TD 10 – Automate appeal

Exercice 1. *Échauffements*

✎ Donner des automates à piles reconnaissant les langages suivants par pile vide et par état final, et justifier leur correction :
- $L = \{u \in \{a,b\}^* : |u|_a = 2|u|_b\}$;
- $L = \{a^i b^j c^k : i \neq j$ ou $j \neq k\}$.

Exercice 2. *Extrait de partiel*

Soit $L \subset \{a,b\}^*$ le plus petit langage tel que
- $\varepsilon \in L$
- Si $w \in L$, $awb \in L$;
- Si $w_1, w_2 \in L$, leur concaténation $w_1 w_2$ est dans L.

1. Montrer que L n'est pas régulier.
2. Construire un automate à pile reconnaissant L.

Exercice 3. *À contre-courant*

✎ Montrer l'implication non vue en cours permettant de conclure que les acceptations par pile vide et par état final sont équivalentes.

Exercice 4. *Mélanges…*

Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\mathrm{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :
- si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{v\}$
- si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{u\}$
- si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u,v) = x.\,\mathrm{Mel}(u',v) \cup y.\,\mathrm{Mel}(u,v')$.

Si L et L' sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L,L') = \bigcup_{u\in L, v\in L'} \mathrm{Mel}(u,v)$.

1. On considère les langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est rationnel.
2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?
3. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est algébrique.
4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.
5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?