

TD1 - Noël aux galeries Lafayette

Exercice 1 : Les tomates c'est fini !

Donner des automates finis qui reconnaissent les langages suivants

- $L_1 = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 0\}$
- $L_2 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ se termine par } 101\}$
- $L_3 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x|_0 \text{ pair et } |x|_1 \text{ impair}\}$
- L_4 est l'ensemble des entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 0 modulo 3
- L_5 est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la $i^{\text{ième}}$ lettre en partant de la fin est un a .
- $L_6 = \{0^{n_1} 1^{m_1} 0^{n_2} 1^{m_2} \dots 0^{n_k} 1^{m_k} \mid k \geq 0 \text{ et } \forall i, 1 \leq i \leq k, n_i, m_i > 0\}$
- $L_7 = (00 + 1)^*(11 + 0)^*$

Exercice 2 : Retour au CE2

1 - On définit x^R comme le mot x écrit à l'envers et pour tout langage L , on définit $L^R = \{\omega^R \mid \omega \in L\}$. Montrer que si L est rationnel alors L^R est aussi rationnel.

2 - Soit

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Σ_3 contient toutes les colonnes de taille 3 de 0s et de 1s. Une chaîne de symboles de Σ_3 donne ainsi 3 lignes de 0s et de 1s. Considérons chaque ligne comme un nombre binaire et posons

$$B = \{\omega \in \Sigma_3^* \mid \text{la ligne du bas de } \omega \text{ est la somme des deux lignes supérieures}\}.$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in B, \text{ mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin B.$$

Montrer que B est rationnel.

3 - Soit

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De même chaque mot sur Σ_2^* forme deux mots sur $\{0, 1\}^*$. Posons,

$$C = \{\omega \in \Sigma_2^* \mid \text{la ligne du bas de } \omega \text{ est trois fois la ligne du haut}\}$$

$D = \{\omega \in \Sigma_3^* \mid \text{la ligne du haut de } \omega \text{ est supérieure à la ligne du bas}\}.$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in D,$$

mais $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin C, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin D.$

Montrer que C et D sont rationnels.

Exercice 3 : C'est la taille qui compte

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c+ip, i \in N\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i, a^i \in L\}$ est semi-linéaire.

En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 4 : Il faut savoir raison garder

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ . Montrer que les langages suivants sont rationnels.

- 1 - CYCLE(L) = $\{x_1x_2 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
- 2 - MAX(L) = $\{x \in L \mid \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
- 3 - MIN(L) = $\{x \in L \mid \text{aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$
- 4 - INIT(L) = $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
- 5 - $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
- 6 - SQRT(L) = $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$
- 7 - LOG(L) = $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = 2^{|x|}\}$
- 8 - $L' = \{a_2a_1a_4a_3 \dots a_{2n}a_{2n+1} \mid a_1a_2 \dots a_{2n} \in L, a_i \in \Sigma\}$
- 9 - $L' = \{a_1a_3 \dots a_{2n-1} \mid a_1a_2 \dots a_{2n} \in L, a_i \in \Sigma\}$
- 10 - $K^{-1}L$ où K est un langage quelconque sur le même alphabet