TD 9 – Théorème : Les briques de Lego sont Turing-puissantes.

Exercice 1. *Caisse à outils*

Trouvez vous-même un tas d'outils très utiles !

1. Donner une bijection b de $N^2 \to N$.
2. On note usuellement $\langle x, y \rangle$ pour $b(x, y)$. Donner un ordre de grandeur de $\langle x, y \rangle$.
3. Donner une bijection de N^3 dans N, de N^4 dans N...
4. Donner une bijection ξ de N^* (l'ensemble des suites finies d'entiers) dans N.

Exercice 2. *Je te lis ♫ tu me lis ♪ . . .*

Construisez les machines de Turing suivantes :

1. M qui écrit 0 1 0 1 0 1 0 ... sur un ruban blanc. *Pour ceux qui douteraient de l'intérêt de cette question, s'adresser à A. Turing.*
2. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 son entrée binaire.
3. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 et ajoute 1 à son entrée binaire.
4. M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui ajoute 1 à son entrée binaire.
5. M à deux rubans sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui code en binaire son entrée unaire.

Exercice 3. *Ou tu veux ou tu veux pas.*

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ un alphabet et soit x un mot de Σ^*. Construire des machines de Turing telles que :

1. lisant x la machine écrit x^{-1} (x écrit à l'envers)
2. la machine accepte x ssi x s'écrit yy^{-1} pour un certain $y \in \Sigma^*$.
3. la machine accepte x ssi x s'écrit yy pour un certain $y \in \Sigma^*$.

Exercice 4. *L'école primaire d'Alan*

Construire une machine de Turing qui effectue :

1. L'addition de deux entiers.
2. La multiplication de deux entiers.
3. La composition de deux fonctions, étant données les machines calculant chacune des fonctions.
   La bijection de N^2 dans N de l'exercice 1 est donc calculable par machine de turing...

Exercice 5. *r.e. VS r.*

1. Montrer que si un langage $\mathcal{L}$ est Turing-reconnaissable[1] (il existe une machine de Turing qui répond oui si et seulement si le mot est dans $\mathcal{L}$), alors il est récursivement énumerable (il existe une machine de Turing qui énumère[2] tous les mots de $\mathcal{L}$).
2. Montrer que si un langage $\mathcal{L}$ est récursivement énumerable et co-récursivement énumerable ($\overline{\mathcal{L}}$ est r.e.) alors il est décidable (récursif).

Exercice 6. *La haie de lauriers*

On considère les machines de Turing à un ruban dont l'alphabet Σ ($|\Sigma| \geq 3$) possède un symbole particulier $\#$. La configuration d'entrée est de la forme $\ldots BB\#\omega\#BB\ldots$ où ω ne contient pas de $\#$. Toutes les configurations sont de ce type, à ceci près qu'on s'autorise un $\#\#$ s'il disparaît dans la configuration suivante.
Cette machine calcule f si pour tout ω elle s'arrête sur $\#f(\omega)\#$.

✎ Ces machines sont-elles équivalentes aux autres machines de Turing ?

Exercice 7. *La matrice*

Soit Σ un alphabet fini, $|\Sigma| \geq 2$. On dira qu'on simule une machine de Turing d'alphabet Σ calculant la fonction f par une machine de Turing d'alphabet Σ' calculant la fonction g s'il existe un entier k et une fonction injective $\phi : \Sigma \to \Sigma'^k$ telle que pour toute entrée x de la première, on ait $g(\phi^\star(x)) = \phi^\star(f(x))$ o˘ $\phi^\star$ est l'extension naturelle de ϕ à $\Sigma^\star$.

1. Simuler une machine de Turing à un ruban d'alphabet Σ par une machine de Turing d'alphabet $\{0, 1, B\}$.
2. Montrer que toute machine de Turing à k rubans peut être simulée par une machine à un ruban.

Exercice 8. *Pas besoin de lunettes pour voir en 4D.*

Supposons qu'une machine de Turing s'arrête au bout de t étapes de calcul en consommant s cases mémoires.

✎ Quelle(s) relation(s) existent entre t et s ?

Exercice 9. *Système D*

Soit M une machine de Turing à un ruban. On supposera que pour tout mot en entrée de M ce mot est entièrement lu par M au cours du calcul.

1. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante a et une machine de Turing M' à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que M et telle que si M consomme $s(|x|)$ cases mémoires sur l'entrée x alors M' consomme au plus $a+|x|+s(|x|)/c$ cases mémoires sur la même entrée.
2. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante a et une machine de Turing M' à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que M et telle que si M s'arrête sur l'entrée x en $t(|x|)$ étapes alors M' s'arrête sur la même entrée en $a + |x| + t(|x|)/c$ étapes au plus.

Devoir maison.
Apprendre la biographie wikipédia de Alan Turing.

---

1. attention, ce n'est pas la même chose que Turing-décidable
2. comment ?