

Chapitre 5

Distances discrètes

5.1. Introduction

La notion de distance joue un rôle central en analyse d'image et description de formes. Elle intervient par exemple pour la mesure de la longueur ou de l'épaisseur des objets présents dans une image, pour la mesure de similarité entre formes et la mise en correspondance [BOR 88], dans les transformations de distances et la caractérisation de l'axe médian [ARC 93], pour guider le calcul du squelette [PUD 98], dans le diagramme de Voronoï généralisé [BOI 95], en morphométrie [ROM 00], en robotique [JAR 93], en granulométrie, en morphologie mathématique, etc.

De nombreuses familles de distances existent selon les espaces ou objets à mesurer considérés. Du point de vue applicatif sont préférées les distances à valeurs entières, pour le stockage et la facilité de calcul. Si dans certains cas la distance euclidienne peut-être manipulée directement (sous forme de nombres au carré ou vectorielle), il est crucial d'avoir d'autres outils théoriques et algorithmiques approximant certes la distance euclidienne mais possédant des avantages particuliers (simplicité et rapidité des algorithmes, notion de plus court chemin explicite, ...).

Une théorie des distances en géométrie discrète est donc importante pour exploiter les propriétés et algorithmes et montrer leur validité. De nombreux auteurs se sont attachés à définir des classes de distances discrètes, à les optimiser pour l'approximation de d_E , à proposer des algorithmes de transformations de distance (DT) qui calculent en chaque point la profondeur dans une forme, à établir des formules directes, dégager des propriétés générales et décrire la géométrie des boules de distance, enfin

Ce chapitre a été rédigé par Edouard THIEL et David COEURJOLLY.

définir des critères de régularité de la distance telles que la propriété de norme (en particulier la proportionnalité des distances, appelée homogénéité) ou encore l'unicité de chemins.

Nous commençons par rappeler au §5.2 les définitions de distance et de norme dans l'espace discret, et parlons aussi de la convexité des boules. Nous consacrons la section suivante (§5.3) à la famille de distances les plus utilisées en analyse d'image, il s'agit des distances et normes de chanfrein. Les principaux algorithmes de transformation de distance sont donnés au §5.4 pour les distances de chanfrein et la distance euclidienne. La dernière section (§5.5) aborde les distances géodésiques.

5.2. Axiomes de distance et norme discrètes

Les notions de distance et de norme sont généralement définies en algèbre dans l'espace continu. Nous présentons dans cette section les axiomes et notions utiles pour travailler dans l'espace discret.

5.2.1. Distances

La distance la plus naturellement utilisée est la *distance euclidienne*, définie pour deux points $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, \dots, q_n)$ de \mathbb{R}^n par

$$d_E(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}, \quad (5.1)$$

qui est à valeurs dans \mathbb{R} . Les distances à valeurs dans \mathbb{R} , \mathbb{Q} ou \mathbb{Z} sont appelées respectivement distances *réelles*, *rationnelles* ou *discrètes*. La notion de distance en elle-même est définie par les quatre axiomes suivants :

DÉFINITION 5.1 (Distance) Soit E un ensemble non vide et F un sous-groupe de \mathbb{R} . Une distance sur E à valeurs dans F , notée (d, E, F) , est une application $d : E \times E \rightarrow F$ vérifiant :

$$(positive) \quad \forall p, q \in E, \quad d(p, q) \geq 0; \quad (5.2)$$

$$(définie) \quad \forall p, q \in E, \quad d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q; \quad (5.3)$$

$$(symétrique) \quad \forall p, q \in E, \quad d(p, q) = d(q, p); \quad (5.4)$$

$$(triangulaire) \quad \forall p, q, r \in E, \quad d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q). \quad (5.5)$$

Classiquement, une distance d non définie (5.3), ne vérifiant que $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ pour tout $p, q \in E$, est appelée un *écart*. On peut être également amené à considérer des distances ne vérifiant pas la symétrie (5.4), par exemple dans les chaînes de caractères. Dans la littérature anglophone, les termes sont très souvent échangés : une distance est appelée une « métrique », un écart est une « semi-métrique », un écart ne vérifiant pas l'inégalité triangulaire (5.5) est une « distance ».

La distance euclidienne au carré d_E^2 est à valeurs entières pour deux points de \mathbb{Z}^n , mais cette fonction n'est pas une distance, car elle ne respecte pas l'inégalité triangulaire (5.5) : par exemple, soit $A = (1, 0 \cdots 0)$ et $B = (2, 0 \cdots 0)$; on a $d_E^2(O, A) = d_E^2(A, B) = 1$ et $d_E^2(O, B) = 4$, donc $d(O, B) \not\leq d(O, A) + d(A, B)$. Malgré cela, d_E^2 est beaucoup utilisée dans le domaine, en raison de propriétés remarquables, et d'algorithmes qui n'ont cessé d'être améliorés (voir §5.4.2). Les premières véritables distances discrètes à avoir été employées en analyse d'image sont

$$d_1(p, q) = |q_1 - p_1| + \cdots + |q_n - p_n|, \quad (5.6)$$

$$d_\infty(p, q) = \max\{|q_1 - p_1|, \dots, |q_n - p_n|\}. \quad (5.7)$$

Elles ont été introduites par ROSENFELD et PFALTZ dans [ROS 68]; leur définition coïncide bien avec la définition 5.1. Dans \mathbb{Z}^n , la distance d_1 est parfois appelée ℓ_1 -metric ou *grid metric*, et plus spécifiquement dans le cas $n = 2$, *Manhattan*, *city block*, *taxi-cab* ou *rectilinear metric*; la distance d_∞ est appelée ℓ_∞ -, *lattice*, *Chebyshev* ou *uniform metric*, et dans le cas $n = 2$, *chessboard* ou *square metric*. On a coutume de noter ces distances respectivement d_4 et d_8 dans \mathbb{Z}^2 , d_6 et d_{26} dans \mathbb{Z}^3 , à cause du nombre de points dans leur boule unité (hors le centre).

Toute combinaison linéaire positive de distances est une distance, ce qui permet de fabriquer une nouvelle fonction de distance à partir de deux autres. De nombreuses autres distances discrètes sont utilisées en analyse d'images; pour un tour d'horizon historique, voir [MEL 91]. Par exemple, les distances *octogonales* et *octogonales généralisées* (encore appelées distances de *séquences de voisinages*) sont obtenues en alternant d_1 et d_∞ au niveau des chemins; leur concept a été introduit dans [ROS 68, §3], puis étudié finement, en particulier en Inde (pour des références, voir [DAS 90]). Les distances discrètes les plus générales et les plus usitées dans le domaine sont les distances de chanfrein, que nous présentons au §5.3.

Après avoir parlé de la distance entre points, nous définissons maintenant la distance d'un point à un ensemble, utile dans la suite pour les transformations de distance. Sur le même principe d'un MIN est définie la distance entre ensembles; mais ni l'une ni l'autre de ces fonctions ne sont des distances. Une vraie distance entre ensembles est réalisée par la distance de HAUSDORFF. Soit (d, E, F) une distance, $p \in E$, X et Y des sous-ensembles compacts non vides de E ; on définit la distance entre p et X par

$$d(p, X) = \min\{d(p, q) : q \in X\}, \quad (5.8)$$

la distance entre X et Y par

$$d(X, Y) = \min\{d(p, q) : p \in X, q \in Y\} \quad (5.9)$$

et la distance de HAUSDORFF entre X et Y par

$$H_d(X, Y) = \max\left\{\max\{d(p, Y) : p \in X\}, \max\{d(q, X) : q \in Y\}\right\}. \quad (5.10)$$

5.2.2. Normes sur un module (espace vectoriel discret)

L'idée de norme consiste essentiellement à rajouter une notion d'homogénéité à une distance ; elle s'applique à des vecteurs et non à des points. La structure d'espace vectoriel (EV) est donc en principe nécessaire pour définir une norme.

Un EV est défini sur un corps commutatif K . Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors K^n est un EV sur K . Par exemple, \mathbb{R}^n est un EV sur \mathbb{R} et \mathbb{Q}^n est un EV sur \mathbb{Q} . Par contre, \mathbb{Z} est un anneau et non un corps, donc on ne peut pas définir \mathbb{Z}^n comme un EV sur \mathbb{Z} .

La solution est donnée par l'algèbre commutative, où la notion de *module* généralise celle d'EV. La définition d'un module sur un anneau commutatif A s'obtient tout simplement en remplaçant dans la définition des EV le corps K par l'anneau A . Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors A^n est un module sur A . Par exemple, \mathbb{Z}^n est un module sur \mathbb{Z} . Un EV est aussi un module, donc \mathbb{R}^n est un module sur \mathbb{R} et \mathbb{Q}^n est un module sur \mathbb{Q} .

Par rapport à un EV, on perd dans un module principalement l'inversibilité des scalaires ; il peut aussi y avoir des problèmes sur les bases. On rappelle les axiomes d'un module :

DÉFINITION 5.2 (Module) Soit A un anneau commutatif, d'éléments neutres notés 0 et 1. On dit qu'un ensemble E est un module sur A (ou A -module), noté (E, A) , si E est muni d'une loi interne (notée additivement) de groupe commutatif, et d'une loi externe (notée multiplicativement) satisfaisant :

$$(identité) \quad \forall \vec{x} \in E, \quad 1\vec{x} = \vec{x} ; \quad (5.11)$$

$$(associativité) \quad \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda, \mu \in A, \quad \lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x} ; \quad (5.12)$$

$$(distributivité) \quad \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda, \mu \in A, \quad (\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x} ; \quad (5.13)$$

$$(distributivité) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \lambda \in A, \quad \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y} . \quad (5.14)$$

Nous pouvons maintenant définir une norme sur un module, avec une notion d'homogénéité cohérente [THI 01, chap. 2] :

DÉFINITION 5.3 (Norme) Soit (E, A) un module et F un sous-groupe de \mathbb{R} . Une norme sur (E, A) à valeurs dans F est une application $g : E \rightarrow F$ vérifiant :

$$(positive) \quad \forall \vec{x} \in E, \quad g(\vec{x}) \geq 0 ; \quad (5.15)$$

$$(définie) \quad \forall \vec{x} \in E, \quad g(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} ; \quad (5.16)$$

$$(triangulaire) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad g(\vec{x} + \vec{y}) \leq g(\vec{x}) + g(\vec{y}) ; \quad (5.17)$$

$$(homogène) \quad \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in A, \quad g(\lambda\vec{x}) = |\lambda|g(\vec{x}) . \quad (5.18)$$

Dans l'homogénéité (5.18) on utilise le fait que $\forall \vec{x} \in E$ et $\forall \lambda \in A$ on a $\lambda\vec{x} \in E$. Classiquement, une norme g non définie (5.16), ne vérifiant que $g(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

pour tout $\vec{x} \in E$, est appelée une *semi-norme*. On dit que deux normes g et h sont *équivalentes* s'il existe des constantes A et B positives telles que $\forall \vec{x}$ on a $A g(\vec{x}) \leq h(\vec{x}) \leq B g(\vec{x})$. Toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

Le lemme suivant permet de lier normes et distances :

LEMME 5.1 *Soit $g : E \rightarrow F$ une norme sur A , alors l'application $d : E \times E \rightarrow F$ définie par $d(p, q) = g(q - p)$ est une distance (dite associée) qui de plus vérifie :*

$$(invariante\ par\ translation) \quad \forall p, q, r \in E, \quad d(p + r, q + r) = d(p, q); \quad (5.19)$$

$$(homogène) \quad \forall p, q \in E, \forall \lambda \in A, \quad d(\lambda p, \lambda q) = |\lambda| d(p, q). \quad (5.20)$$

Réciproquement, soit $d : E \times E \rightarrow F$ une distance vérifiant (5.19) et (5.20), alors l'application $g : E \rightarrow F$ définie par $g(q - p) = d(p, q)$ est une norme (dite induite).

La famille classique des normes ℓ_p est définie pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$p \in \mathbb{N}^*, \quad \ell_p(\vec{x}) = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}; \quad (5.21)$$

on a en particulier

$$\ell_1(\vec{x}) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \ell_2(\vec{x}) = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2}, \quad \ell_\infty(\vec{x}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (5.22)$$

On remarque que les distances associées à ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_∞ par le lemme 5.1 sont respectivement d_1 , d_E et d_∞ , introduites au §5.2.1. On a de plus l'inégalité

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \ell_\infty(\vec{x}) \leq \ell_2(\vec{x}) \leq \ell_1(\vec{x}) \leq n \ell_\infty(\vec{x}), \quad (5.23)$$

qui est un cas particulier de l'inégalité de JENSEN (voir par exemple [HAR 51]).

5.2.3. Boules et convexité

À partir d'une distance (ou d'une norme) on peut définir une boule; réciproquement, on peut déduire une norme à partir d'une boule, sous certaines conditions liées en particulier à la convexité. Définissons d'abord une boule de distance :

DÉFINITION 5.4 (Boule) *Soit (d, E, F) une distance, $p \in E$ et $r \in F$. La boule B_d de centre p et de rayon r est*

$$B_d(p, r) = \{ q \in E : d(p, q) \leq r \}. \quad (5.24)$$

Cette définition correspond topologiquement parlant à une boule fermée. Pour simplifier les notations on remplace souvent B_{d_\star} par B_\star ; par exemple on écrit B_1 , B_E et B_∞ à la place de B_{d_1} , B_{d_E} et B_{d_∞} . On représente figure 5.1 ces boules en dimension

2, qui sont en forme de losange, de cercle et de carré (voir aussi figure 5.3.a,b); ces boules sont emboîtées en raison de l'inégalité (5.23). Les boules des distances octogonales sont toujours des octogones en 2D et des polyèdres à 26 facettes au plus en 3D. Les boules des normes de chanfrein sont des polyèdres convexes.

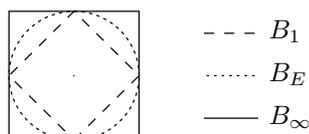


Figure 5.1. Les boules des distances d_1 , d_E et d_∞ en dimension 2.

Les boules de distances peuvent être ou ne pas être convexes. La notion de convexité est introduite au §1.5.3. La question de la convexité des boules de normes est liée aux fonctions convexes : soit X un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n ; une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une *fonction convexe* si

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \quad (5.25)$$

Si f est une fonction convexe sur un ensemble convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$, alors les ensembles $C_f(t) = \{x \in X : f(x) \leq t\}$ sont convexes, pour tout t réel. Les normes sur \mathbb{R}^n sont des fonctions convexes ; or \mathbb{R}^n est convexe donc les boules de normes sont toujours convexes. Soit C un convexe compact contenant O dans son intérieur et symétrique par rapport à O , alors la jauge

$$f_C(x) = \min\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : x \in \lambda C\} \quad (5.26)$$

est une norme. On peut donc construire des normes à partir de formes convexes C , par déformation d'un facteur λ qui assure la propriété d'homogénéité et la convexité des boules. Réciproquement, la convexité des boules d'une distance est nécessaire mais pas suffisante pour bien avoir une norme, en particulier discrète ; il faut prouver l'invariance par translation (elle est souvent obtenue par construction), et surtout l'homogénéité, qui est le problème le plus délicat.

5.3. Distances et normes de chanfrein

Une famille de distances discrète, probablement la plus importante en analyse d'image et en géométrie discrète, est la famille des distances de *chanfrein* (encore appelées distances *pondérées*). Nous rappelons les définitions au §5.3.1 et donnons des exemples au §5.3.2. Nous définissons ensuite les normes de chanfrein avec le bénéfice de pouvoir donner des formules directes au §5.3.3. Enfin la section §5.3.4 explique comment construire un masque de norme de chanfrein.

5.3.1. Masque, chemin et distance de chanfrein

L'idée de base des distances de chanfrein consiste à autoriser un ensemble de déplacements et à leur associer à chacun un coût ; ceci constitue le *masque* de chanfrein. Pour calculer la distance entre deux points p et q dans un ensemble E , on considère les *chemins* possibles de p à q , formés uniquement des déplacements autorisés, et leur coût, qui est la somme des coûts associés aux déplacements utilisés. La distance de chanfrein entre p et q est alors le minimum du coût des chemins possibles.

En théorie des graphes, cela consiste à considérer le graphe dont les sommets sont les points de E et les arêtes sont les adjacences définies par les déplacements autorisés (d'où l'idée de masque, qui est la cellule de base du graphe, copiée en chaque point) ; chaque arête est pondérée par le coût du déplacement associé. La distance de chanfrein correspond alors exactement à la *distance induite du graphe*. On montre que quelque soit le graphe pondéré, sa distance induite respecte les axiomes de distance ; donc tout masque de chanfrein induit une distance (voir aussi [THI 01, p. 47]).

L'idée de déplacement présuppose une structure sur l'ensemble E autorisant les déplacements, c'est-à-dire les vecteurs. Elle nécessite une loi interne additive sur les vecteurs (conservation dans E) et une loi externe multiplicative (par un scalaire dans un ensemble A). Nous présentons donc les distances de chanfrein dans un module (E, A) , ainsi que nous l'avons fait pour la définition d'une norme au §5.2.2. En pratique on utilise principalement le module $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$, ce qui signifie que l'espace E est \mathbb{Z}^n , que les vecteurs sont à coordonnées entières, et qu'on les multiplie par des scalaires entiers ($A = \mathbb{Z}$).

Soit (E, A) un module et F un sous-groupe de \mathbb{R} . Une *pondération* est un couple (\vec{v}, w) formé d'un vecteur $\vec{v} \in E$, appelé *déplacement*, et d'un scalaire $w \in F$, appelé *coût* ou *poids*, et encore noté $W(\vec{v})$. Un *masque* \mathcal{M} est un ensemble fini

$$\mathcal{M} = \{ (\vec{v}_i, w_i) \in E \times F \}_{1 \leq i \leq m} \quad (5.27)$$

de m pondérations. On dit qu'un masque \mathcal{M} est *central-symétrique* si

$$\forall (\vec{v}, w) \in \mathcal{M}, \exists (\vec{v}', w') \in \mathcal{M}, \quad \vec{v} = -\vec{v}' \quad \text{et} \quad w = w'. \quad (5.28)$$

DÉFINITION 5.5 (Masque de chanfrein) *Un masque de chanfrein est un masque central-symétrique, de poids strictement positifs et de déplacements non nuls, et qui contient au moins une base de E .*

Étant donné un masque de chanfrein \mathcal{M} , on appelle *chemin* une séquence

$$\mathcal{P} = \{ \alpha_1 \vec{v}_{i_1}, \dots, \alpha_k \vec{v}_{i_k} \}, \quad 1 \leq i_j \leq m, \alpha_j \in A^+ \quad (5.29)$$

de k déplacements \vec{v}_{i_j} de \mathcal{M} . On peut toujours écrire de façon équivalente

$$\mathcal{P} = \{ \lambda_1 \vec{v}_1, \dots, \lambda_m \vec{v}_m \}, \quad \lambda_i \in A^+ \quad (5.30)$$

en regroupant les déplacements identiques. On note $V(\mathcal{P})$ le déplacement total

$$V(\mathcal{P}) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m \quad (5.31)$$

du chemin \mathcal{P} et on note $W(\mathcal{P})$ son coût total

$$W(\mathcal{P}) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m. \quad (5.32)$$

Soit $p, q \in E$, on dit que \mathcal{P} est un chemin de p à q si $V(\mathcal{P}) = \vec{pq}$. Puisque \mathcal{M} contient au moins une base de E , on peut toujours construire un tel chemin. Le chemin \mathcal{P} est *minimal* s'il n'existe pas d'autre chemin \mathcal{Q} de p à q tel que $W(\mathcal{Q}) < W(\mathcal{P})$. La distance de chanfrein entre p et q est le coût d'un chemin minimal de p à q :

$$d_{\mathcal{M}}(p, q) = \min_{\mathcal{P}} \{ W(\mathcal{P}) : V(\mathcal{P}) = \vec{pq} \}. \quad (5.33)$$

Des exemples de chemins minimaux sont donnés figure 1.18. On peut enfin écrire la distance de chanfrein sans faire apparaître les chemins :

DÉFINITION 5.6 (Distance de chanfrein) Soit $\mathcal{M} = \{ (\vec{v}_i, w_i), 1 \leq i \leq m \}$ un masque de chanfrein, et soit $p, q \in E$. La distance de chanfrein $d_{\mathcal{M}}$ entre p et q est

$$d_{\mathcal{M}}(p, q) = \min \left\{ \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i w_i : \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{pq}, \lambda_i \in A^+ \right\}. \quad (5.34)$$

5.3.2. Exemples et origines des masques de chanfrein

Les pondérations d'un masque de chanfrein sont le plus souvent choisies parmi les vecteurs visibles, dans un souci d'efficacité et pour ne pas contrecarrer l'homogénéité. Soit $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{Z}^n$, on dit que le point P et que le vecteur \vec{OP} sont *visibles* (sous-entendu à l'origine) si $\text{pgcd}(P_1, \dots, P_n) = 1$.

En pratique, on se restreint à l'étude des vecteurs d'un quart de l'espace en 2D (ceux dont les coordonnées vérifient $x \geq 0$ et $y \geq 0$), ou d'un huitième de l'espace en 3D, les autres s'en déduisant par symétrie, dans le cas d'une grille rectangulaire (anisotrope), voire d'un huitième de l'espace en 2D et d'un quarante-huitième de l'espace en 3D, pour la grille carrée (on considère de plus les symétries par rapport aux diagonales). Sauf mention contraire on se place toujours dans la grille carrée.

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n . On note $G(\mathbb{Z}^n)$ le cône $0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1$ et $G(E) = E \cap G(\mathbb{Z}^n)$. Si E peut être entièrement reconstruit à partir de $G(E)$ par les symétries axiales et diagonales de la grille, on dit que E est *G-symétrique* et on appelle $G(E)$ le *générateur* de E . En général on ne considère que les masques de chanfrein G-symétriques, ce qui permet de simplifier l'étude et la notation.

Par exemple dans \mathbb{Z}^2 , les distances d_4 et d_8 peuvent être définies par des masques de chanfrein très simples, présentés dans la figure 5.2. Le masque de d_4 est composé de 4 vecteurs visibles pondérés à 1 : $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1), 1\}$. En ne listant que le générateur des masques, le masque de d_4 se réduit à $\{(1, 0), (1)\}$ et celui de d_8 à $\{(1, 0), (1, 1), (1)\}$. On peut encore alléger l'écriture des petits masques en notant $\langle a \rangle = \{(1, 0), a\}$, $\langle a, b \rangle = \{(1, 0), a, (1, 1), b\}$ et $\langle a, b, c \rangle = \{(1, 0), a, (1, 1), b, (2, 1), c\}$. On obtient ainsi le masque $\langle 1 \rangle$ pour d_4 et $\langle 1, 1 \rangle$ pour d_8 .

Une première famille de distances de chanfrein a été introduite par MONTANARI dans [MON 68], dans \mathbb{Z}^2 avec des poids réels. Les masques de MONTANARI ont une taille croissante : le masque M_n est limité par le voisinage en O de taille $(2n + 1) \times (2n + 1)$; par convention, celui associé au 4-voisinage est noté M_0 . Les vecteurs du masque sont les vecteurs visibles du voisinage ; le coût de chaque vecteur est sa norme euclidienne. Les premiers masques de MONTANARI sont donc $M_0 = \langle 1 \rangle$, $M_1 = \langle 1, \sqrt{2} \rangle$, $M_2 = \langle 1, \sqrt{2}, \sqrt{5} \rangle$, voir figure 5.2. MONTANARI présente dans le même article des formules directes de distances entre points, et les algorithmes de transformation de distance (DT) et de distance inverse (RDT) qui seront vus plus loin.

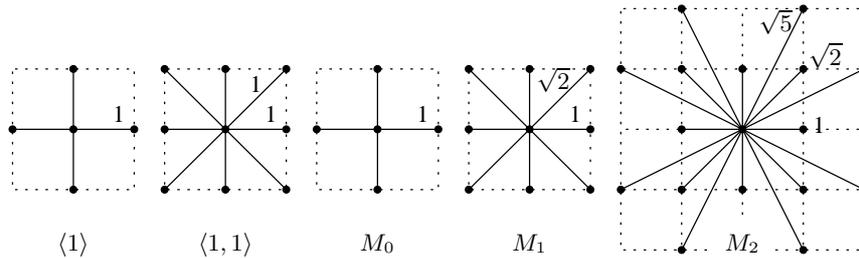


Figure 5.2. Masques de d_4 , d_8 et masques de MONTANARI M_0 , M_1 et M_2 .

L'idée d'utiliser des poids entiers est probablement due à HILDITCH *et al.* en 1969 avec le masque $\langle 2, 3 \rangle$. Il revient à approcher $\langle 1, \sqrt{2} \rangle$ par $\langle 1, 3/2 \rangle$, en divisant tout par un facteur d'échelle $a = 2$. On trouve une apparition ultérieure de $\langle 2, 3 \rangle$ par BARROW *et al.* en 1977, pour un algorithme de mise en correspondance appelé *chamfer matching* [BAR 77].

C'est BORGEFORS qui popularise les distances de chanfrein avec deux articles célèbres. Dans [BOR 84], elle passe en revue les DT séquentielles de la dimension 1 à la dimension 4 pour les principales distances utilisées en analyse d'images, dont les distances de connexité, les distances octogonales, la distance euclidienne et les distances de chanfrein. Elle limite son étude des masques de chanfrein en dimension n aux masques de taille 3, et propose un critère d'optimisation des poids pour approximer d_E . Elle préconise $\langle 3, 4 \rangle$ en 2D, $\{(0, 0, 1), 3, ((0, 1, 1), 4), ((1, 1, 1), 5)\}$ en

3D et $\{((0, 0, 0, 1), 3), ((0, 0, 1, 1), 4), ((0, 1, 1, 1), 5), ((1, 1, 1, 1), 6)\}$ en 4D. Dans [BOR 86], elle reprend son étude en 2D uniquement, sur les masques de taille 3, 5 et 7, et développe sa méthode d'optimisation. Elle préconise en particulier le masque $\langle 5, 7, 11 \rangle$, qui revient à approcher $\langle 1, \sqrt{2}, \sqrt{5} \rangle$ par $\langle 1, 7/5, 11/5 \rangle$. La boule de $\langle 3, 4 \rangle$ est un octogone, celle de $\langle 5, 7, 11 \rangle$ est un hexadécagone ; on montre des boules de petit rayon figure 5.3.c,d.

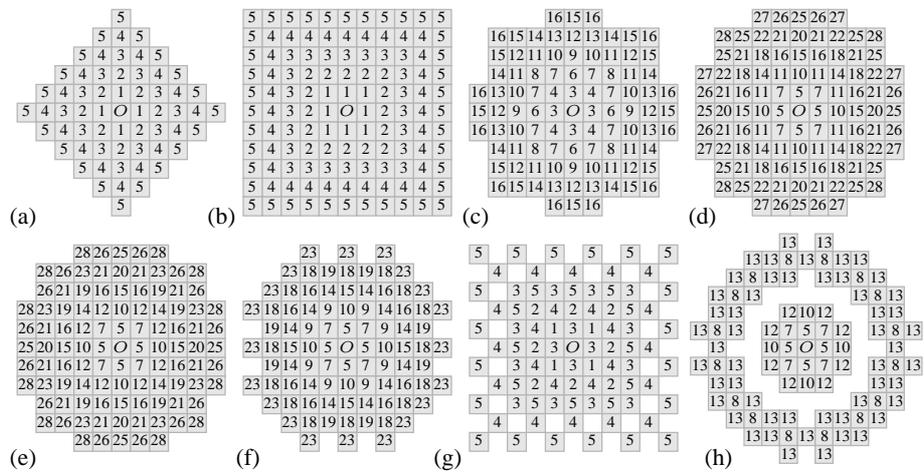


Figure 5.3. Galerie de boules de chanfrein 2D. (a) et (b) : Boules de d_4 et d_8 de rayon 5. (c) et (d) : Normes de chanfrein classiques $\langle 3, 4 \rangle$ de rayon 16 et $\langle 5, 7, 11 \rangle$ de rayon 28. (e) : Masque $\{((1, 0), 5), ((1, 1), 7), ((3, 1), 16)\}$ n'induisant pas une norme car non homogène, alors que toutes ses boules sont convexes (ici rayon 28). (f) : Masque $\langle 5, 7, 9 \rangle$ avec boule de rayon 23 ni homogène ni convexe. (g) : Masque $\langle 3, 1 \rangle$ dont la boule de rayon 5 est la superposition de deux réseaux. (h) : Masque $\{((1, 0), 5), ((1, 1), 7), ((4, 3), 8), ((5, 1), 8)\}$ avec boule de rayon 13 en couronne.

5.3.3. Normes de chanfrein et formules directes

Bien que tous les masques de chanfrein induisent une distance, ils peuvent avoir des comportements très différents, comme le montre la figure 5.3. On cherche les propriétés prévisibles d'un masque, telles que la géométrie des boules, leurs symétries, connexité, convexité et homogénéité, ainsi que des formules directes. La propriété la plus forte d'un masque est d'induire une norme.

La condition suivante de norme de chanfrein s'appuie sur le fait que tout masque de chanfrein \mathcal{M} induit une norme dans \mathbb{R}^n (avec des λ réels). L'idée consiste à dire que \mathcal{M} induit une norme dans \mathbb{Z}^n si les mêmes valeurs peuvent être obtenues avec des λ entiers, ce qui garanti alors l'homogénéité.

Soit $\mathcal{M} = \{(\vec{v}_i, w_i) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}\}_{1 \leq i \leq m}$ un masque de chanfrein et sa boule de chanfrein $B_{\mathcal{M}}(p, R) = \{q \in \mathbb{Z}^n : d_{\mathcal{M}}(p, q) \leq R\}$. On considère $\mathcal{M}' = \{O + \vec{v}_i/w_i\}_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^n$ et on pose $B'_{\mathcal{M}} = \text{conv}(\mathcal{M}')$. Alors $B'_{\mathcal{M}}$ est un polyèdre central-symétrique et convexe, dont les facettes séparent \mathbb{R}^n en cônes à l'origine O . Une facette \mathcal{F} de $B'_{\mathcal{M}}$ est générée par un sous-ensemble $\mathcal{M}|_{\mathcal{F}} = \{(\vec{v}_j, w_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ de \mathcal{M} ; si $\Delta_{\mathcal{F}} = \det\{\vec{v}_j\}_{1 \leq j \leq n}$ est tel que $|\Delta_{\mathcal{F}}| = 1$, alors \mathcal{F} est dite *unimodulaire*. Une condition suffisante de norme est donnée par :

LEMME 5.2 (Norme de chanfrein) *Si chaque facette de $B'_{\mathcal{M}}$ est unimodulaire, alors $d_{\mathcal{M}}$ induit une norme dans le module $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$.*

La preuve et une version plus générale du lemme sont données dans [THI 01, Thm. 4.4], ainsi qu'une analyse de la réciproque, non triviale. La section suivante présente une méthode de construction de normes de chanfrein qui s'appuie sur ce lemme.

Un attrait majeur des normes de chanfrein est qu'elle permettent d'écrire des formules directes : soit \mathcal{M} un masque de chanfrein induisant une norme, \mathcal{F} une facette de $B'_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}|_{\mathcal{F}} = \{(\vec{v}_j, w_j)\}_{1 \leq j \leq n}$; alors pour tout point $p = (y_1, \dots, y_n)$ dans le cône (O, \mathcal{F}) on a

$$d_{\mathcal{M}}(O, p) = y_1 \delta_1 + \dots + y_n \delta_n \quad (5.35)$$

où δ_k est appelé le *déplacement élémentaire* pour la coordonnée y_k , avec

$$\delta_k = \frac{(-1)^{n+k}}{\Delta_{\mathcal{F}}} \cdot \begin{vmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{1,k-1} & v_{1,k+1} & \dots & v_{1,n} & w_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n,1} & \dots & v_{n,k-1} & v_{n,k+1} & \dots & v_{n,n} & w_n \end{vmatrix}^T. \quad (5.36)$$

De plus, la boule de chanfrein $B_{\mathcal{M}}$ a la même géométrie que $B'_{\mathcal{M}}$ à un facteur d'échelle près, donc $\vec{\delta}_{\mathcal{F}} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ est un vecteur normal à la facette \mathcal{F} , et $B_{\mathcal{M}}$ est un polyèdre convexe, dont les facettes sont délimitées par les vecteurs du masque.

Les masques usuels $\langle 3, 4 \rangle$ et $\langle 5, 7, 11 \rangle$ respectent bien le lemme 5.2 et on obtient donc par (5.35) les formules directes suivantes dans le premier octant $0 \leq y \leq x$:

– Pour $\langle 3, 4 \rangle$ il n'y a qu'un seul cône qui est l'octant lui-même, dans lequel on a

$$d_{\langle 3,4 \rangle} = x \cdot \frac{(-1)^{2+1}}{1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}^T + y \cdot \frac{(-1)^{2+2}}{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}^T = 3x + y.$$

– Pour $\langle 5, 7, 11 \rangle$ il y a deux cônes dans le premier octant : le cône $\widehat{5, 11}$ où on a $d_{\langle 5,7,11 \rangle} = 5x + y$, et le cône $\widehat{11, 7}$ où $d_{\langle 5,7,11 \rangle} = 4x + 3y$.

5.3.4. Construction de normes et optimisation

La construction d'une norme de chanfrein se fait par une série d'étapes [THI 01], et lorsqu'une étape est impossible on revient en arrière et on opère un autre choix :

1) On choisit pour \mathcal{M} un ensemble de vecteurs visibles \vec{v}_i (en général dans $G(\mathbb{Z}^n)$) contenant au moins une base de \mathbb{Z}^n . Le nombre de vecteurs du masque influera proportionnellement sur le temps de calcul dans les transformations de distance. Les pondérations w_i des vecteurs deviennent les inconnues du problème.

2) On choisit une triangulation de B'_M (voir lemme 5.2) telle que chaque facette soit unimodulaire. Dans le cas général où les vecteurs de \mathcal{M} sont visibles, ces triangulations sont dites de FAREY, voir §2.6. Dans le cas 2D les triangulations sont uniques. En dimension supérieure on peut les construire par raffinements successifs.

3) On calcule les contraintes sur les poids pour que B'_M soit convexe. On peut procéder localement par un théorème de TIETZE.

4) On cherche un masque avec des poids entiers dans l'espace des contraintes.

Une autre approche est présentée par BORGEFORS dans [BOR 96] avec la notion de distance *régulière*, telle que tout chemin minimal (à l'ordre des vecteurs près) soit unique. Toute norme de chanfrein est régulière au sens de BORGEFORS, mais l'inverse n'est pas vrai ; les contraintes sur les poids sont ainsi obtenues par une étude de cas assez fastidieuse, et donnent souvent un résultat proche voire identique.

Par exemple, on obtient dans les deux approches les mêmes contraintes en 2D pour les masques $\langle a, b \rangle$, à savoir $a \leq b \leq 2a$, et pour les masques $\langle a, b, c \rangle$, qui sont $2a \leq c \leq 3a$, $3c \leq 6b \leq 4c$ et $c \leq a + b$.

L'optimisation d'un masque consiste à calculer, pour des vecteurs fixés, les poids qui permettent d'approximer le plus finement possible la distance euclidienne. Deux approches existent dans la littérature : l'une consiste à calculer des poids optimaux réels puis à chercher une approximation entière dans l'espace des contraintes (BORGEFORS *et al.*, VERWER [VER 91]) ; l'autre consiste à énumérer simplement les masques dans l'espace des contraintes.

L'erreur par rapport à la distance euclidienne peut être mesurée par différents critères, soit sur un hyperplan $x_i = M$ (BORGEFORS *et al.*), soit sur une sphère de rayon R , dans les deux cas en divisant par un facteur d'échelle ε (qui est en général le poids du plus petit vecteur du masque). Dans le premier cas l'erreur est $H = (d_M/\varepsilon - d_E)/M$, mais présente l'inconvénient d'être exagérée vers les diagonales. La plupart des autres auteurs préfèrent le second critère, mesuré de manière équivalente sur un hyperplan $x_i = M$ relativement à d_E ; l'erreur est alors $H = (d_M/\varepsilon - d_E)/d_E$.

Par exemple, l'erreur relative en 2D des distances d_4 , d_8 , $d_{\langle 3,4 \rangle}$ et $d_{\langle 5,7,11 \rangle}$ est respectivement 41,42%, 29,28%, 5,72% et 1,98%.

Enfin on peut étudier soit les extrêmes de l'erreur, soit son intégrale. Un raffinement supplémentaire consiste à calculer le facteur d'échelle réel ε optimal en connaissant l'amplitude de l'erreur (pour des références, voir [THI 94] [REM 01] [FOU 05]).

5.4. Transformations de distances

Étant donnée une distance d et une image binaire contenant une forme X , on appelle *image de distance* pour d , ou encore *transformée de distance*, et on note DT, une copie de l'image originale dans laquelle chaque point de X est étiqueté à sa distance à \bar{X} avec la formule (5.8). Le calcul de DT est appelé *transformation de distance*. Les distances de chanfrein sont spécialement conçues pour que la transformation soit efficace. La distance euclidienne a fait l'objet de nombreux algorithmes de transformation, et ce n'est que récemment qu'est apparu un algorithme aussi efficace.

5.4.1. Distances de chanfrein

La transformation de distance de chanfrein peut être calculée, et ceci quel que soit le masque de chanfrein considéré \mathcal{M} , de manière simple grâce à un algorithme en 2 passes sur une image, une passe avant ou *forward* et une passe arrière ou *backward*. Cet algorithme, proposé par [ROS 66, MON 68], a grandement participé au succès de ce type de transformation de distance. La passe avant consiste en un parcours des points de l'image dans un sens, par exemple le sens vidéo, tandis que la passe arrière parcourera les points de l'image dans le sens exactement inverse. Lors de la passe avant, la valeur de la distance en chaque point est mise à jour par rapport aux points déjà parcourus, ce qui revient à considérer le masque avant \mathcal{M}_{av} , et de même lors de la passe arrière avec le demi-masque arrière \mathcal{M}_{ar} .

Algorithme 5 : Transformation de distance de chanfrein en 2 passes.

```

Données : Image  $n \times n$ , contenant une forme  $X$ 
Résultat : Transformée de distance DT
// Passe avant
pour  $j := 0$  à  $n - 1$  faire
  pour  $i := 0$  à  $n - 1$  faire
    si  $(i, j) \in X$  alors
       $DT(i, j) := \min_{((x,y),w) \in \mathcal{M}_{av}} \{DT(i+x, j+y) + w\}$ 
    sinon
       $DT(i, j) := 0$ 
  // Passe arrière
pour  $j := n - 1$  à  $0$  faire
  pour  $i := n - 1$  à  $0$  faire
    si  $(i, j) \in X$  alors
       $DT(i, j) := \min \{DT(i, j), \min_{((x,y),w) \in \mathcal{M}_{ar}} DT(i+x, j+y) + w\}$ 

```

Une application importante de l'image de distance est l'extraction locale de l'axe médian ; la transformation de distance inverse (dont le résultat est noté RDT) est une variante de la transformation de distance, qui permet de retrouver un objet à partir de son axe médian (voir chapitre 9).

5.4.2. Distance euclidienne

Historiquement, les premiers algorithmes de transformation de distance euclidienne étaient basés sur une analogie avec l'algorithme en distance de chanfrein [DAN 80] ou encore sur une mise à jour locale [RAG 93]. Or, ces approches ne produisaient pas un étiquetage exact.

Pour avoir des algorithmes corrects, il a fallu revoir le processus et la plupart des techniques ultérieures utilisent des algorithmes séparables, c'est-à-dire des processus qui effectuent des calculs sur les lignes, puis sur les colonnes, (puis sur les rangées en dimension 3, etc) de l'image de manière indépendante [SAI 94]. Pour représenter la distance de manière exacte, nous utilisons le carré de cette dernière.

Reprenons l'énoncé de la transformée de distance euclidienne en dimension 2. Supposons une forme discrète X contenue dans une image de taille $n \times n$. Nous cherchons à calculer l'image $H = \{h(i, j)\}$ contenant le carré de la transformée en distance. De manière très simple, nous avons :

$$h(i, j) = \min \{ (i - x)^2 + (j - y)^2 : 0 \leq x, y < n \text{ et } (x, y) \in \overline{X} \} .$$

Cette écriture peut se décomposer dimension par dimension (voir Figure 5.4) :

1) construction de l'image $G = \{g(i, j)\}$ par un traitement indépendant des lignes, où pour une colonne j nous avons :

$$g(i, j) = \min_x \{ |i - x| : 0 \leq x < n \text{ et } (x, j) \in \overline{X} \} ;$$

2) enfin, H s'obtient par le processus suivant sur les colonnes :

$$h(i, j) = \min_y \{ g(i, y)^2 + (j - y)^2 : 0 \leq y < n \} .$$

L'algorithme issu de cette décomposition engendre une complexité linéaire en le nombre de points de l'image. En effet, l'étape 1 (voir algorithme 6) s'exécute en 2 parcours de l'image contenant X , donc en $O(n^2)$, et $O(n^d)$ en dimension d . Concernant la phase 2 (voir algorithme 7), la complexité est la même, mais l'algorithme requière une analyse plus précise, à partir du calcul de l'enveloppe inférieure d'une famille de paraboles : considérons la colonne $\{g(i, y)\}$ ($0 \leq y < n$) de l'image G de la phase 1. Si nous considérons l'ensemble des paraboles $\mathcal{F}_y^i(j) = g(i, y)^2 + (j - y)^2$, la colonne $\{h(i, y)\}$ après l'étape 2 est exactement la hauteur de l'enveloppe inférieure des paraboles $\{\mathcal{F}_y^i\}$ pour $0 \leq y < n$ (voir Figure 5.5).

Pour calculer l'enveloppe inférieure d'une famille de parabole, un algorithme existe pour rendre l'étape 2 linéaire au nombre de points discrets [HIR 96]. L'idée de cet algorithme (détaillé dans l'algorithme 7, inspiré de [MEI 00]) est de manipuler

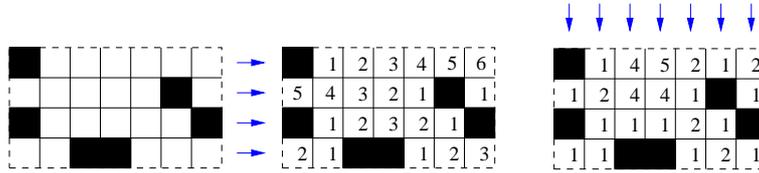


Figure 5.4. Illustration du calcul de la transformée en distance de manière séparable (dimension par dimension).

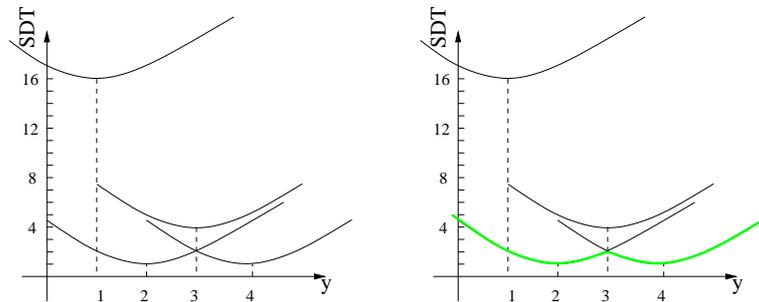


Figure 5.5. Illustration du calcul de l'enveloppe inférieure de paraboles : si $[16, 1, 4, 1]$ est une colonne de G après l'étape 1 (5^{ème} colonne dans la figure 5.4, valeurs élevées au carré), on obtient (à gauche) l'ensemble des paraboles $g(i, y)^2 + (j - y)^2$ et (à droite) la courbe épaisse correspondant à l'enveloppe inférieure ; le résultat est $[2, 1, 2, 1]$.

une pile pour mémoriser les paraboles présentes dans l'enveloppe inférieure en cours d'extraction. Ensuite, à chaque fois qu'une parabole est analysée, nous pouvons avoir à dépiler des paraboles de la pile. La complexité linéaire est obtenue par le fait que les paraboles ne sont considérées qu'une seule fois et que lorsqu'une parabole est dépilée, elle est supprimée du problème (elle ne fera pas partie de l'enveloppe). Deux fonctions sont utilisées dans cet algorithme : $\mathcal{F}_y^i(j) = g(i, y)^2 + (j - y)^2$ (ou plus simplement $\mathcal{F}_y(j)$ lorsque i est donné par le contexte) représentant l'ordonnée d'une parabole, et la fonction $\mathcal{Sep}^i(u, v)$ (ou simplement $\mathcal{Sep}(u, v)$) représente l'abscisse de l'intersection de deux paraboles consécutives :

$$\mathcal{Sep}(u, v) = (v^2 - u^2 + g(i, v)^2 - g(i, u)^2) \operatorname{div} (2(v - u))$$

Pour certaines applications, il est parfois nécessaire de mémoriser à chaque point de X , non seulement sa distance au complémentaire, mais aussi le ou les points discrets du complémentaire les plus proches. Une telle décomposition est appelée *feature transform*, tessellation de DIRICHLET [BOR 86] ou encore fonction bissectrice [COU 07]. Dans le cas où nous ne souhaitons qu'un seul représentant du complémentaire, nous pouvons très facilement modifier les algorithmes 6 et 7 pour résoudre ce

| Algorithme 6 : Phase 1 de SEDT. | Algorithme 7 : Phase 2 de SEDT. |
|---|--|
| <p>Données : X forme binaire dans une image $n \times n$</p> <p>Résultat : Carte g contenant l'EDT selon l'axe des x</p> <pre> pour $j \in [0..n-1]$ faire si $(0, j) \in \overline{X}$ alors $g(0, j) := 0;$ sinon $g(0, j) := \infty;$ pour $i := 1$ à $n-1$ faire si $(i, j) \in \overline{X}$ alors $g(i, j) := 0;$ sinon $g(i, j) := 1 + g(i-1, j);$ pour $i := n-2$ à 0 faire si $g(i+1, j) < g(i, j)$ alors $g(i, j) := 1 + g(i+1, j);$ </pre> | <p>Données : La carte de distance g donnée à la phase 1 de l'algorithme</p> <p>Résultat : La carte h des valeurs de la SEDT</p> <pre> pour $i \in [0..n-1]$ faire $q := 0; s[0] := 0; t[0] := 0;$ pour $j := 1$ à $n-1$ faire tant que $(q \geq 0)$ et $(\mathcal{F}_{s[q]}(t[q]) > \mathcal{F}_j(t[q]))$ faire $q := q-1;$ si $q < 0$ alors $q := 0; s[0] := j;$ sinon $w := 1 + \text{Sep}(s[q], j);$ si $w < n$ alors $q := q+1; s[q] := j;$ $t[q] := w;$ pour $j := n-1$ à 0 faire $h(i, j) := \mathcal{F}_{s[q]}(j);$ si $j = t[q]$ alors $q := q-1;$ </pre> |

Figure 5.6. Algorithmes pour le calcul de la transformée en distance euclidienne d'un objet discret en dimension 2.

problème avec la même complexité. Si nous voulons obtenir tous les points du complémentaire, donc équidistants du point de X considéré, les algorithmes présentés peuvent aussi être modifiés mais nous avons de manière évidente un sur-coût proportionnel au nombre de points équidistants [COU 07]. Remarquons que cette transformation correspond exactement à l'intersection entre l'espace discret \mathbb{Z}^2 et le diagramme de Voronoï continu [PRE 85, BER 00] des points du complémentaire.

Pour conclure sur ce paragraphe, nous avons présenté des algorithmes efficaces (nombre de passes constant sur l'image) pour obtenir un étiquetage en distance euclidienne exact, ce qui permet une description complètement isotropique des objets discrets.

5.4.3. Quelques exemples

La figure 5.7 montre des exemples de transformées de distance. Dans le chapitre 1, la figure 1.19 du chapitre présentait deux représentations classiques de la transformée en distance : sous forme de fonction de hauteur ou sous une dynamique de niveaux de gris cyclique réduite pour mieux observer les fronts de propagation. En dimension 3 (voir figure 5.8), la visualisation se fait par coupe dans le volume.

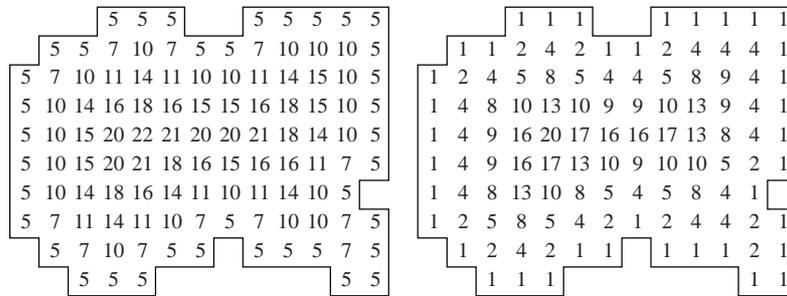


Figure 5.7. DT pour $\langle 5, 7, 11 \rangle$ (à gauche) et d_E^2 (à droite).

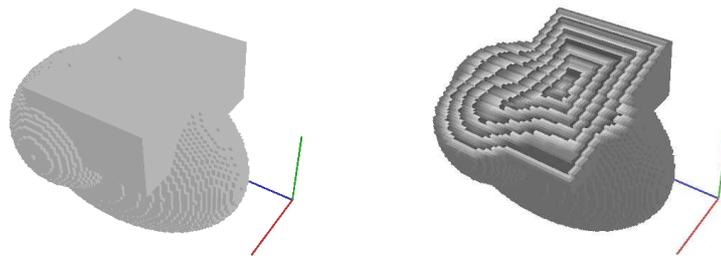


Figure 5.8. Représentation d'une transformée en distance 3D par coupe dans le volume (ici avec une palette circulaire de niveaux de gris).

5.5. Distances géodésiques

5.5.1. Visibilité dans un domaine discret et distance géodésiques

En géométrie algorithmique classique, la notion de visibilité se définit de la manière suivante : étant donné un domaine avec des obstacles polygonaux, un point est *visible* d'un autre si le segment entre ces deux points ne rencontre aucun obstacle. En se basant sur cette définition, nous pouvons définir la notion de chemin géodésique. Considérons deux points et le graphe de visibilité dont les sommets sont les sommets des obstacles polygonaux et les deux points considérés. Les arêtes de ce graphe correspondent à la relation binaire de visibilité, et sont pondérées par la distance euclidienne. Ainsi, le chemin géodésique (ou plus court chemin) entre les deux points

correspond au plus court chemin dans le graphe précédent [BER 00, COR 90]. La figure 5.9 illustre ces différentes définitions.

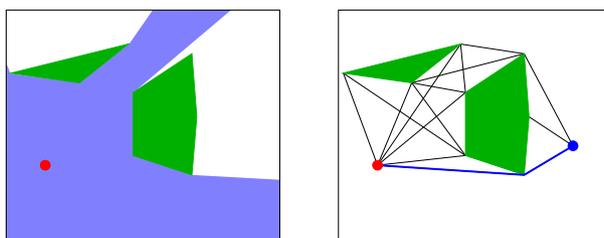


Figure 5.9. Illustration des définitions : à gauche, tous les points dans la zone bleue sont visibles du point rouge. À droite, construction du graphe de visibilité et du plus court chemin (en gras) entre le point rouge et le point bleu.

En géométrie discrète, nous considérons un domaine dont les obstacles sont des ensembles de pixels connexes. Une première définition de visibilité discrète a été proposée par [SOI 99]. Celle-ci se base sur le tracé de droite de [BRE 65] : le test de visibilité consiste à tracer le segment de BRESENHAM entre les deux pixels et à vérifier qu'aucun obstacle n'est rencontré. En se basant sur cette définition, SOILLE propose aussi un calcul de chemin géodésique, nous reviendrons sur cette approche ultérieurement. En utilisant un processus de calcul de visibilité non plus basé sur une droite de BRESENHAM mais sur l'ensemble des droites joignant deux pixels, avec une modélisation de cela basée sur la préimage associée (voir paragraphe , une version optimisée de ce test de visibilité a été proposée dans [COE 04].

5.5.2. Transformée en distance géodésique basée sur une distance de chanfrein

Étant donné un objet discret X représentant le domaine (\overline{X} correspondra donc aux obstacles ainsi qu'au fond) et un point $A \in X$, la transformée en distance géodésique consiste à étiqueter tous les points de X par leur distance géodésique minimale à A . Dans le cas de la distance géodésique, les approches basées sur des masques offrent une solution très efficace. En effet, à partir du masque \mathcal{M} et de ses déplacements élémentaires considérés, nous pouvons construire un graphe d'adjacence pondéré sur lequel nous pouvons appliquer un algorithme classique de plus court chemin dans un graphe comme celui de DIJKSTRA [PIP 87]. Pour implémenter cet algorithme de plus court chemin, nous pouvons utiliser des *files de priorité* (ou *bucket lists* en anglais). Cette structure est classique en algorithmique (voir par exemple [COR 90]) et son utilisation pour le calcul de distance géodésique par masque a été proposée par [VER 89]. Celle-ci nous permet d'avoir un algorithme à coût uniforme pour l'étiquetage en distance géodésique.

Cette structure, illustrée figure 5.10, est construite de la façon suivante : nous considérons une collection de files FIFO indicées par un entier d . Pour notre problème, tous les pixels se trouvant dans la file d'indice d sont à une distance d de notre point d'origine. Le principe de l'algorithme de plus court chemin basé sur cette technique est le suivant : l'algorithme commence par ajouter le point A dans la file d'indice 0. Ensuite, à chaque étape on dépile un pixel P , encore non visité, de la file d'indice minimum non vide, notée d_{min} , et pour chaque voisin N de P dans le masque considéré, nous ajoutons n à la file d'indice $d_{min} + W(\overrightarrow{PN})$, où $W(\overrightarrow{PN})$ correspond au poids associé au déplacement \overrightarrow{PN} dans le masque de chanfrein utilisé. Cette structure permet donc

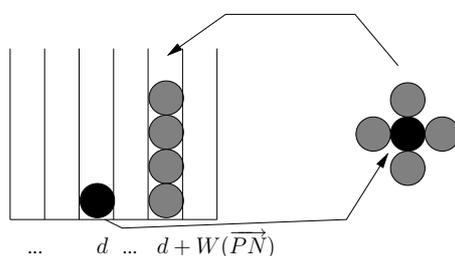


Figure 5.10. Structure de files de priorité : ensemble de files FIFO indicées par la distance au pixel source A .

une implémentation très efficace de l'algorithme de DIJKSTRA. De plus, [VER 89] proposent une gestion des allocations des files très efficaces, par exemple, nous pouvons réutiliser les files de manière circulaire une fois que celles-ci sont vides.

5.5.3. Transformée en distance géodésique basée sur une visibilité discrète

L'idée principale de l'algorithme est la suivante : pour tous les points visibles depuis le point source A , l'étiquetage en distance géodésique est trivial puisqu'il correspond exactement à la distance euclidienne calculée à partir du vecteur de déplacement (d_x, d_y) . Par contre, si un point P n'est pas visible depuis la source, nous initialisons un nouveau processus d'étiquetage en visibilité à partir de P . Ainsi, nous étiquetons en distance les pixels visités, visibles de P , par la distance entre P et la source originale A à laquelle nous ajoutons la distance euclidienne entre ces points et P .

Comme pour les approches basées sur un masque de chanfrein, à chaque instant de l'algorithme il nous faut aussi gérer une structure de files FIFO pour qu'à chaque pixel soit bien stockée la valeur minimale en distance géodésique. Pour plus de détails sur les algorithmes basés sur cette visibilité discrète, vous pouvez vous référer à [SOI 99, COE 04].

5.5.4. Transformée en distance géodésique en dimension supérieure

Dans la cas des approches basées sur une distance de chanfrein, la généralisation des algorithmes de transformée est triviale : nous restons sur une structure de graphe pondéré dans lequel nous allons lancer un algorithme de plus court chemin en utilisant la structure de files FIFO (voir [KIR 93] par exemple). Pour les approches basées sur la visibilité discrète, les techniques d'optimisation proposées dans [COE 04] ne peuvent plus s'appliquer en dimension 3 et plus. Cependant l'algorithme basé sur un tracé de droite explicite comme dans [SOI 94] est généralisable. Le paragraphe suivant présente quelques illustrations en dimension 3.

5.5.5. Quelques exemples

La figure 5.11 présente tout d'abord quelques résultats dans le cas 2D. Elle permet aussi d'illustrer une comparaison entre la technique basée sur la visibilité discrète et les approches basées sur des masques de chanfrein naïfs (d_1 et d_∞). La figure 5.12 présente une transformation en distance géodésique en dimension 3 en utilisant un calcul de visibilité basé sur un tracé de droite de BRESENHAM 3D [COE 04].

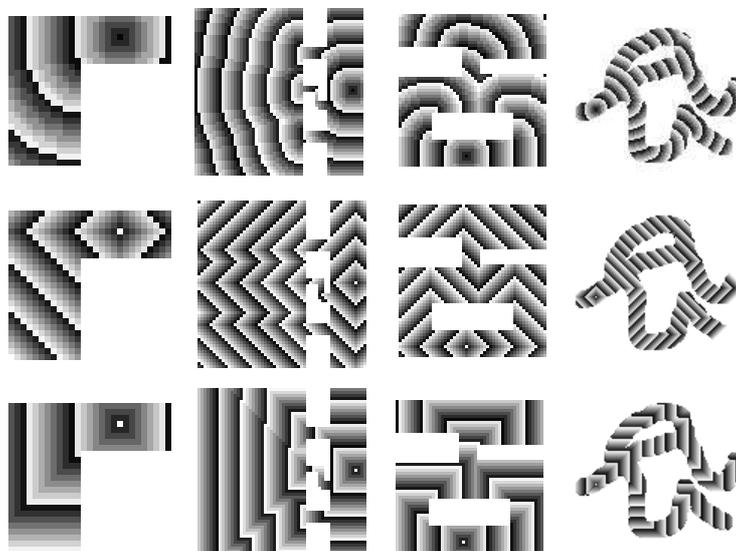


Figure 5.11. Analyse expérimentale de l'étiquetage en distance géodésique : de haut en bas : l'étiquetage avec la distance géodésique basée sur la distance euclidienne, avec la distance d_1 et enfin avec la distance d_∞ .

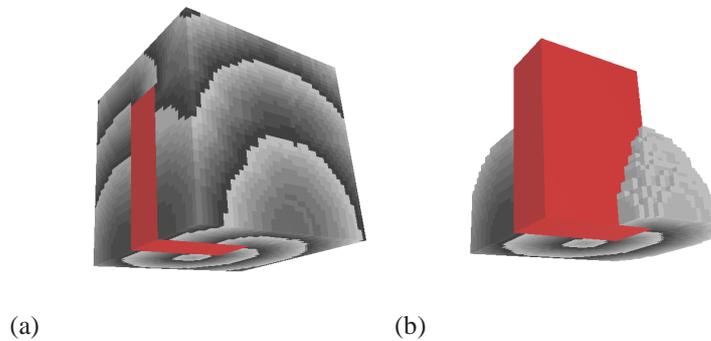


Figure 5.12. Exemple d'étiquetage en distance géodésique 3D : (a) étiquetage en distance géodésique complet et (b) seuillage de la distance pour mieux observer les structures internes du front d'onde.

5.6. Conclusion

Ce chapitre nous a permis de définir proprement les notions de distances et de normes dans l'espace discret, et de passer en revue les principales distances discrètes utilisées en analyse d'image, en particulier les distances de chanfrein. La recherche est très active dans le domaine théorique comme dans celui des algorithmes de transformation de distances ainsi que le montrent les résultats récents, avec de nouveaux algorithmes pour la distance euclidienne au carré, exacts en toute dimension et linéaires en le nombre de points de l'image. Ces progrès contribuent directement à la compréhension des propriétés de l'axe médian, étudié au chapitre 9.

5.7. Bibliographie

- [ARC 93] ARCELLI C., SANNITI DI BAJA G., « Euclidean skeleton via centre-of-maximal-disc extraction », *Image and Vision Computing*, vol. 11, n°3, p. 163–173, April 1993.
- [BAR 77] BARROW H., TANENBAUM J., BOTLES R., WOLF H. C., « Parametric correspondence and chamfer matching : Two new techniques for image matching », *Proceedings of 5th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, Cambridge, MA, p. 659-663, 1977.
- [BER 00] DE BERG M., VAN KREVELD M., OVERMARS M., SCHWARZKOPF O., *Computational Geometry*, Springer, February 2000.
- [BOI 95] BOISSONNAT J.-D., YVINEC M., *Géométrie algorithmique*, Ediscience international, 1995.
- [BOR 84] BORGEFORS G., « Distance transformations in arbitrary dimensions », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 27, p. 321–345, February 1984.
- [BOR 86] BORGEFORS G., « Distance Transformations in Digital Images », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 34, n°3, p. 344–371, February 1986.

- [BOR 88] BORGEFORS G., « Hierarchical Chamfer Matching : A Parametric Edge Matching Algorithm », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 10, n° 6, p. 849–865, november 1988.
- [BOR 96] BORGEFORS G., « On Digital Distance Transforms in Three Dimensions », *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 64, n° 3, p. 368–376, November 1996.
- [BRE 65] BRESENHAM J. E., « Algorithm for computer control of a digital plotter », *IBM System Journal*, vol. 4, p. 25-30, 1965.
- [COE 04] COEURJOLLY D., MIGUET S., TOUGNE L., « 2D and 3D Visibility in Discrete Geometry : an Application to Discrete Geodesic Paths », *Pattern Recognition Letters*, vol. 25, n° 5, p. 561–570, april 2004.
- [COR 90] CORMEN T., LEISERSON C., RIVEST R., *Introduction à l'algorithmique*, Dunod, 1990.
- [COU 07] COUPRIE M., COEURJOLLY D., ROUR Z., « Discrete bisector function and Euclidean skeleton in 2D and 3D », *Image and Vision Computing*, 2007.
- [DAN 80] DANIELSSON P.-E., « Euclidean Distance Mapping », *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 14, p. 227–248, 1980.
- [DAS 90] DAS P., CHATTERJI B., « Octogonal distances for digital pictures », *Information Sciences*, vol. 50, p. 123-150, 1990.
- [FOU 05] FOUARD C., MALANDAIN G., « 3-D chamfer distances and norms in anisotropic grids », *Image and Vision Computing*, vol. 23, n° 2, p. 143–158, February 2005.
- [HAR 51] HARDY G., LITTLEWOOD J., PÓLYA G., *Inequalities*, Cambridge University Press, London, 1951.
- [HIR 96] HIRATA T., « A unified linear-time algorithm for computing distance maps », *Information Processing Letters*, vol. 58, n° 3, p. 129–133, mai 1996.
- [JAR 93] JARVIS R., « Distance Transform Based Path Planning For Robot Navigation », ZHENG Y., Ed., *Recent Trends in Mobile Robots*, vol. 11 de *Robotics and Automated Systems*, p. 3-31, World Scientific, 1993.
- [KIR 93] KIRYATI N., SZÉKELY G., « Estimating shortest paths and minimal distances on digitized three-dimension surfaces », *Pattern Recognition*, vol. 26, n° 11, p. 1623–1637, 1993.
- [MEI 00] MEIJSTER A., ROERDINK J., HESSELINK W. H., « A general algorithm for computing distance transforms in linear time », *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, Kluwer, p. 331–340, 2000.
- [MEL 91] MELTER R., « A survey of digital metrics », *Contemporary Mathematics*, vol. 119, p. 95-106, 1991.
- [MON 68] MONTANARI U., « A method for obtaining skeletons using a quasi-Euclidean distance », *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 15, p. 600–624, 1968.
- [PIP 87] PIPER J., GRANUM E., « Computing Distance Transformations in Convex and Non-Convex Domains », *Pattern Recognition*, vol. 20, p. 599–615, 1987.

- [PRE 85] PREPARATA F. P., SHAMOS M. I., *Computational Geometry : An Introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [PUD 98] PUDNEY C. J., « Distance-Ordered Homotopic Thinning : A Skeletonization Algorithm for 3D Digital Images », *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 72, n°3, p. 404–413, December 1998.
- [RAG 93] RAGNEMALM I., The Euclidean Distance Transform, PhD thesis, Linköping University, Linköping, Sweden, 1993.
- [REM 01] REMY E., Normes de chanfrein et axe médian dans le volume discret, Thèse de Doctorat, Univ. de la Méditerranée, Aix-Marseille 2, Dec 2001, <http://www.iut-arles.up.univ-mrs.fr/eremy/Rech/These/> .
- [ROM 00] ROMERA E., CUISENAIRE O., DENEJ J., DELBEKE J., MACQ B., VERAART C., « Automatic morphometry of nerve histological sections », *Journal of neuroscience methods*, vol. 97, n°2, p. 111-122, 2000.
- [ROS 66] ROSENFELD A., PFALTZ J., « Sequential Operations in Digital Picture Processing », *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 13, n°4, p. 471–494, October 1966.
- [ROS 68] ROSENFELD A., PFALTZ J., « Distance functions on digital pictures », *Pattern Recognition*, vol. 1, p. 33-61, 1968.
- [SAI 94] SAITO T., TORIWAKI J. I., « New algorithms for Euclidean distance transformations of an n -dimensional digitized picture with applications », *Pattern Recognition*, vol. 27, p. 1551–1565, 1994.
- [SOI 94] SOILLE P., « Generalized geodesy via geodesic time », *Pattern Recognition Letters*, vol. 15, n°12, p. 1235–1240, décembre 1994.
- [SOI 99] SOILLE P., *Morphological Image Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [THI 94] THIEL E., Les distances de chanfrein en analyse d'images : fondements et applications, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, Sept 1994, <http://www.lif-sud.univ-mrs.fr/~thiel/these> .
- [THI 01] THIEL E., Géométrie des distances de chanfrein, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille 2, Déc 2001, <http://www.lif-sud.univ-mrs.fr/~thiel/hdr> .
- [VER 89] VERWER B. J. H., VERBEEK P. W., DEKKER S. T., « An Efficient Uniform Cost Algorithm Applied to Distance Transforms », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, n°4, p. 425–429, avril 1989.
- [VER 91] VERWER B., Distance transforms : metrics, algorithms and applications, PhD thesis, Technische Universiteit, 1991.