Université de Provence LST 2ème année

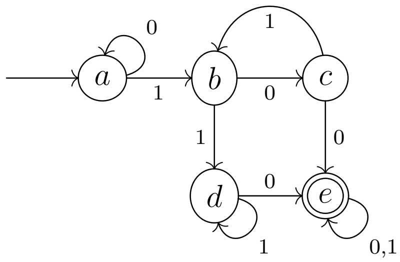
Langages et Automates

Partiel du 2 mars 2010

Durée : 2h - Documents interdits

Les 5 exercices sont indépendants.

1. Automate et expressions régulières. On considère l'automate $\mathcal{A} = (V, Q, \delta, q_0, F)$ suivant.



$i)$ Expliciter V, Q, δ, q_0 et F (on représentera δ par sa table de transition).

$ii)$ Donner 4 mots acceptés par $\mathcal{A}$ et 4 mots refusés par $\mathcal{A}$.

$iii)$ Donner une expression régulière α dénotant $L(\mathcal{A})$.

$iv)$ L'expression régulière suivante dénote-t-elle $L(\mathcal{A})$?

$$\beta = (0+1)^*1(0+1)0(0+1)^*$$

(Vous tenterez d'argumenter votre réponse à cette question.)

2. Expressions régulières et automates. Pour chacune des expressions régulières qui suivent, dessinez un automate reconnaissant le langage qu'elle dénote :

$$\alpha = aab\,; \qquad \beta = abba + bbab\,; \qquad \gamma = (aba)^* + (bab)^*.$$

3. Complémentaire de langages reconnaissables. Montrer que si un langage $L \subseteq V^*$ est reconnaissable, il en va de même de son complémentaire $V^* \setminus L$.

4. Vrai ou Faux. Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en argumentant brièvement.

$i)$ Tout langage régulier est infini.

$ii)$ Tout langage non régulier est infini.

$iii)$ Il y a une infinité de langages réguliers.

$iv)$ Il y a une infinité de langages non réguliers.

$v)$ Tout langage inclus dans un langage régulier est régulier.

5. Automate des résiduels. Pour chacun de ces langages, contruire son automate des résiduels :

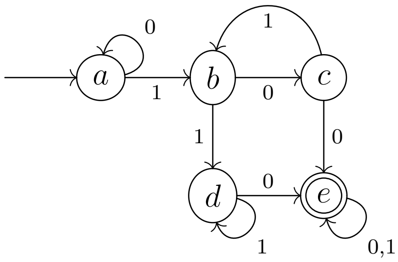
$i)$ $(aa + bb + cc)(a + b + c)^*$.

$ii)$ $(a + b)^*aba$.

Université de Provence LST 2ème année

Langages et Automates
Corrigé du partiel du 2 mars 2010

1. Automate et expressions régulières. $\mathcal{A} = (V, Q, \delta, q_0, F)$:



$i)$ $V = \{0, 1\}$, $Q = \{a, b, c, d, e\}$, $q_0 = a$ et $F = \{e\}$

δ	0	1
a	a	b
b	c	d
c	e	b
d	e	d
e	e	e

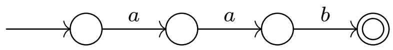
$ii)$ $0100, 101101, 11001 \in L(\mathcal{A})$; $001, 1111, 01010 \notin L(\mathcal{A})$;

$iii)$ $L(\mathcal{A})$ est dénoté par $0^*1(10)^*(11^*0 + 00)(0 + 1)^*$.

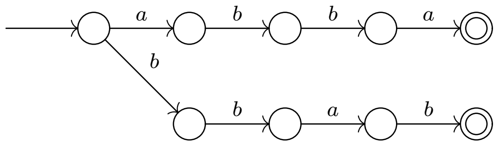
$iv)$ L'expression $\beta = (0 + 1)^*1(0 + 1)0(0 + 1)^*$ dénote l'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ qui contiennent le facteur 100 ou le facteur 110. On a bien $L(\beta) = L(\mathcal{A})$. L'inclusion $L(\beta) \subseteq L(\mathcal{A})$ tient au fait que tout mot de la forme $u100v$ ou $u110v$, avec $u, v \in \{0, 1\}^*$, fait passer de l'état initial a à l'état final e, parce que les deux facteurs 100 et 110 font passer de *n'importe quel* état à e, et parce que toute transition à partir de e aboutit à e. L'inclusion réciproque découle du fait, facile à constater, qu'un calcul de $\mathcal{A}$ menant de a à e comporte nécessairement une transition $p \xrightarrow{1} b$, pour $p = a$ ou $p = c$, suivie des transitions $b \xrightarrow{0} c \xrightarrow{0} e$ ou d'une suite de transition de la forme $b \xrightarrow{1} d \xrightarrow{1} d \xrightarrow{1} \ldots \xrightarrow{1} d \xrightarrow{0} e$. Le premier cas exige que le mot lu contienne le facteur 100, le deuxième cas suppose qu'il contienne 110. D'où le résultat.

2. Expressions régulières et automates.

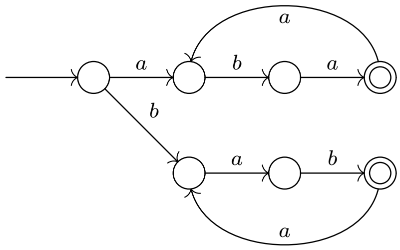
aab :



$abba + bbab$:



$(aba)^* + (bab)^*$:



3. Complémentaire de langages reconnaissables. Si L est reconnu par l'automate $\mathcal{A} = (V, Q, \delta, q_0, F)$, alors $V^* \setminus L$ est reconnu par $\mathcal{A} = (V, Q, \delta, q_0, Q \setminus F)$.

4. Vrai ou Faux. Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en argumentant brièvement.

$i)$ *Tout langage régulier est infini*. FAUX : la définition même de REG annonce que les langages finis sont tous réguliers.

$ii)$ *Tout langage non régulier est infini*. VRAI : par ce qui précède.

$iii)$ *Il y a une infinité de langages réguliers*. VRAI : par exemple, les langages finis sont tous réguliers et ils sont en nombre infini.

$iv)$ *Il y a une infinité de langages non réguliers*. VRAI : on a vu en TD que l'ensemble des langages non réguliers est infini et même, non dénombrable.

$v)$ *Tout langage inclus dans un langage régulier est régulier*. FAUX : tout langage non régulier sur l'alphabet $\{a, b\}$ est contenu dans $(a + b)^*$, qui est régulier.

5. Automate des résiduels.

$i)$ On écrit tous les résiduels de L en entourant un langage quand il apparaît pour la première fois.

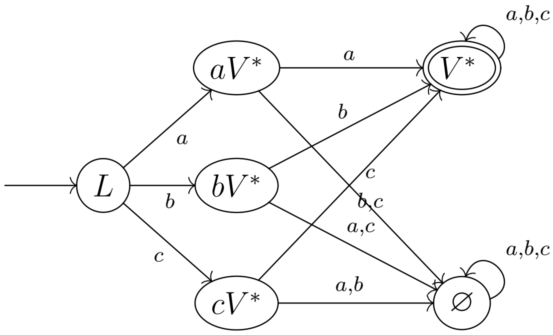
$\boxed{L/\varepsilon = L} = (aa + bb + cc)(a + b + c)^*$;

$\boxed{L/a = a(a+b+c)^*}$; $\boxed{L/b = b(a+b+c)^*}$; $\boxed{L/c = c(a+b+c)^*}$;

$L/aa = L/bb = L/cc \boxed{= (a+b+c)^*}$;

$L/ab = L/ac = L/ba = L/bc = L/ca = L/cb \boxed{= \varnothing}$.

Ainsi, L comporte 6 résiduels distincts, qui donnent lieu à l'automate suivant :



$ii)$ $\boxed{L/\varepsilon = L} = (a+b)^*aba$.

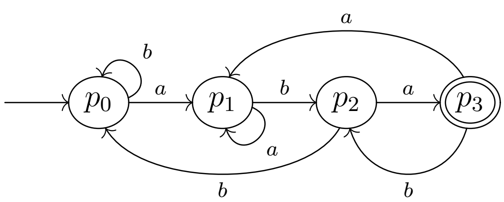
$\boxed{L/a = ba + L}$; $L/b = L$;

$L/aa = ba + L$; $\boxed{L/ab = a + L}$;

$\boxed{L/aba = \varepsilon + ba + L}$; $L/abb = L$;

$L/abaa = ba + L$; $L/abab = a + L$.

On obtient l'automate des résiduels suivant :



où $p_0 = L$, $p_1 = ba + L$, $p_2 = a + L$ et $p_3 = \varepsilon + ba + L$,