TD 04 – Recettes de grammaires

Exercice 1. a^{k^n}

✎ Construire une grammaire G_k telle que $L(G_k) = \{a^{k^n} | n \in \mathbb{N}\}$, où k est fixé, $k \in \mathbb{N}$ et $k > 0$.

Exercice 2. *Grammaires monotones et contextuelles*

1. Construire une grammaire monotone[1] $G = (V, \{a, b\}, S, P)$ telle que $L(G) = \{xx | x \in \{a, b\}^+\}$
2. Construire une grammaire contextuelle G_1 équivalente à G.

Exercice 3. *Lemme de structure des dérivations*

✎ Prouver le lemme suivant par induction sur r :

Lemme. *Soit $G = (V, T, S, P)$ une grammaire hors-contexte, et $\alpha, \beta \in (V \cup T)^\star$. Si $\alpha \overset{r}{\Rightarrow} \beta$ pour un certain $r \geq 0$, et si $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n$, $n \geq 1$ et $\alpha_i \in (V \cup T)^\star$, alors il existe $t_1, \ldots, t_1 \in \mathbb{N}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n \in (V \cup T)^\star$ tels que $\beta = \beta_1 \ldots \beta_n$, $\alpha_i \overset{t_i}{\Rightarrow} \beta_i$ pour tout i et $\sum_i t_i = r$.*

Exercice 4. *Langage miroir*

✎ Soit L un langage hors-contexte, et L^T son langage miroir : $L^T = \{x^T : x \in L\}$ où $(a_1 \ldots a_n)^T = a_n \ldots a_1$. Montrer que L^T est également hors-contexte.

Exercice 5. *Simplifications de grammaires*

1. Montrer que pour toute grammaire $G = (V, T, S, P)$, il existe une grammaire équivalente $G' = (V', T, S', P')$ telle que si $\alpha \to \beta \in P'$ et $|\beta| < |\alpha|$, alors $\alpha = X \in V'$ et $\beta = \epsilon$.
2. Montrer que pour toute grammaire $G = (V, T, S, P)$, il existe une grammaire équivalente $G'' = (V'', T, S'', P'')$ telle que
   – si $\alpha \to \beta \in P''$ et $|\beta| < |\alpha|$, alors $\alpha = X \in V''$ et $\beta = \epsilon$;
   – pour toute production $\alpha \to \beta \in P''$, $|\beta| \leq 2$.

Exercice 6. *ϵ-rule*

Soit $G = (V, T, S, P)$ une grammaire hors-contexte et soit $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ deux mots tels que $|\alpha| > |\beta|$ et $\alpha \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} \beta$.

1. Telle que $\forall \alpha \to \beta \in P,\ |\alpha| \leq |\beta|$.

✎ Prouver que α contient au moins un symbole non-terminal X tel que $X \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \epsilon$.

* **Exercice 7.** *Grammaire pseudo-contextuelle*

✎ Soit $G = (V, T, S, P)$ une grammaire non hors-contexte telle que chaque production est de la forme $uXv \to u\alpha v$ où $X \in V$, $u, v \in T^\star$ et $\alpha \in (V \cup T)^\star$. Montrer que $L(G)$ est un langage hors-contexte.