Licence Math-Info
2010 / 2011

Langages & Automates

TD nº 1

Généralités

Exercice 1.1 Déterminer les facteurs, les préfixes et les suffixes du mot $u = abac$.

Exercice 1.2

1. Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca, $aabgjdd$, $titi$, $babc$.
2. Donner l'ensemble des couples (u,v) tels que $uv = abaac$.
3. Calculer LM pour les ensembles suivants :
   - $L = \{a, ab, bb\}$ et $M = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
   - $L = \varnothing$ et $M = \{a, ba, bb\}$;
   - $L = \{\varepsilon\}$ et $M = \{a, ba, bb\}$;
   - $L = \{aa, ab, ba\}$ et $M = \{a, b\}^*$.

Exercice 1.3 Prouver les assertions suivantes, où V est un alphabet, $a, b \in V$ et $u, v, x, y \in V^*$.

1. $au = bv \Rightarrow a = b$ et $u = v$;
2. $xu = xv \Rightarrow u = v$;
3. $(xu = yv \wedge |x| = |y|) \Rightarrow u = v$;
4. $(xu = yv \wedge |x| \leq |y|) \Rightarrow$ (x est préfixe de y et v est suffixe de u).

Exercice 1.4 Soient u et v deux mots. Montrer que $uv = vu$ si et seulement si il existe $\gamma \in V^*$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $u = \gamma^p$ et $v = \gamma^q$.

Exercice 1.5 Montrer que $(uv)^R = v^R u^R$.

Exercice 1.6 Montrer que :

1. Il n'existe pas de mot $x \in \{a, b\}^*$ tel que $ax = xb$.
2. Il n'existe pas de mots $x, y \in \{a, b\}^*$ tel que $xay = ybx$.

Exercice 1.7 Soient A, B, C trois langages sur un même alphabet. Prouver les propriétés suivantes, annoncées dans le Lemme 11 du cours :

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $(A^*)^* = A^*$.
3. $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$.
4. $A(B \cup C) = AB \cup AC$.
5. $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$ et l'inclusion réciproque est fausse en général.

6. $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$.

Exercice 1.8 Soient A, B deux langages sur un même alphabet.

1. Comparer $(A \cup B)^*$ et $A^* \cup B^*$.
2. Comparer $(A \cap B)^*$ et $A^* \cap B^*$.
3. Comparer $(AB)^*$ et A^*B^*.

Exercice 1.9 Deux mots u et v sont dits conjugués s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que $u = w_1w_2$ et $v = w_2w_1$. En d'autres termes, v s'obtient à partir de u par permutation cyclique de ses lettres.

1. Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :
   – tout mot u est conjugué à lui-même ;
   – si u est conjugué à v, alors v est conjugué à u ;
   – si u est conjugué à v et v est conjugué à w, alors u est conjugué à w.
2. Montrer que u et v sont conjugués si et seulement s'il existe un mot w tel que $uw = wv$.

Exercice 1.10 On appelle *code* sur un alphabet V tout langage X sur V tel que pour tous $x_1, \ldots, x_p \in X$ et pour tous $y_1, \ldots, y_q \in X : x_1 \ldots x_p = y_1 \ldots y_q \Rightarrow (p = q \text{ et } \forall i \leq p : x_i = y_i)$. Autrement dit, X est un code ssi tout élément de X^* se factorise de manière unique sur X.

1. Les langages suivants sont-ils des codes ?
   – $X_1 = \{ab, baa, abba, aabaa\}$;
   – $X_2 = \{b, ab, baa, abaa, aaaa\}$;
   – $X_3 = \{aa, ab, aab, bba\}$;
   – $X_4 = \{a, ba, bba, baab\}$;
2. Soit $u \in V^*$. Montrer que le singleton $\{u\}$ est un code si et seulement si $u \neq \varepsilon$.
3. Soient u et v deux mots distincts sur V. Montrer que la paire $\{u, v\}$ est un code si et seulement si u et v ne commutent pas.
4. Soit X une partie de V ne contenant pas ε et telle qu'aucun mot de X n'est préfixe propre d'un autre mot de X. Montrer qu'alors X est un code. (Un tel code est appelé *code préfixe*.)

TD nº 2

Expressions régulières

Exercice 2.1 Déterminer tous les mots de longueur maximale 4 qui appartiennent au langage dénoté par chacune des expressions régulières suivantes :

$$(i)\ (b+ba)^* \quad (ii)\ ab^*+b \quad (iii)\ (a+b)^*abb$$
$$(iv)\ (x+\varepsilon)^*dd^* \quad (v)\ (xd+\varepsilon)^*d^* \quad (vi)\ a^*(b+c)d^*$$

Exercice 2.2 Donner une description en français des langages donnés par les expressions régulières suivantes :

$$(i)\ (a+b)^* \quad (ii)\ a(a+b)^* \quad (iii)\ (a+b)^*a \quad (iv)\ (b+ab)^*(a+\varepsilon)$$
$$(v)\ a^*+b^* \quad (vi)\ (aa+b)^* \quad (vii)\ (ab^*a+b)^*$$

Exercice 2.3 Donner une description en français des langages donnés par les expressions régulières suivantes :

$$(i)\ (a+b)(a+b) \quad (ii)\ (\varepsilon+a+b)(\varepsilon+a+b) \quad (iii)\ ((a+b)(a+b))^*$$
$$(iv)\ (a+b)^*a(a+b)^* \quad (v)\ (a+b)^*ab(a+b)^* \quad (vi)\ (a+b)^*a(a+b)^*b(a+b)^*$$
$$(vii)\ (ab)^*$$

Exercice 2.4 Prouver la Proposition 16.

Exercice 2.5 Prouver les équivalences suivantes :

1. $(a+b)+(a+b)(a+b)^*+\varnothing^* \equiv (a+b)^*$
2. $a(c^+ +\varnothing^*)+(a+b)(c^*+(c^*)^*) \equiv (a+b)c^*$
3. $(x+y)\varnothing+(x+y)\varnothing^*+((x+y)^*\varnothing^*)^* \equiv (x+y)^*$
4. $0(\varepsilon+00)^*(1+01)+1 \equiv 0^*1$

Exercice 2.6 Pour chacun des langages suivants, donner une expression régulière représentant son complément : $(i)\ (a+b)^*b$; $(ii)\ ((a+b)(a+b))^*$.

Exercice 2.7 On rappelle que deux ensembles X et Y sont *équipotents* s'il existe une bijection de l'un vers l'autre. On note alors $X \sim Y$. En particulier, un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$ est dit *dénombrable*.

(a) Prouver qu'un ensemble n'est jamais équipotent à l'ensemble de ses parties.

(b) Soit Σ un alphabet. Montrer que l'ensemble des *mots* sur Σ est dénombrable alors que l'ensemble des *langages* sur Σ ne l'est pas.

(c) En déduire qu'il existe des langages non réguliers.

Exercice 2.8 La commande grep -E 'regexp' fichier retourne les lignes d'un fichier où l'on reconnaît l'expression régulière regexp. Une expression régulière est formée à partir de lettres de l'alphabet (chaque lettre constituant un élément) et des symboles :

$*$ qui indique que l'élément précédent apparaît un nombre quelconque de fois
$+$ qui indique que l'élément précédent apparaît au moins une fois
(et) qui entourent une expression régulière pour former un élément
| qui indique une disjonction entre deux expressions régulières (on reconnaît l'une ou l'autre)
? qui indique que l'élément précédent est facultatif (i.e. il apparaît au plus une fois).

Une expression régulière représente donc sous forme condensée un ensemble de mots (c'est-à-dire un langage). Soit tutu le fichier contenant :

caa
cbbab
cabab
caaabba

1. Que répond la commande grep -E 'regexp' tutu – et pourquoi ? – lorsque regexp vaut respectivement :

   $(i)\ ca^+$; $(ii)\ c(ab)^+$; $(iii)\ ca^+(a^*b^*)$; $(iv)\ (aa^+)\,|\,(bb^+)$; $(v)\ baa?b$; $(vi)\ a^*$

2. Décrire sous forme ensembliste le langage correspondant aux expressions régulières précédentes.

Exercice 2.9 Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en argumentant brièvement.

i) Tout langage régulier est infini.

ii) Tout langage non régulier est infini.

iii) Il y a une infinité de langages réguliers.

iv) Il y a une infinité de langages non réguliers.

v) Tout langage inclus dans un langage régulier est régulier.

vi) Il y a toujours une infinité d'expressions régulières pour décrire un langage régulier.

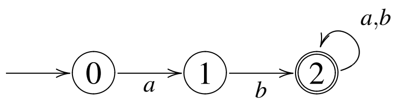
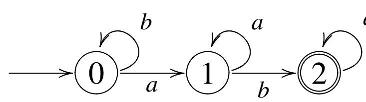
Licence Math-Info — Langages & Automates

2010 / 2011

TD n° 3

Automates finis

Exercice 3.1 On considère deux automates A_1 et A_2 sur l'alphabet $\{a,b\}$.

(A_1)  (A_2) 

(a) Dans quel état se trouve l'automate A_1 après lecture des mots a, ab, abb, $abba$? Après lecture du mot ε ?

(b) Lesquels de ces mots sont reconnus par l'automate A_1 ?

(c) Que se passe-t-il quand on donne le mot aab à lire à l'automate A_1 ?

(d) Les mots aba^2b, a^2ba^2b, ab^4 et b^3a^2 sont-ils reconnus par l'automate A_1 ?

(e) Décrire les mots reconnus par l'automate A_1.

(f) Après lecture du mot b^3a^2, dans quel état se trouve l'automate A_2 ?

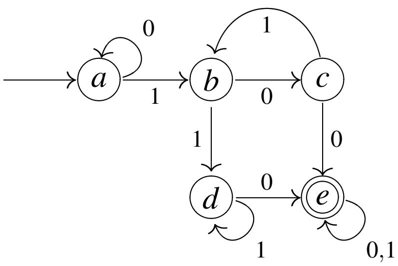
(g) Y a-t-il des mots que l'automate A_2 ne peut pas lire jusqu'au bout ?

(h) S'il n'a lu aucun a, dans quel état se trouve l'automate A_2 ?

(i) Dans quels cas l'automate A_2 se trouve-t-il dans l'état 1 ?

(j) Dans quels cas arrive-t-il à l'état final 2 ? Quels mots reconnaît-il ?

Exercice 3.2 On considère l'automate $\mathscr{A} = (V, Q, \delta, q_0, F)$ suivant.



$i)$ Expliciter V, Q, δ, q_0 et F (on représentera δ par sa table de transition).

$ii)$ Donner 4 mots acceptés par $\mathscr{A}$ et 4 mots refusés par $\mathscr{A}$.

$iii)$ Donner une expression régulière α dénotant $L(\mathscr{A})$.

$iv)$ L'expression régulière suivante dénote-t-elle $L(\mathscr{A})$? (Vous tenterez d'argumenter votre réponse à cette question.)

$$\beta = (0+1)^*1(0+1)0(0+1)^*$$

Exercice 3.3 Pour chacune des expressions régulières qui suivent, dessinez un automate reconnaissant le langage qu'elle dénote :

$$\alpha = aab\,; \qquad \beta = abba + bbab\,; \qquad \gamma = (aba)^* + (bab)^*.$$

Exercice 3.4 Déterminer pour chacun des langages suivants un automate qui le reconnaît :

(a) $\varnothing$

(b) $\{\varepsilon, 0\}$

(c) $\{u00 \,|\, u \in \{0,1\}^*\}$

(d) $\{0^m 1^n 2^p \,|\, m,n,p \geq 0\}$

(e) $\{a^{2n} \,|\, n \geq 0\}$

(f) $\{w \,|\, w$ contient au moins trois $1\}$

(g) $\{w \,|\, w$ ne contient pas le facteur $110\}$

Exercice 3.5 Pour chacun des langages suivants, donner une expression régulière qui le dénote et un automate qui le reconnaît.

(a) $\{u \in \{a,b\}^* |$ dans u, tout bloc de a est de longueur $\geq 2\}$.

(b) $\{u \in \{a,b\}^* |$ dans u, tout a est suivi d'un seul $b\}$.

Exercice 3.6 Déterminer un AFD pour les langages suivants :

(a) l'ensemble des réprésentations binaires des nombres pairs

(b) l'ensemble des représentations décimales des multiples de 3

Exercice 3.7 Soit $L \subset V^*$ un langage reconnaissable. Montrer que les langages suivants sont reconnaissables :

(a) $\{w \in L \,|$ aucun préfixe strict de w n'est dans $L\}$

(b) $\{w \in V^* \,|$ aucun préfixe strict de w n'est dans $L\}$

(c) $\{w \in L \,|\; w$ n'est préfixe strict d'aucun mot de $L\}$

(d) $\{w \in V^* \,|\; w$ est préfixe d'un mot de $L\}$

TD n° 4

Résiduels - Minimisation

Exercice 4.1 Calculer les résiduels suivants :

1. Résiduels de $\{\varepsilon, abb, baaba\}$ par rapport aux mots ε, a, b, ab, ba et bb.
2. Résiduels du langage dénoté par $aa(a+b)^*bb$ par rapport à ε, a, b, ab, aa, ba et bb.
3. Résiduels de $\{a^p b^q, p, q \geq 0\}$ par rapport à tout mot $u \in \{a,b\}^*$.
4. Résiduels de $\{a^n b^n, n \geq 0\}$ par rapport à tout mot $u \in \{a,b\}^*$.

Exercice 4.2 Démontrer le Lemme 19 du cours, dont on rappelle l'énoncé : pour $X, Y \subseteq V^*$, $u, v \in V^*$ et $a \in V$, on a :

1. $X/uv = (X/u)/v$
2. $(X \cup Y)/u = (X/u) \cup (Y/u)$
3. si $\varepsilon \notin X$: $(XY)/a = (X/a)Y$
4. si $\varepsilon \in X$: $(XY)/a = (X/a)Y \cup Y/a$
5. $\forall n > 0 : X^n/a = (X/a)X^{n-1}$
6. $X^*/u = (X/a)X^*$

Exercice 4.3 Soient $L \subseteq V^*$ et $w \in V^*$. Montrer que si L/w est infini, alors pour tout préfixe u de w, L/u est infini.

Exercice 4.4 Soit L un langage comportant p résiduels L/u_1, ..., L/u_p (les L/u_i sont deux à deux distincts). Montrer que $L = u_1(L/u_1) \oplus \cdots \oplus u_p(L/u_p)$, où $\oplus$ dénote l'union disjointe.

Exercice 4.5 Donner si c'est possible des exemples de langages tels que :

1. $\{L/\alpha,\ \alpha \in V^*\}$ est fini et chaque L/α est fini ;
2. $\{L/\alpha,\ \alpha \in V^*\}$ est fini et chaque L/α est infini ;
3. $\{L/\alpha,\ \alpha \in V^*\}$ est infini et chaque L/α est fini ;
4. $\{L/\alpha,\ \alpha \in V^*\}$ est infini et chaque L/α est infini.

Exercice 4.6 Soient $L \subseteq V^*$ un langage régulier et $\alpha \in V^*$. Les langages suivants sont-ils réguliers ?

(i) L/α ; (ii) $\{\beta \in L \mid \beta$ admet α comme préfixe$\}$; (iii) $\{\beta \mid \beta$ est préfixe d'un mot de $L\}$.

Exercice 4.7 Construire l'automates des résiduels des langages dénotés par les expressions régulières qui suivent :

i) $(aa+bb+cc)(a+b+c)^*$.

ii) $(a+b)^*aba$.

iii) $(ba^+)^+$

iv) $\{u \in \{a,b\}^* \text{ t.q. } |u|_a \in 2\mathbb{N} \text{ et } |u|_b \in 3\mathbb{N}\}$.

v) $aa(a+b)^*bb$.

vi) $a(a+b)^*b+b(a+b)^*a$.

vii) $\{u \in \{a,b\}^* \text{ t.q. dans } u\text{, tout bloc de } a \text{ est de longueur } 3\}$.

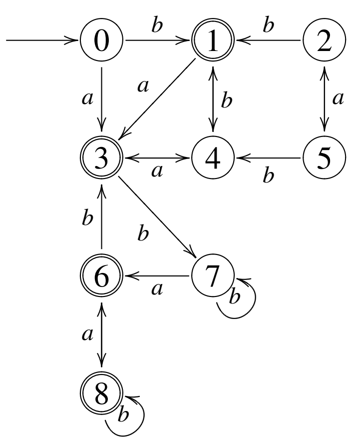
viii) $\{u \in \{a,b\}^* \text{ t.q. dans } u\text{, tout } a \text{ est suivi de deux } b \text{ exactement}\}$.

ix) $\{u \in \{a,b\}^* \text{ t.q. } u \text{ ne contient pas le facteur } aba\}$.

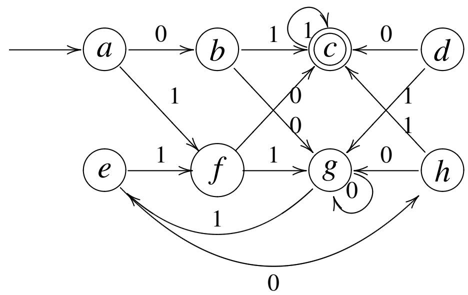
x) $(00)^*+(000)^*$.

Exercice 4.8 Minimiser les automates suivants :

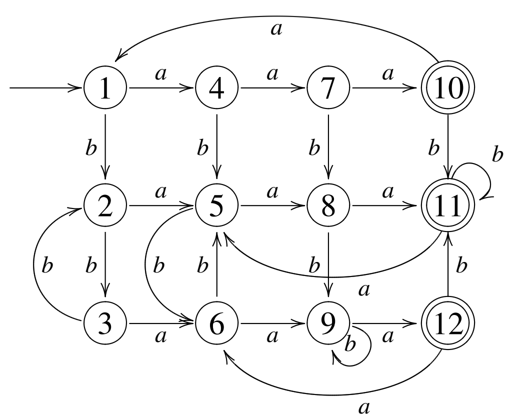
(A_1)



(A_2)



(A_3)



Licence Math-Info — Langages & Automates
2010 / 2011

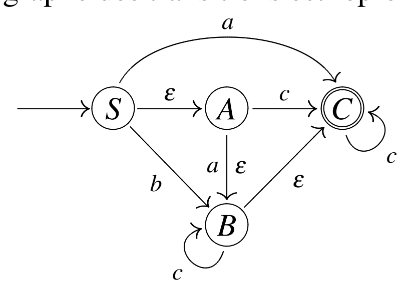
TD n° 5

Automates non déterministes

Exercice 5.1 Déterminer un automate non déterministe pour chacun des langages suivants.

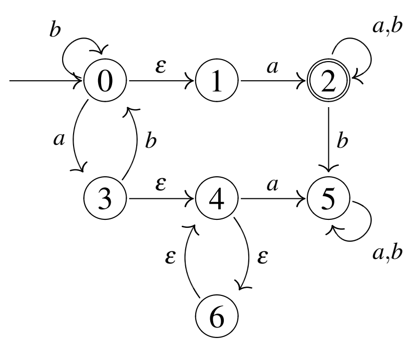
$$(b+ba)^* \, ; \qquad (a+b)^*abb \, ; \qquad (x+y+\varepsilon)dd^* \, ; \qquad (a^*(b+c)d^*)^*$$

Exercice 5.2 On considère l'automate non déterministe $A_1 = (Q, V, \delta, S, F)$, où $Q = \{S, A, B, C\}$, $V = \{a, b, c\}$, $F = \{C\}$, et dont le graphe des transitions est représenté ci-dessous.



1. Construire un automate A_2 équivalent à A_1, sans ε-transition et sans état inaccessible. On donnera sa table de transition.
2. Construire un automate A_3 *déterministe* et sans état inaccessible, équivalent à A_2 . Représenter son graphe des transitions.
3. Construire un automate minimal A_4 équivalent à A_3.
4. Quel est le langage accepté par A_1 ?

Exercice 5.3 Soit M l'automate non déterministe caractérisé par le graphe de transition suivant :

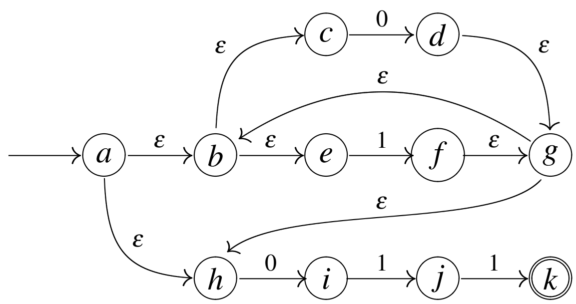


(a) Donner la table de transition de M et calculer l'ε-clôture de chaque état de M.

(b) Déterminer un automate M_1 équivalent à M et ne comportant ni ε-transition ni état inaccessible. On donnera le graphe de transition de M_1.

(c) Construire un automate *déterministe* M_2 équivalent à M_1. Donner son graphe de transition.

Exercice 5.4 Soit M l'automate non déterministe caractérisé par le graphe de transition suivant :



(a) Donner la table de transition de M et calculer l'ε-clôture de chaque état de M.

(b) Déterminer un automate M_1 équivalent à M et ne comportant ni ε-transition ni état inaccessible. On donnera le graphe de transition de M_1.

(c) Construire un automate *déterministe* M_2 équivalent à M_1. Donner son graphe de transition.

Exercice 5.5 On considère l'automate fini $A = (\Sigma, Q, q_0, F)$ où $\Sigma = \{a,b,c,d\}$, $Q = \{0,1,2,3,4\}$, $q_0 = 0$, $F = \{2,4\}$ et la fonction de transition δ est définie par la table suivante :

	a	b	c	d	ε
0	1	1	$\varnothing$	$\varnothing$	1
1	$\varnothing$	$\varnothing$	2	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\varnothing$	$\varnothing$	2	3	4
3	$\varnothing$	$\varnothing$	4	$\varnothing$	$\varnothing$
4	$\varnothing$	$\varnothing$	4	$\varnothing$	$\varnothing$

1. Donner le graphe de cet automate.
2. Construire un automate A' sans ε-transition, équivalent à A. Donner son graphe.
3. Déterminiser A'. Donner le graphe de l'automate A" obtenu.
4. Peut-on réduire A" en un automate déterministe équivalent ayant moins d'états ?

Exercice 5.6 Déterminiser puis minimiser l'automate $(\{s_0, s_1, \ldots, s_9\}, \delta, s_0, \{s_9\})$ avec la relation de transition :

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
ε	s_2		s_0				s_9			s_6
0	s_1	s_3	s_4			s_6	s_7	s_9		
1		s_2	s_5	s_2	s_6		s_8		s_9	

Exercice 5.7 Donner un automate non déterministe puis un automate déterministe pour les langages :

- $L = \{a,b,c\}^* a \{a,b,c\}^* b \cup c\{a,b\}^*$
- $L = \{a,b\}^* a \{a,b\}^n$.

Comparer le nombre d'états de l'automate déterministe avec celui de l'automate non déterministe.

Exercice 5.8 (a) Prouver qu'un automate non trivial à k états accepte nécessairement un mot de taille inférieure à $k-1$.

(b) Donner un automate non trivial sur l'alphabet $\{a\}$ tel que la taille minimale d'un mot rejeté est supérieure au nombre d'états de l'automate.

(c) Donner une construction pour un automate de taille arbitraire montrant que la taille du plus petit mot rejeté peut être exponentielle en le nombre d'états.

Exercice 5.9 Soit $\mathscr{N} = (Q, V, \delta, q_0, F)$ l'AFN défini par : $Q = \{0,1,2,3,4,5\}$, $q_0 = 0$, $V = \{a,b\}$, $F = \{4\}$ et δ est donnée "extensivement" :

$$\begin{array}{ll}
\delta(0,a) = \{1,2,3,4,5\} & \delta(0,b) = \varnothing \\
\delta(1,a) = \{2,3\} & \delta(1,b) = \{4\} \\
\delta(2,a) = \{0,1,4\} & \delta(2,b) = \{1,2,3\} \\
\delta(3,a) = \{0\} & \delta(3,b) = \{1,2,5\} \\
\delta(4,a) = \{1\} & \delta(4,b) = \varnothing \\
\delta(5,a) = \{2\} & \delta(5,b) = \{2,3,5\}
\end{array}$$

(a) Donner la table de transitions de l'automate $\mathscr{N}$.

(b) Trouver un AFD $\mathscr{D}$ équivalent à $\mathscr{N}$.

Exercice 5.10 Soit $\mathscr{A} = (Q, V, \delta, q_0, F)$ l'AFN avec ε-transitions défini par : $Q = \{A,B,C,D,E,F\}$, $q_0 = A$, $V = \{a,b,c\}$, $F = \{C,D\}$ et dont la fonction de transition est donnée sous sa forme algébrique :

$$\begin{array}{llll}
\delta(A,a) = \{E,F\} & \delta(A,b) = \varnothing & \delta(A,c) = \{B,C\} & \delta(A,\varepsilon) = \{B\} \\
\delta(B,a) = \varnothing & \delta(B,b) = \varnothing & \delta(B,c) = \{C\} & \delta(B,\varepsilon) = \{D\} \\
\delta(C,a) = \varnothing & \delta(C,b) = \{E\} & \delta(C,c) = \varnothing & \delta(C,\varepsilon) = \varnothing \\
\delta(D,a) = \varnothing & \delta(D,b) = \varnothing & \delta(D,c) = \{C,E\} & \delta(D,\varepsilon) = \{A\} \\
\delta(E,a) = \{E,F\} & \delta(E,b) = \varnothing & \delta(E,c) = \{C,E\} & \delta(E,\varepsilon) = \varnothing \\
\delta(F,a) = \varnothing & \delta(F,b) = \varnothing & \delta(F,c) = \{A,E\} & \delta(F,\varepsilon) = \{C\}
\end{array}$$

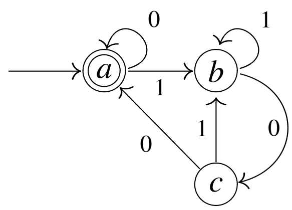
(a) Donner la table et le graphe des transitions de l'automate $\mathscr{A}$.

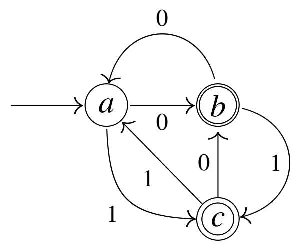
(b) Eliminer les cycles vides et les ε-règles.

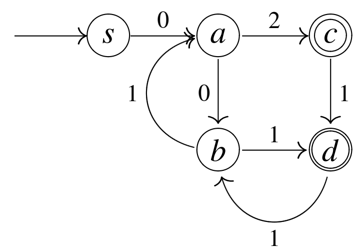
(c) Donner un AFD équivalent à $\mathscr{A}$, sans état inaccessible.

(d) Minimiser l'automate.

Exercice 5.11 Déterminer une expression régulière équivalente à chacun de ces automates.







Licence Math-Info
2010 / 2011

Langages & Automates

TD n° 6

Preuves de (non) régularité

Exercice 6.1 Démontrer que le complémentaire d'un langage régulier est un langage régulier. En déduire que :

(i) l'intersection de deux langages réguliers est un langage régulier ;

(ii) la différence de deux langages réguliers est un langage régulier.

Exercice 6.2 Prouver que le langage $\{a^n b^n, n \geq 0\}$ n'est pas régulier en utilisant :

1. Le Lemme de l'étoile (Théorème 43) ;
2. le Théorème de Myhill-Nerode (Théorème 27).

Exercice 6.3 Soit L un langage non régulier sur l'alphabet $\{b\}$. Montrez que les langages suivants vérifient le Lemme de l'étoile mais sont non réguliers :

1. $a^+ L \cup b^*$.
2. $b^* \cup aL \cup aa^+(a+b)^*$.

Exercice 6.4 Pour chacun des langages suivants, dire, en justifiant votre réponse, s'il est régulier ou non :

1. $\{a^{2n}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\{w \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a = |w|_b\}$.
3. $\{a^n b^m c^{n+m}, n, m \in \mathbb{N}\}$.
4. $\{a^n, n$ est un entier premier$\}$.
5. $\{a^{n^2}, n \geq 0\}$.
6. L'ensemble des palindromes sur $\{a,b\}$.
7. $\{a^n b a^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 6.5 Soit $\mathscr{A}$ un automate déterministe à k états. Montrer que :

1. $L(\mathscr{A}) \neq \varnothing$ ssi $L(\mathscr{A})$ contient un mot de longueur $< k$.
2. $L(\mathscr{A})$ est infini ssi $L(\mathscr{A})$ contient un mot de longueur comprise entre k et $2k$.
3. Déduire de la question 2 un algorithme qui, prenant en entrée un AFD $\mathscr{A}$, accepte cet automate si, et seulement si, $L(\mathscr{A})$ est infini.

Exercice 6.6 À chaque état q d'un AFD $\mathscr{A} = (V, Q, \delta, q_0, F)$, on associe les deux langages :

$$G_q = \{u \in V^* \text{ t.q. } q_0 \xrightarrow{u} q\} \text{ et } D_q = \{u \in V^* \text{ t.q. } q \xrightarrow{u} F\}.$$

Par ailleurs, pour tout langage $L \subseteq V^*$, on note $\sqrt{L} = \{u \in V^* | uu \in L\}$.

1. Montrer que pour chaque $q \in Q$, G_q et D_q sont réguliers.
2. En déduire que pour tout $L \in \mathsf{REG}$, on a $\sqrt{L} \in \mathsf{REG}$.

Exercice 6.7 L'opération $ext : V^* \to \mathscr{P}(V^*)$ qui construit les mots extraits d'un mot se définit par :

$$ext(\varepsilon) = \varepsilon \text{ et } ext(\alpha.a) = ext(\alpha) \cup ext(\alpha).a$$

Pour $L \subseteq L^*$, on pose $ext(L) = \{ext(\alpha) \mid \alpha \in L\}$. Montrer que $L \in \mathsf{REG} \Rightarrow ext(L) \in \mathsf{REG}$:

1. en utilisant le théorème de Kleene,
2. avec les automates.

Exercice 6.8 Soient $L, L' \in \mathsf{REG}$. Montrer que l'ensemble des mots de la forme $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots\alpha_n\beta_n$ avec $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \in L$ et $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n \in L'$ est régulier.

Exercice 6.9 Soit $\mathscr{A} = (V, Q, \delta, q_0, F)$.

1. Montrer que le langage $L(\mathscr{A})$ est infini ssi il contient un mot α tel qu'il existe deux facteurs gauches stricts distincts β_1 et β_2 de α vérifiant $\delta(q_0, \beta_1) = \delta(q_0, \beta_2)$.
2. Donner un algorithme qui permet de décider si un langage régulier est fini ou non.

Exercice 6.10 Soit L un langage. On pose $\frac{1}{2}L = \{x \text{ t.q. } \exists y : |x| = |y| \text{ et } xy \in L\}$. Autrement dit, $\frac{1}{2}L$ est l'ensemble des premières moitiés des mots de L.

1. Montrer que $L \in \mathsf{REG} \Rightarrow \frac{1}{2}L \in \mathsf{REG}$.
2. Si L est régulier, le langage des premiers tiers de L est-il régulier ? Même question pour le deuxième tiers, troisième tiers.
3. L'ensemble $\{xz \text{ t.q. } \exists y : |x| = |y| = |z| \text{ et } xyz \in L\}$ est-il régulier ?

Exercice 6.11 Montrer que si L est régulier alors

1. $SQRT(L) = \{x \text{ t.q. } \exists y : |y| = |x|^2 \text{ et } xy \in L\}$ est régulier.
2. $LOG(L) = \{x \text{ t.q. } \exists y : |y| = 2^{|x|} \text{ et } xy \in L\}$ est régulier.

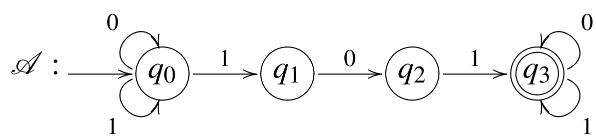
TD nº 7

Révisions

Exercice 7.1 Construire l'automates des résiduels des langages suivants :

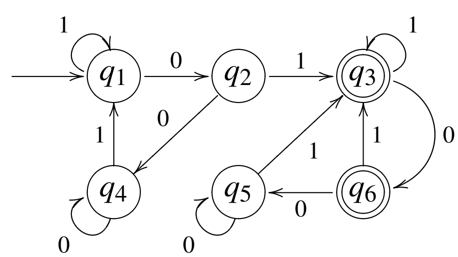
$(i)\ 0+1(0+1)^*0 \qquad (ii)\ 0^*1(10^*1+0)^*$

Exercice 7.2 On considère l'automate suivant :



1. Dire pourquoi $\mathscr{A}$ n'est pas déterministe. Donner, sans justification, une expression régulière équivalente.
2. Déterminiser $\mathscr{A}$ et représenter le graphe de l'automate déterministe $\mathscr{D}$ obtenu.
3. Minimiser l'automate $\mathscr{D}$ après l'avoir éventuellement complété. Dessiner l'automate obtenu.

Exercice 7.3 1. Minimiser l'automate suivant.



2. Soit $\mathscr{A}$ l'automate minimal obtenu. Calculer l'expression régulière dénotant $L(\mathscr{A})$ en résolvant le système d'équations associé.

Exercice 7.4 Soit $\mathscr{A} = (V, Q, \delta, q_0, F)$ un automate, où $V = \{a, b\}$, $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, $q_0 = 0$, $F = \{0, 3\}$ et où δ est donné par la table de transition :

δ	a	b	ε
0	1	0	
1	2		2
2	3		
3		0,3	

1. Dessiner le graphe de $\mathscr{A}$ et donner une expression régulière équivalente.

2. Déterminiser $\mathscr{A}$ et représenter le graphe de l'automate déterministe $\mathscr{D}$ obtenu.
3. L'automate $\mathscr{D}$ est-il minimal ?

Exercice 7.5 Utiliser des propriétés de clôture des langages réguliers pour montrer que le langage suivant n'est pas régulier : $L = \{w \in \{a,b\}^* \text{ t.q. } |w|_a < |w|_b\}$.

Exercice 7.6
1. Il y a-t-il toujours une infinité d'expressions régulières dénotant un langage régulier ?
2. Quel est le nombre maximal d'états d'un AFD obtenu par déterminisation d'un AFN à n états ?
3. Le miroir d'un langage régulier est-il régulier ?

Exercice 7.7 Calculer une expression régulière équivalente à l'automate suivant en résolvant le systèmes d'équations associé :