Partiel du 10/11/2009

La clarté et la précision de la rédaction seront largement prises en compte dans l'évaluation. En particulier, toute affirmation qu'une grammaire engendre un langage qui ne sera pas argumentée ne sera pas prise en compte.

Documents autorisés : notes de cours.

EXERCICE 1

Soit $A = \{a, b\}$ et S le système de réécriture de chaînes sur A défini par

$$S = \{(aa, \varepsilon), (bbb, \varepsilon), (aba, bb), (bab, a)\}.$$

a. S est-il noethérien ?

b. S est-il confluent ? Sinon, le compléter si c'est possible.

On note A^*/S l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation $\overset{*}{\leftrightarrow}$. Si l'on note $[a]$ la classe de $a \in A^*$, ce quotient est naturellement muni d'une structure de monoïde par $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$.

c. Quel est le cardinal de A^*/S ? Ce monoïde est-il commutatif ?

EXERCICE 2

Montrer que le langage constitué par les écritures des nombres rationnels sous la forme a/b, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N} - \{0\}$, a et b écrits en base 10, est rationnel.

EXERCICE 3

Le langage $L = \{a^n b^k, n > k\}$ est-il régulier ? Donner une grammaire linéaire à gauche l'engendrant ou une preuve de non-régularité. Est-il algébrique ?

PROBLÈME

Soit $T = \{a_1, \dots, a_n\}$ un alphabet et G une grammaire hors-contexte sur $V \cup T$, où V est l'ensemble des variables, et $S \in V$ le symbole de départ. On supposera que G ne contient pas de règle $A \to B$ où $A, B \in V$, ni de règle $A \to \varepsilon$, sauf si $A = S$ et S n'apparaît dans aucun membre droit de règle.

On définit

$$\begin{array}{rccl} \psi : & L_S(G) & \to & \mathbb{N}^n \\ & w & \mapsto & (|w|_{a_1}, \dots, |w|_{a_n}), \end{array}$$

où $|w|_{a_k}$ désigne le nombre d'occurrences du caractère a_k dans w.

On dira que $E \subset \mathbb{N}^n$ est un ensemble linéaire s'il existe un entier ℓ et $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbb{N}^n$ tels que $E = \{x_0 + n_1 x_1 + \dots + n_\ell x_\ell, n_j \in \mathbb{N}\}$.

a. Montrer que si $M \subset \mathbb{N}^n$ est union d'un nombre fini d'ensembles linéaires, il existe un langage L_0 rationnel tel que $\psi(L_0) = M$.

b. Montrer que si L est un langage rationnel, $\psi(L)$ est réunion d'un nombre fini d'ensembles linéaires.

Soit $\theta \ : w_1 \to w_2 \cdots \to w_j$ une dérivation. On note $Z(\theta)$ l'ensemble des variables apparaissant dans les mots $w_1, \ldots, w_j$. On fixe dans les questions c-g une partie $U \subset V$, de cardinal noté k. On notera $L_{S,U}(G)$ l'ensemble des mots w tels qu'il existe une dérivation $\theta \ : S \to w_1 \cdots \to w$ avec $Z(\theta) = U$.

c. Soit p un entier qui sera choisi ultérieurement. Montrer que

$$\mathcal{F} := \{w \in L_{S,U}(G)/\text{longueur}\,(w) \leqslant p^k\}$$

et

$$\Sigma := \{xy/\exists A \in U \text{ tel que } xAy \in \bigcup_{W \subset U} L_{A,W}(G), \text{longueur}\,(xy) \leqslant p^k\}$$

sont finis. On note dans la suite $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ les éléments de Σ.

d. Soit $w \in L_{S,U}(G)$. Montrer que pour tout i, $\psi(w\sigma_i) \in \psi(L_{S,U}(G))$. En déduire que $\psi(\mathcal{F}\sigma_1^* \ldots \sigma_m^*) \subset \psi(L_{S,U}(G))$.

e. Montrer qu'il existe un entier p tel que pour tout $w \in L_{S,U}(G)$, de longueur $> p^k$, il existe $A \in U$ et $v_1, \ldots, v_{2k+3}$ tels que pour tout j, $v_j v_{2k+4-j} \neq \varepsilon$ et

$$\begin{array}{rcl} S & \overset{*}{\to} & v_1 A v_{2k+3} \\ & \overset{*}{\to} & v_1 v_2 A v_{2k+2} v_{2k+3} \\ & \ldots & \\ & \overset{*}{\to} & v_1 \ldots v_{k+1} A v_{k+3} \ldots v_{2k+3} \\ & \overset{*}{\to} & v_1 \ldots v_{k+1} v_{k+2} v_{k+3} \ldots v_{2k+3} = w. \end{array}$$

f. Montrer qu'il existe $2 \leqslant i_0 \leqslant k+1$ tel que

$$v_1 \ldots v_{i_0-1} v_{i_0+1} \ldots v_{2k+3-i_0} v_{2k+5-i_0} \ldots v_{2k+3} \in L_{S,U}(G).$$

g. Soit $w \in L_{S,U}(G)$. Montrer que $\psi(w) \in \psi(\mathcal{F}\sigma_1^* \ldots \sigma_m^*)$. On pourra procéder par récurrence sur la longueur de w.

h. Montrer que $\psi(L_S(G))$ est réunion d'un nombre fini d'ensembles linéaires.

i. Comparer la classe des langages algébriques et la classe des langages rationnels quand l'alphabet est réduit à un élément.

j. Le langage $\{a^{j^2}, j \geqslant 0\}$, est-il rationnel ? algébrique ?

***** FIN *****