
TD 5 – Recettes de grammaire

Exercice 1.*Incohérence...*

1. Trouver un langage non régulier qui passe le lemme de l'étoile.
2. En conclure que le lemme de l'étoile est faux.

Exercice 2.*Retour sur le cours*

Faire tourner l'algorithme de décision des formules du premier ordre de l'arithmétique de Pressburger sur les exemples suivants :

1. $\exists y \exists z [(\exists t z + t = y) \wedge y + y = z]$
2. $\forall x \exists y (y + y = x)$
3. $\forall x \exists y (x + x = y)$

Définition. Une grammaire hors-contexte $G = (V, \Sigma, P, S)$ ¹ est sous *forme normale de Chomsky* si toutes ses règles sont de la forme

- i) $A \rightarrow BC$ avec $B, C \in V$
- ii) $A \rightarrow a$ avec $a \in \Sigma$
- iii) $S \rightarrow \epsilon$

De plus, si $S \rightarrow \epsilon$ est une règle de P , alors $B, C \in V - \{S\}$ dans (i).

Exercice 3.*Forme normale de Chomsky*

1. Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky

$$\begin{aligned} S &\rightarrow TbT \\ T &\rightarrow TaT \mid ca \end{aligned}$$

2. Prouver le théorème suivant

Théorème. Pour toute grammaire hors-contexte $G = (V, \Sigma, P, S)$, il existe une grammaire $G' = (V', \Sigma, P', S)$ telle que $L(G') = L(G)$ et G' est sous forme normale de Chomsky.

Exercice 4.*Échauffement avec Dick et Luckasiewicz*

Quels sont les langages engendrés par les grammaires suivantes ?

1. $S \longrightarrow aSb \mid \epsilon$
2. $S \longrightarrow aS \mid aSbS \mid \epsilon$
3. $S \longrightarrow ST + \epsilon$
 $T \longrightarrow a_1S\bar{a}_1 + \dots + a_nS\bar{a}_n$

1. rappel : $V \cap \Sigma = \emptyset$

4. $S \longrightarrow aSS + \bar{a}$

Exercice 5.

Grammaire certainement ambiguë

1. Montrer que la grammaire suivante est ambiguë.

$$E \longrightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid a \mid b$$

2. Trouver une grammaire non-ambiguë qui reconnaît le même langage que la grammaire précédente.
 3. Trouver une grammaire hors-contexte qui reconnaît le langage

$$A = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ et } (i = j \text{ ou } j = k)\}$$

4. Montrer que toute grammaire pour le langage précédent est ambiguë.

Exercice 6.

Arrière ! Grammaires

Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants.

1. L'ensemble des palindromes sur $\{a, b\}$ et son complémentaire.
2. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ de longueur impaire.
3. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a que de b .
4. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant deux fois plus de a que de b .
5. $\{w\#\bar{w}\#, w \in (a+b)^*\}$.
6. $\{w\#w' \mid w, w' \in (a+b)^* \text{ et } w \neq w'\}$.
7. L'ensemble des mots de $(a+b)^*$ qui ne sont pas de la forme ww .