N. Creignou, F. Olive et K. Perrot

TP n° 3

Deux réductions vers SAT

(À rendre sous forme d'un rapport sur feuille le jeudi 30 / vendredi 31 octobre.)

L'objectif de ce TP est de montrer que le solveur Minisat peut-être utilisé pour résoudre d'autres problèmes de la classe NP que le problème SAT. Pour ce faire on utilise la notion de réduction.

Travail demandé

Exercice 1. *Réduction de* 3-COLOR *à* SAT

Le problème 3-COLOR consiste à décider si un graphe est 3-coloriable.

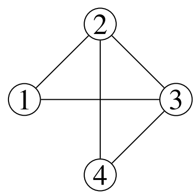
3-COLOR
Instance : Un graphe non-orienté $G = (V, E)$
Question : G admet-il une 3-coloration valide ?

1. Proposer une réduction en temps polynomial de 3-COLOR au problème SAT.

Un graphe est représenté par une suite de nombres de la façon suivante. La premier entier indique le nombre de sommets n, le second le nombre d'arêtes p. Viennent ensuite $2p$ entiers compris entre 1 et n, chacun des p couple décrivant les extrémités d'une arête. Ainsi,

```
4 5 1 2 2 3 3 4 1 3 2 4
```

représente-t-il le graphe à 4 sommets et 5 arêtes suivant.



2. Dessiner le graphe représenté par la séquence

```
10 15 1 2 2 3 3 4 4 5 5 1 1 6 2 7 3 8 4 9 5 10 6 8 7 9 8 10 9 6 10 7.
```

3. Écrire une procédure en C qui étant donné un graphe passé en argument selon le format décrit ci-dessus, écrit sur la sortie standard (l'écran) la formule (au format Dimacs) obtenue en lui appliquant la réduction décrite dans la première question.

4. Utiliser cette procédure dans un script bash qui étant donné un graphe décide s'il est 3-coloriable en utilisant le solveur Minisat.

5. Améliorer le script précédent de telle sorte que si le graphe est 3-coloriable alors un 3-coloriage est obtenu.

6. Tester votre algorithme sur des exemples simples et sur des données aléatoires.

7. Appliquer cet algorithme pour décider si la carte de l'Espace Économique Européen (EÉE, qui comporte 31 pays au 01/10/2014) est 3-coloriable. Dans le cas d'une réponse négative, proposer un algorithme qui permet d'obtenir un coloriage à quatre couleurs (un tel coloriage existe).

Exercice 2. *Réduction de* KERNEL *à* SAT

Un *noyau* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets $V' \subseteq V$ tel que deux sommets de V' ne sont pas reliés par un arc de E et pour tout sommet $v \in V \setminus V'$ il existe un sommet $u \in V'$ avec $(u, v) \in E$.

KERNEL
Instance : Un graphe dirigé $G = (V, E)$
Question : G admet-il un noyau ?

1. Proposer une réduction en temps polynomial de KERNEL à SAT.

2. S'en servir pour développer une procédure qui permet de décider ce problème en utilisant le solveur Minisat.