the user's needs and to improve skeleton aesthetics. The computational load of the algorithm is limited and is independent of the size of the figure to be skeletonized.

KEYWORDS :

Distance maps, maximal centers, medial line, skeleton, pruning.

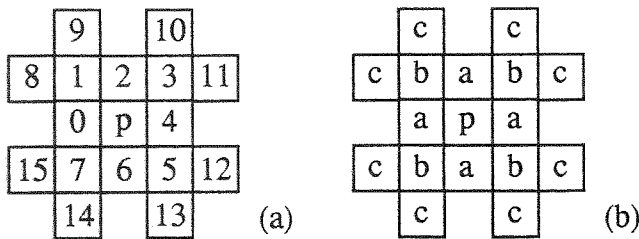


Figure 2. Notation utilisée dans tout l'article pour les 16 points (numérotés figure 2.a) du voisinage $N(p)$ de p . Nous attribuons les valeurs adéquates aux poids a, b, c (aussi notés w_i) selon la distance employée. Les voisins $n_i(p)$ sont encore appelés a -voisins ($i = 0, 2, 4, 6$), b -voisins ($i = 1, 3, 5, 7$) ou c -voisins ($i = 8..15$) (figure 2.b).

L'algorithme est implémenté sur machine séquentielle. Pour des raisons de clarté, nous préférons décrire les étapes de la squelettisation comme si elles étaient accomplies individuellement. Le nombre d'inspections de l'image est en réalité faible, et indépendant à la fois de la taille des objets dans l'image et de la distance choisie.

3. Calcul de la Carte des Distances

Comme l'information de distance peut être propagée d'un point à tous ses voisins, des opérations locales sont suffisantes pour construire la carte de distances DM pour d_{a-b-c} . Deux

passages séquentiels $f_1(p)$ et $f_2(p)$ sont appliqués sur chaque point p des objets, durant l'aller et le retour respectivement.

Passage avant : $f_1(p) = \min \{ n_0(p)+a, n_1(p)+b, n_2(p)+a, n_3(p)+b, n_{8..11}(p)+c \}$

Passage arrière : $f_2(p) = \min \{ p, n_4(p)+a, n_5(p)+b, n_6(p)+a, n_7(p)+b, n_{12..15}(p)+c \}$

En donnant la valeur ∞ aux poids correspondant à des déplacements interdits pour une distance d_{a-b-c} donnée, il est possible de traiter de façon homogène les transformations de distance. On fixe en particulier $a = 1, b = c = \infty$ pour d_4 ; $a = b = 1, c = \infty$ pour d_8 ; $a = 3, b = 4, c = \infty$ pour d_{3-4} ; $a = 5, b = 7, c = 11$ pour d_{5-7-11} .

4. Propagation de la Ligne Médiane

4.1. Détection de l'Axe Médian

L'axe médian AM est le lieu des centres des boules maximales dans la forme, i.e qui ne sont incluses dans aucune autre. Il correspond à un recouvrement de la forme, et est donc réversible : il suffit d'appliquer la transformation de distance inverse à AM.

Avant de rentrer dans le détail de l'extraction de AM, nous comparons son allure générale figure 3, où le bord extérieur de l'objet et son axe médian sont représentés pour les 4 distances :

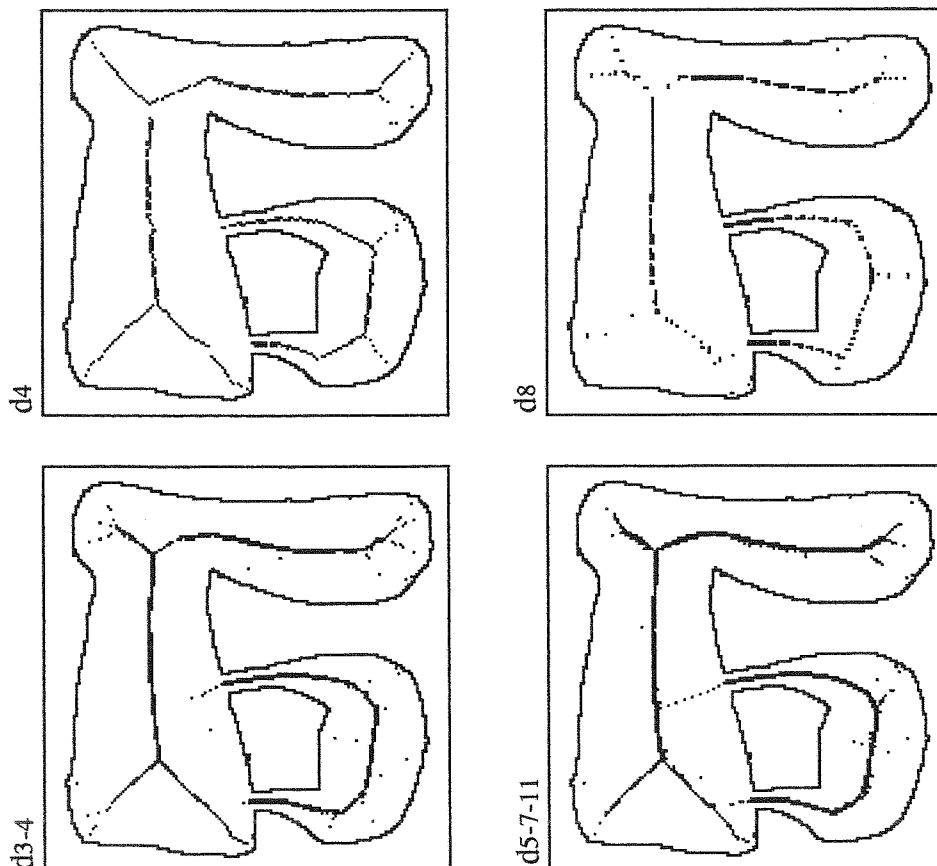


Figure 3. Bord extérieur et axe médian

L'inclusion des points de AM dans la ligne médiane LM garantit une localisation correcte par ses extrémités des renflements de la forme. La boule maximale située sur une telle extrémité est le cercle osculateur du renflement correspondant ; lorsqu'on déplace cette boule maximale sur sa branche, elle touche le bord de l'objet en de multiples endroits, centrant au mieux LM dans la forme.

Il n'est pas suffisant d'inclure AM pour garantir la stabilité du squelette en rotation. En effet, les boules des métriques discrètes sont des polygones dont les côtés ont des orientations fixes. Ainsi le nombre et la localisation des disques nécessaires pour recouvrir une figure dépendent de sa géométrie et de l'orientation de ses contours. La stabilité en rotation croît avec le nombre de côtés caractérisant le disque. De ce fait les disques construits avec d_{5-7-11} et d_{3-4} doivent être préférés aux disques construits avec d_4 ou d_8 .

Dans la carte de distance, chaque point p reçoit l'information de distance de l'un au moins de ses voisins (sur le masque). Tout voisin de ce type est placé sur un chemin minimal, constitué uniquement de déplacements permis du fond à p . De même, le point p peut propager l'information de distance à certains voisins, qui sont plus internes dans l'objet que p . Lorsqu'une telle propagation a lieu de p à un voisin $n_i(p)$, alors $n_i(p) = p + w_i$ ($w_i = a, b$ ou c , cf figure 2).

En général, un centre maximal est un point qui ne propage l'information de distance à aucun de ses voisins. Ils reçoivent leur poids depuis d'autres points, plus petits que p . De ce fait on peut définir un Critère de Centre Maximal :

$$p \text{ est CCM si } n_i(p) < p + w_i \quad (\forall i = 0..15).$$

Le CCM est exact pour d_4 et d_8 , mais peut sélectionner des points redondants lorsque $a \neq 1$. Dans \mathbb{N} , certains entiers dits creux ne peuvent être atteints par une combinaison linéaire de a, b, c . Les labels précédés de séquences creuses sont ceux qui causent problème au CCM. Dans le cas d'une distance d_{a-b} , il suffit d'abaisser ces labels au

minimum de leur séquence creuse pour que le CCM soit valide [16] ; ainsi dans le cas de d_{3-4} , on abaisse les 6 à 5 et les 3 à 1.

Le problème devient plus complexe pour les distances de chanfrein à plus de 2 pondérations. Nous présentons une méthode simple pour résoudre le cas de d_{5-7-11} , basée sur l'emploi d'une table de correspondance (table 1). Pour chaque entrée p de la table, sont associés trois labels concernant les a, b, c -voisins de p , qui donnent la valeur minimale que devrait avoir un tel voisin pour interdire à p d'être un centre maximal. Les cases vides et les entrées non représentées de p correspondent aux cas où le CCM est exact.

Voici (fig 4) l'axe médian extrait de la carte de distance donnée figure 1 :

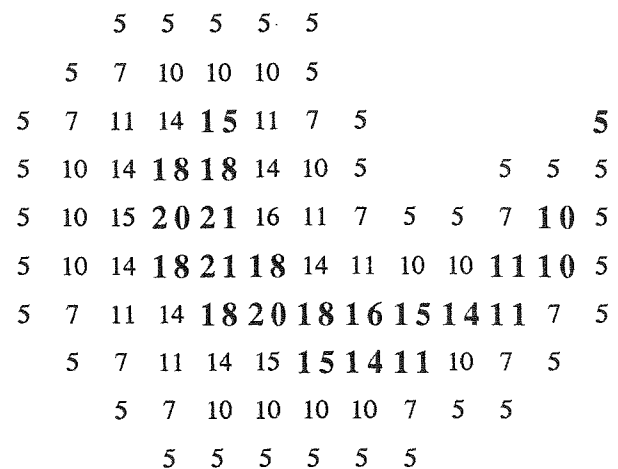


Figure 4. Axe médian (gras) pour d_{5-7-11}

4.2. Détection des Points Selle

Les points selle constituent une crête connectant deux parties de la carte de distances comportant des poids plus grands. La plupart des points selle sont des AM, et leur identification est donc déjà assurée. Cependant, les extrémités de ces crêtes (voire la crête entière, lorsque sa taille est d'au plus 2 points), sont susceptibles de ne pas être des AM.

p	a	b	c
5	7	10	14
7	11		
10	14	15	20
14	18	20	
16		22	
18	22		28
20		26	30
21		27	

p	a	b	c
25	28	30	35
27		33	
29	33		
31		37	
32		38	
35	39	41	45
38		44	
39		45	

p	a	b	c
40	44		
42		48	
46		52	
49		55	
53		59	
60		66	

Table 1. Table de correspondance pour le calcul de l'axe médian avec d_{5-7-11}

Un point p non AM est un point selle si il remplit l'une au moins des Conditions de Point Selle notée CPS (cf figure 2 pour la notation des voisinages, et figure 5 en exemple) :

- (1) Le 8-voisinage de p comprend 2 composantes 4-connexes de points plus petits que p
- (2) Le 8-voisinage de p comprend 2 composantes 8-connexes de points plus grands que p
- (3) Les points de l'un des triplets $(n_0(p), n_1(p), n_2(p))$, $(n_2(p), n_3(p), n_4(p))$, $(n_4(p), n_5(p), n_6(p))$, $(n_6(p), n_7(p), n_0(p))$ sont égaux à p

1	1	1	1	1	1							1
1	2	2	2	2	1					1	1	<u>1</u>
1	2	3	3	2	1	1	1	1	1	1	2	1
1	2	2	3	<u>2</u>	2	2	2	2	<u>2</u>	2	2	1
1	1	2	2	<u>2</u>	3	3	3	3	<u>2</u>	2	1	1
	1	1	1	2	3	3	2	2	2	1	1	
			1	2	2	2	2	1	1	1		
			1	1	1	1	1	1				

Figure 5. Carte de distance d_8 , axe médian (gras) et points selle (soulignés ; de type (2), (3), (1) de gauche à droite)

Les nombres de composantes 4 ou 8-connexes dans les conditions (1) et (2) peuvent être facilement calculés avec le *crossing number* et le *connectivity number* [17-19] respectivement. La condition (3) est testée pour tous les points si $a = 1$, seulement pour les points à a sinon.

4.3. Propagation des Chemins

En général, l'ensemble des points AM et des points selle n'est pas connecté. Aussi des points supplémentaires sont identifiés en propageant des chemins sur les gradients *positifs*. La structure de la carte de distance garantit la bonne connexité du résultat.

La propagation ne doit en principe démarrer que dans les configurations selles au niveau des extrémités des crêtes. En effet seuls ces points dans la crête ont des voisins de poids supérieur. Un seul chemin est tracé pour chacun d'entre eux, excepté lorsque la longueur de cette crête est de 1 (ses extrémités sont confondues), auquel cas 2 chemins proviendront du même point selle.

Nous n'opérons aucun test pour distinguer les extrémités d'une crête des autres points selle, ou pour mesurer la taille des crêtes. Les points selle pouvant faire partie de AM, le suivi des chemins doit être tenté pour tout point AM ou selle. Soit p

un tel point, $N(p)$ contient au plus 2 composantes 8-connexes de points plus grands que p , desquels un chemin ascendant peut être commencé. Pour chaque point de la composante courante, le gradient est calculé. Le voisin $n_i(p)$ qui maximise le gradient dans sa composante est marqué comme premier point du chemin. De là, les voisins $n_k(n_i(p))$ sont inspectés pour trouver le prochain point (plus grand que $n_i(p)$), nécessairement unique, qui continuera le chemin. Le tracé du chemin se poursuit sur le plus grand gradient, tant que des points possédant un gradient positif sont trouvés.

Certains problèmes doivent être traités, qui découlent de ce que des chemins 8-connexes sont tracés, alors que la carte DM où le gradient est calculé n'a pas été nécessairement obtenue avec la distance d_8 . De plus, sélectionner indifféremment tous les voisins maximisant le gradient peut épaissir excessivement les chemins, voire former un cône. Pour éviter cela et pour obtenir des chemins 8-connexes, nous assignons des valeurs spéciales aux poids $v_i = a', b', c'$ utilisés pour calculer le gradient. Des valeurs négatives sont assignées à v_i pour les poids w_i non affectés (voir figure 2 pour la notation des voisinages).

Pour chaque voisin $n_i(p)$ plus grand que p , le gradient est : $\text{grad}_i = [n_i(p) - p] / v_i$ avec

$$a' = 2, b' = 3, c' = -1 \text{ pour } d_4 \text{ et } d_8$$

$$a' = 3, b' = 4, c' = -1 \text{ pour } d_{3-4}$$

$$a' = 5, b' = 7, c' = 11 \text{ pour } d_{5-7-11}.$$

Dans le cas de d_{3-4} , au plus 2 points adjacents $n_i(p)$ ($i = 0..7$) maximisent le gradient dans la même composante. Lorsque c'est le cas, seul le voisin direct (i pair) est propagé pour éviter l'épaississement du chemin.

Dans le cas de d_{5-7-11} , 3 points peuvent maximiser simultanément le gradient, (un a -, un b -, et un c -voisin). Pour éviter l'épaississement, et pour suivre le gradient correct (le maximisant du a -voisin de p n'est pas toujours le c -voisin de p), on ne doit accepter que le c -voisin pour la propagation. A partir du moment où un c -voisin de p est choisi, on rajoute simplement le a - ou le b -voisin intermédiaire pour respecter la 8-connexité du chemin (de préférence celui des deux qui a le plus fort gradient).

4.4. Remplissage des Faux Trous

Les fausses boucles dans la ligne médiane sont des sous-ensembles de points multi-connectés de LM, qui n'entourent aucun trou de l'objet. Ces faux trous doivent être remplis (en les marquant comme points de LM) pour obtenir une LM topologiquement correcte.

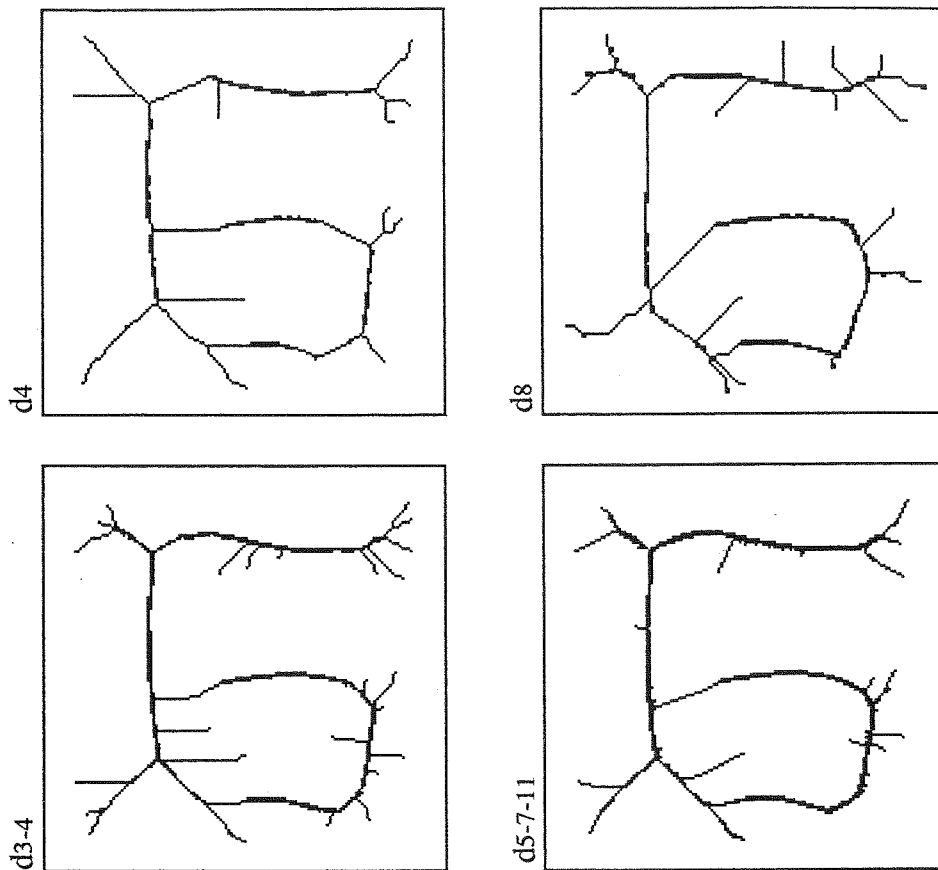


Figure 6. *Ligne médiane*

Les faux trous sont obtenus lorsque des chemins propagés (presque) parallèles se rencontrent. Dans les cas de d_4 , d_8 et d_{3-4} , la seule possibilité est la rencontre de deux chemins orientés diagonalement. Ces faux trous ont une taille de 1 pixel. Pour d_{5-7-11} , puisque les chemins peuvent suivre une direction du cavalier, il est de plus possible de voir des faux trous de 2 pixels.

Un point p appartient à un faux trou si l'une des conditions suivantes est remplie :

- (1) $p \notin LM, \{ n_0(p), n_2(p), n_4(p), n_6(p) \} \subset LM$
- (2) $p \notin LM, \{ n_0(p), n_2(p), n_3(p), n_5(p), n_6(p), n_4(n_4(p)) \} \subset LM$
- (3) $p \notin LM, \{ n_0(p), n_2(p), n_4(p), n_5(p), n_7(p), n_6(n_6(p)) \} \subset LM$

Ce test doit être effectué après la fin de la propagation de la ligne médiane, et peut se simplifier (on teste d'abord p , $n_0(p)$, $n_2(p)$, etc). Le remplissage ne provoque pas d'épaississement excessif de LM, car les trous sont en général extrêmement clairsemés dans l'image. A cet endroit du procédé, la ligne médiane obtenue est 8-connexe, homotope, comprend tous les points de l'axe médian et est donc réversible, mais n'est pas d'épaisseur 1 (figure 6).

5. Extraction du Squelette

5.1. Réduction à l'épaisseur 1

La réduction de la ligne médiane à l'épaisseur 1 peut être obtenue en appliquant des opérations séquentielles de suppression qui préservent la topologie, et qui évitent le raccourcissement des branches du squelette. La réduction à l'épaisseur 1 est ici un processus de re-marquage plutôt que de suppression réelle, l'information "ancien LM" pouvant servir par la suite. On désigne par S l'ensemble des points restant à un moment donné.

La ligne médiane peut contenir des points 4-internes, voire 8-internes (bien plus rares). Pour favoriser le centrage du squelette dans la ligne médiane, cette étape est réalisée en 2 passes. Au 1^{er} passage, les points 4-internes dans LM (figure 7.a) ne sont pas supprimables (figure 7.b), puis au 2nd passage, tous les points restants sont candidats à la suppression (figure 7.c).

Un point p est supprimé dans la 1^{ère} inspection de S (la 2^{nde}) si il satisfait les conditions C_0+C_1 (conditions C_0+C_2). C_0 préserve la topologie et évite en même temps tout raccourcissement des branches de S . C_1 centre S dans LM, et C_2 empêche la création de trous dans S .

(C0) Au moins un triplet de voisins $n_i(p)$, $n_{i+2}(p)$, $n_{i+5}(p)$ existe ($i = 0, 2, 4, 6$, addition modulo 8), tel que $n_i(p)$ et $n_{i+2}(p) \in S$ alors que $n_{i+5}(p) \notin S$.

(C1) Au moins un 4-voisin de p n'appartient pas à LM (originale).

(C2) Au moins un 4-voisin de p n'appartient pas à S (points restant à cet instant).

Cette méthode très simple réduit considérablement le cardinal des points du squelette. Comme certains points de l'axe médian peuvent être supprimés, la transformation n'est plus totalement réversible, mais les points perdus (au niveau du bord) sont si épars et insignifiants (leur existence est fortement liée à la digitalisation de départ de

l'objet) que le squelette peut nonobstant être considéré comme une représentation adéquate de l'objet (figure 8).

5.2. Ebarbulage

L'ébarbulage est effectué pour simplifier la structure du squelette, en supprimant des branches périphériques (i.e branches délimitées par un point terminal) qui ne correspondent pas à des renflements significatifs pour une application donnée. Il s'agit entre autres de branches créées par des bruits du contour, ou artefacts de la réduction de la ligne médiane à l'épaisseur unité. L'ébarbulage est de plus important pour réduire la sensibilité du squelette à la rotation et au changement d'échelle.

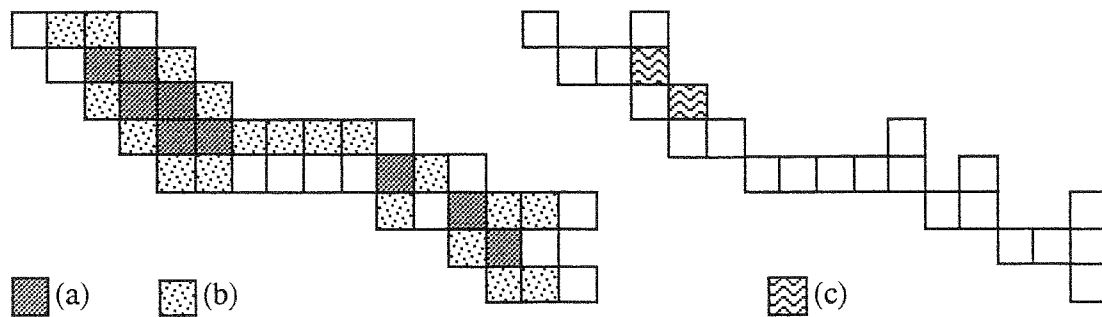


Figure 7 . Réduction de la ligne médiane à l'épaisseur 1

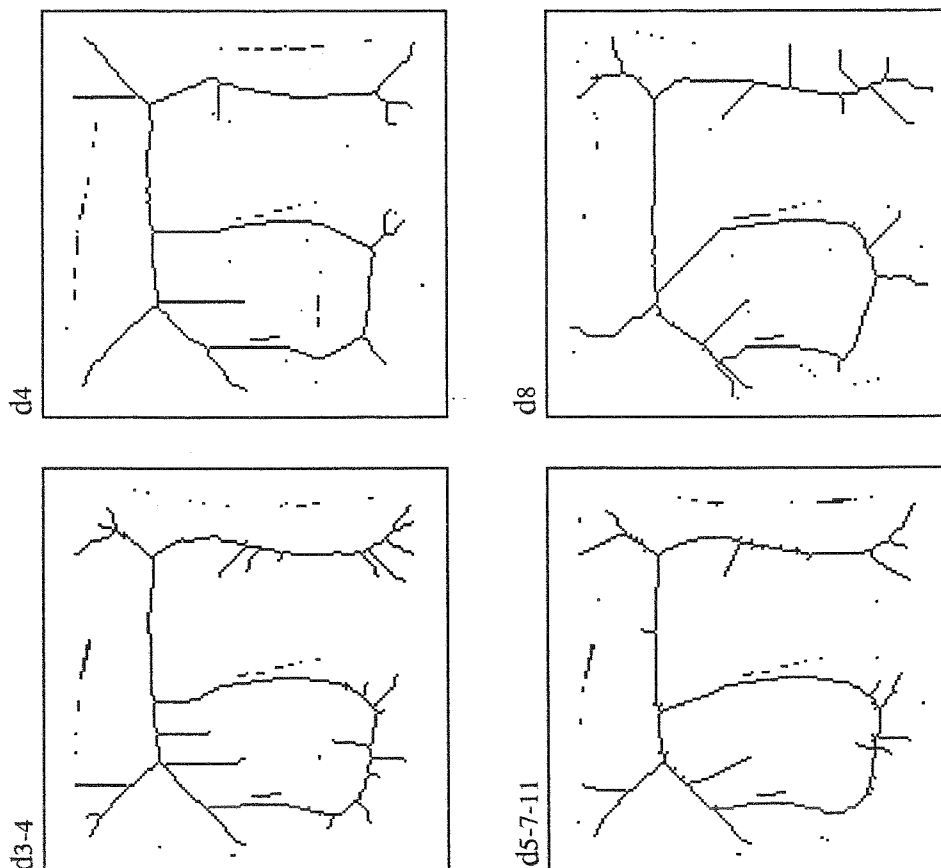


Figure 8 . Squelette et points perdus (sur les bords)

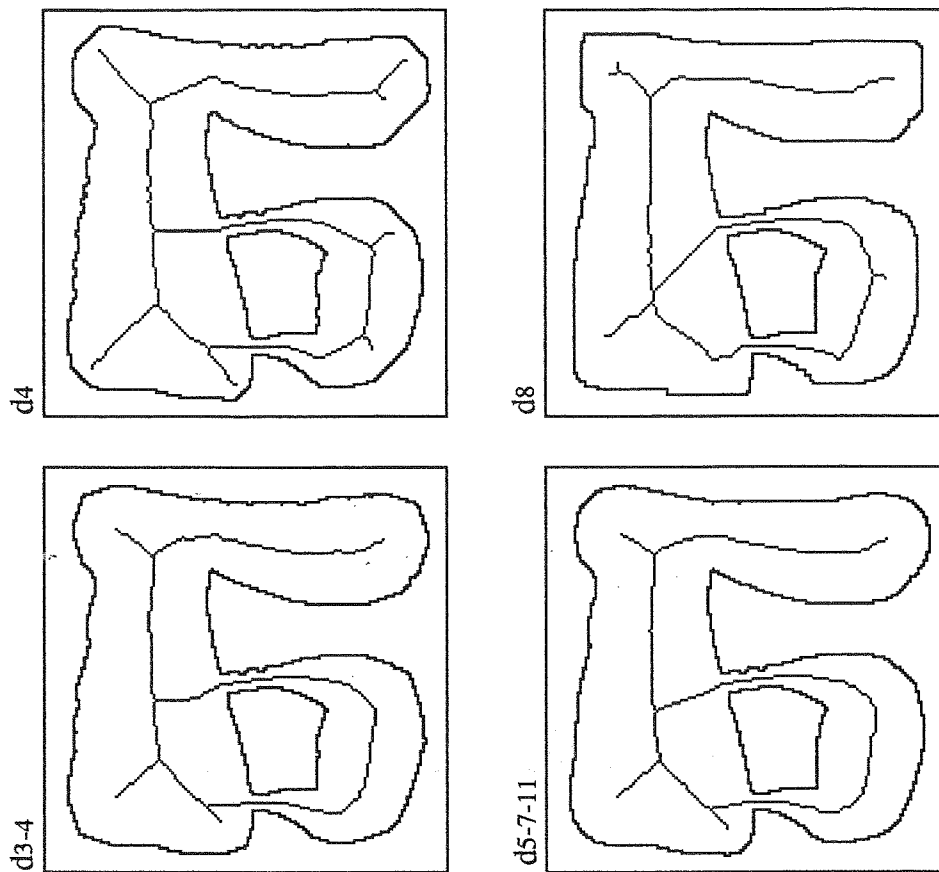


Figure 9. Squelette définitif (après ébarbulage ($\theta = 2*a$) et embellissement) et bord externe de la forme recouverte

Elaguer une branche implique cependant la suppression des points de l'axe médian qui sont dedans. Pour tenir compte de la perte d'information causée par la coupure de la branche, il est souhaitable de se baser sur un critère adéquat d'importance relative de la branche. En général, une branche peut être coupée en "sécurité" si la différence recouverte avant et après la coupure est négligeable. Cette différence peut être évaluée en terme de *degré de recouvrement* entre les disques centrés sur les deux extrémités de la branche à couper [5].

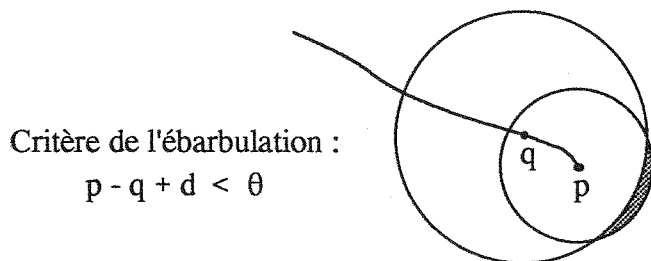


Figure 10. Degré de recouvrement

Soit p le point terminal de la branche et $q > p$ un point s'éloignant de p sur la branche. Soit P et Q leurs disques associés. La branche peut être ébarbulée de p à q lorsque Q recouvre largement P. Le degré de recouvrement entre P et Q peut se traduire par $(p - q + d(p,q))$, où d est la distance discrète utilisée pour construire la carte de

distance. On utilise un seuil de tolérance θ qui dépend de la qualité de réversibilité attendue (figure 10).

Nous généralisons l'expression utilisée en [5] de telle sorte qu'elle puisse être calculée quelle que soit la distance utilisée. Pour toute distance discrète, la distance entre deux points p et q peut être exprimée en fonction du nombre de déplacements unitaires horizontaux H et diagonaux D, le long d'un chemin 8-connexe de longueur minimale les rejoignant.

Avec $H = 2d_8 - d_4$ et $D = d_4 - d_8$ on a :

$$d_4 = H + 2D, \quad d_8 = H + D, \quad d_{3-4} = 3H + 4D, \quad \text{et} \\ d_{5-7-11} = 5H + 7D + (11-7-5) * \min(H,D).$$

Pour d_{a-b-c} , le degré de recouvrement entre les disques P et Q est donc exprimé par :

$$p - q + a*H + b*D + \delta * \min(H,D) < \theta$$

où $\delta = 0$ lorsque $c = \infty$ (cas de d_4 , d_8 et d_{3-4}) et $\delta = c - b - a$ sinon ($\delta = -1$ pour d_{5-7-11}).

Le seuil θ peut être fixé à a fois le nombre maximum de lignes ou colonnes périphériques dont on accepte la perte. On utilise couramment $\theta = 2*a$. Dans [5], l'ébarbulage est aussi

interrompu lorsque $q < p$, ou lorsqu'un nœud est atteint. En effet un nœud intermédiaire pourrait se transformer durant l'ébarbulage en point terminal et provoquer une sommation des pertes. Mais ici nous ne limitons pas l'ébarbulage aux branches externes du squelette. Nous propageons une étiquette unique pour chaque point terminal sur sa branche, et chaque fois que des branches se rencontrent en un nœud, nous ajoutons leurs étiquettes dans des listes circulaires. De là, chaque point q connaît tous ses pères p_1, p_2, \dots, p_n , et le critère de recouvrement est testé pour chaque couple (q, p_i) ; dès que l'un d'eux dépasse le seuil on arrête tout (figure 11).

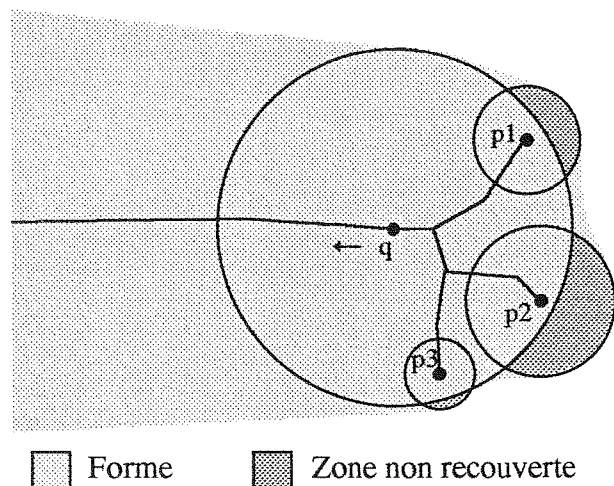


Figure 11. Ebarbulage contrôlé

5.3. Embellissement

Pour obtenir de beaux squelettes on doit corriger certains zigzags et supprimer les "dents", ces points terminaux voisins de points nœuds. La correction des zigzags s'opère en déplaçant le marqueur de certains points vers un voisin.

Un point p n'ayant dans S que 2 voisins $n_i(p)$ et $n_{i+2}(p)$ ($i = 1, 3, 5, 7$, addition modulo 8) est supprimé de S . Dans le même temps, son voisin $n_{i+1}(p)$ est marqué à la place de p . On peut décider de n'accepter $n_{i+1}(p)$ que s'il faisait partie de LM (originale) avant sa réduction à l'épaisseur unité, auquel cas il est un point du squelette de plein droit.

On doit de plus tenir compte du fait que ce déplacement peut causer un épaississement de S au voisinage de $n_i(p)$ ou $n_{i+2}(p)$, qui fera supprimer d'autres points, créant des dents, zigzags, etc. Nous avons implémenté la phase complète d'ébarbulage / embellissement / correction en parallèle. On mémorise au départ tous les points terminaux, puis chaque sous-phase est accomplie et donne lieu éventuellement à un voisinage à traiter. On ne balaie plus l'image, d'où la très grande rapidité du processus. La figure 9 montre le résultat final sur notre exemple.

6. Conclusion

Dans cet article, nous avons introduit une méthode unifiée pour extraire le squelette pondéré d'une image de distances, construite avec les distances discrètes les plus courantes. Nous avons utilisé des distances à un poids (d_4), deux poids (d_8 et d_{3-4}) et trois poids (d_{5-7-11}). L'algorithme peut être facilement étendu pour toute distance d_{a-b} ou d_{a-b-c} . Pour ce faire, il suffit de recalculer les tables de correspondance pour l'extraction de l'axe médian. L'extension aux distances de plus de trois pondérations est possible, avec quelques modifications supplémentaires; des travaux sont en cours. Si la démarche est voisine pour la distance euclidienne, on peut difficilement unifier le détail des opérations et des structures. Quant aux méthodes semi-continues [20], le rapprochement est exposé dans [21].

Employer différentes distances produit naturellement des cartes de distances et des squelettes d'aspect et de propriétés différentes. Cela nous permet de choisir la distance la plus appropriée à une application donnée. Cela facilite de plus la comparaison des squelettes construits avec diverses distances. Dans la figure 9 on montre la géométrie des squelettes, ainsi que la forme recouverte très caractéristique. Evidemment la distance qui produit les meilleurs résultats est la plus isotrope, d_{5-7-11} .

Nous n'avons pas discuté des temps de calcul. Nous soulignons simplement la très grande rapidité du processus. Nous avons décrit les étapes séparément, mais il est naturellement possible de regrouper certaines opérations durant la même inspection de l'image.

Au niveau applicatif, un logiciel de caractérisation de matériaux fibreux a été développé. Le squelette pondéré est calculé, puis polygonalisé, pour aboutir à un graphe, duquel sont extraits des informations telles que la courbure des fibres, le diagramme des largeurs, etc.

L'emploi plus général du squelette pondéré pour la description de formes est développé dans [22,23].

Références

- 1 H. Blum, and R.N. Nagel, "Shape description using weighted symmetric axis features", *Pattern Recognition*, 10, 167-180 (1978).
- 2 L.P. Cordella and G. Sanniti di Baja, "An approach to the decomposition of complex figures", in *Digital Image Analysis*, S. Levialdi Ed., Pitman, 155-162 (1984).
- 3 A. Montanvert, "Medial line: graph representation and shape description", *Proc. 8th Int. Conf. on Pattern Recognition*, Paris, 430-432 (1986).
- 4 E. Thiel and A. Montanvert, "Shape splitting from medial lines using the 3-4 chamfer distance", in *Visual Form Analysis and Recognition*, C.Arcelli, L.P.Cordella and G. Sanniti di Baja, Eds., Plenum, New York, 537-546 (1992).
- 5 G. Sanniti di Baja, "Well-shaped, stable and reversible skeletons from the (3,4)-distance transform", *Journal of Visual Communication and Image Representation*, in press (1993).
- 6 C. Arcelli and M. Frucci, "Reversible skeletonization by (5,7,11)-erosion", in *Visual Form Analysis and Recognition*, C.Arcelli, L.P.Cordella and G. Sanniti di Baja, Eds., Plenum, New York, 21-28 (1992).
- 7 G. Borgefors, "Distance transformation in digital images", *Comput. Vision Graphics Image Process.*, 34, 344-371 (1986).
- 8 E. Thiel et A. Montanvert, "Etude et amélioration des distances du chanfrein pour l'analyse d'images", *revue Technique et Science Informatiques*, Hermès, 11.4, 9-41 (1992).
- 9 A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz, "Distance functions on digital pictures", *Pattern Recognition*, 1, 33-61 (1968).
- 10 E. Thiel and A.Montanvert, "Chamfer masks: discrete distance functions, geometrical properties and optimization", *Proc. 11th Int. Conf. on Pattern Recognition*, The Hague, 244-247 (1992).
- 11 P.E. Danielsson, "Euclidean distance mapping", *Computer Graphics and Image Processing*, 14, 227-248 (1980).
- 12 I. Ragnemalm, "Generation of Euclidean distance maps", *Thesis N° 206*, Dep. Electrical Eng., Linköping University, Sweden (1990).
- 13 C. Arcelli and G. Sanniti di Baja, "Euclidean skeleton via centre-of-maximal disc extraction", *Image and Vision Computing*, 11, 163-173 (1993).
- 14 L. Dorst, "Pseudo-Euclidean skeletons", *Proc. 8th Int. Conf. on Pattern Recognition*, Paris, 286-288 (1986).
- 15 A. Rosenfeld, "Arcs and curves in digital pictures", *J. ACM*, 20, 81-87 (1973).
- 16 C. Arcelli and G. Sanniti di Baja, "Weighted distance transforms: a characterization", in *Image Analysis and Processing II*, V. Cantoni et al. Eds., Plenum Press, 205-211 (1988).
- 17 D. Rutovitz, "Pattern recognition", *Journal of Royal Statist. Soc.*, 129, Series A, 504-530 (1966).
- 18 S.Yokoi, J.I. Toriwaki, T. Fukumura, "An analysis of topological properties of digitized binary pictures using local features", *Comput. Graph. Image Processing*, 4, 63-73 (1975).
- 19 J.M. Chassery et A. Montanvert, *Géométrie discrète en analyse d'images*, Hermès (1991).
- 20 D. Attali et A. Montanvert, "Squelettes et Diagrammes de Voronoï", *Rapport de recherche RR 922*, IMAG Grenoble, juillet 1993.
- 21 D. Attali et E. Thiel, "Du squelette discret ou continu", *3ème GDI, Colloque de Géométrie Discrète en Imagerie*, p. 236-244, Strasbourg sept 1993.
- 22 G. Sanniti di Baja and E. Thiel, "A multiresolution shape description algorithm", *Lectures Notes in Computer Science*, 719, 208-215, 5th CAIP in Budapest (sept 1993).
- 23 G. Sanniti di Baja and E. Thiel, "Shape description via weighted skeleton partition", *accepted for 7th ICIAP*, Bari sept 20-22 1993.