TD 11 – Antépénultième effort avant la fin du monde...

Exercice 1. *Pas besoin de lunettes pour voir en 4D.*

Supposons qu'une machine de Turing s'arrête au bout de t étapes de calcul en consommant s cases mémoires.

✎ Quelle(s) relation(s) existent entre t et s ?

Exercice 2. *La haie de lauriers.*

On considère les machines de Turing à un ruban dont l'alphabet Σ ($|\Sigma| \geq 3$) possède un symbole particulier $\#$. La configuration d'entrée est de la forme $\ldots BB\#\omega\#BB\ldots$ où ω ne contient pas de $\#$. Toutes les configurations sont de ce type, à ceci près qu'on s'autorise un $\#\#$ s'il disparaît dans la configuration suivante.
Cette machine calcule f si pour tout ω elle s'arrête sur $\#f(\omega)\#$.

✎ Ces machines sont-elles équivalentes aux autres machines de Turing ?

Exercice 3. *PCP, en français ou en anglais.*

Σ est un alphabet fini et P un ensemble fini de paires de mots sur Σ. Le Problème de Correspondance de Post associé à Σ, P est l'existence d'une suite non vide $(v_i, w_i)_i$ d'éléments de P telle que la concaténation des v_i soit égale à la concaténation des w_i. Le Problème de Correspondance de Post Modifié est celui de l'existence d'une telle suite lorsque le premier terme est fixé.

1. Résoudre PCP pour les instances suivantes :
   - **(a)** $P = (aab, ab), (bab, ba), (aab, abab)$
   - **(b)** $P = (a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)$
   - **(c)** $P = (ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)$
   - **(d)** $P = (a, abb), (aab, b), (b, aa), (bb, bba)$
2. Montrer que si Σ ne contient qu'une lettre le problème est décidable.
3. Montrer l'équivalence entre PCP et PCPM.
4. Peut-on se passer des couples de la forme (w, w) dans PCPM ?
5. Montrer que PCP est indécidable.

Exercice 4. *r. ? r.e. ? co r.e. ?*

On fixe un alphabet fini Σ contenant entre autre les lettres a et b. ϵ désignera le mot vide. Posons Σ^* l'ensemble des mots finis sur Σ. On notera enfin M_σ avec $\sigma \in \Sigma^*$ la machine de Turing effectuant le programme de code σ. (Plus formellement, $M_\sigma(x) = U(<\sigma, x>)$)

✎ Que peut-on dire d'un langage qui est reconnaissable et qui est de complémentaire reconnaissable.

✎ Les ensembles suivants sont-ils décidables ? reconnaissables ? de complémentaire reconnaissable ?

1. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(\sigma)$ s'arrête$\}$

2. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(\epsilon)$ s'arrête$\}$

3. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(abba)$ est défini$\}$

4. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(ab)^\frown M_\sigma(ba) = aaa\}$ (avec $^\frown$ l'opérateur de concaténation)

5. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(x) = x$ si $M_x(x)$ s'arrête et b sinon$\}$

6. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_w(\sigma) = abb$ avec $w \in \Sigma^*\}$

7. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma$ ne s'arrête sur aucun mot dont σ est un préfixe$\}$

8. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma(\sigma) = \sigma\}$

9. $\{\sigma \in \Sigma^*, M_\sigma$ s'arrête sur une partie infinie de $\Sigma^*\}$