TD n° 10

Problème du castor affairé (busy beaver)

Exercice 10.1. Cet exercice est basé sur l'article de Tibor Radó, « On Non-Computable Functions », *Bell Systems Technology Journal*, vol. 41, no 3, mai 1962, p. 877-884.

Concours du castor affairé

Considérons des machines de Turing sur l'alphabet binaire $\Gamma = \{1, B\}$ dont la fonction de transition est $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$. Dans cet exercice, les nombres seront représentés en unaire sur le ruban.

Voici les règles du concours du castor affairé.

i. Le participant sélectionne un entier $n \in \mathbb{N}$, et construit sa propre machine de Turing binaire M à n états.

ii. Il lance sa machine M dans son état initial sur un ruban vide (uniquement des symboles B), et annonce qu'elle s'arrête après s étapes.

iii. Il soumet son entrée (M, s) à un membre du *International Busy Beaver Club*.

iv. Le membre vérifie que la machine M s'arrête après exactement s étapes. Cette vérification est décidable, il suffit de lancer la machine pour s étapes : si la machine ne s'est pas arrêtée après s étapes alors elle est rejetée, et si elle s'arrête en moins de s étapes alors elle est retournée au participant pour correction. Après qu'une machine ait été vérifiée, son score est le nombre de 1 écris sur le ruban lorsqu'elle s'arrête.

Le champion BB-n est le participant qui obtient le plus grand score avec une machine à n états.

1. Quel score a obtenu le champion BB-2 ?
2. Sauriez-vous obtenir le score 6 dans la catégorie BB-3 ?
3. Comment prouver que 6 est le meilleur score possible de la catégorie BB-3 ?

Le problème du castor affairé consiste à déterminer le plus grand score possible pour BB-n. Soient
— $N(n)$ le nombre de machines de Turing à n états,
— E_n l'ensemble des entrées (M, s) valides pour BB-n,
— $N_e(n)$ la taille de E_n.

4. Que vaut $N(n)$?
5. Argumenter que $1 < N_e(n) < N(n)$.
6. Etant donnée une entrée (M, s), peut-on décider si $(M, s) \in E_n$?

L'ensemble E_n possède une définition claire et précise, est non-vide et fini, pour tout n. Nous verrons à la fin de cet exercice que pourtant, $N_e(n)$, le nombre d'éléments de E_n, n'est pas une fonction calculable.

Croissance de $\Sigma(n)$

Chaque entrée valide (M, s) possède un score bien défini $\sigma(M, s)$. Soit

$$\Sigma(n) = \max\left\{\sigma(M, s) \mid (M, s) \in E_n\right\}.$$

$\Sigma(n)$ est la fonction du castor affairé, et nous allons voir qu'elle n'est pas calculable. Attention cependant, il est tout a fait possible d'en calculer certaines valeurs, comme $\Sigma(2) = 4$.

7. Regarder sur wikipedia les valeurs de $\Sigma(4)$, $\Sigma(5)$, $\Sigma(6)$.

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions, nous écrirons

$$f(x) \succ g(x) \text{ si et seulement si } \exists x_0 : \forall x > x_0 : f(x) > g(x).$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème. $\Sigma(n) \succ f(n)$ pour toute fonction calculable $f(n)$. Donc $\Sigma(n)$ n'est pas calculable.

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction calculable, et soit la fonction $F(x) = \sum_{i=0}^{x} \left(f(i) + i^2\right)$.

8. Argumenter que $F(x)$ est calculable par une machine de Turing.

Soit M_F une telle machine et c son nombre d'états. On considère que M_F, placée sur le premier symbole blanc à droite d'une entrée x (en unaire), s'arrête dans la configuration $xBF(x)q$ pour un certain état q.

9. Est-ce que $F(x) \geq f(x)$ pour tout x ?
10. Est-ce que $F(x) \geq x^2$ pour tout x ?
11. Est-ce que $F(x+1) > F(x)$ pour tout x ?
12. Donner la fonction de transition d'une machine de Turing M_x à $x+1$ états qui, à partir d'une entrée vide, écrit x symboles 1 consécutifs sur le ruban de façon à être composée avec M_F.

    Soit la machine M_{FFx} qui correspond à la composition $M_F \circ M_F \circ M_x$.

13. Combien d'états possède la machine M_{FFx} ?
14. Que peut-on en déduire sur Σ(réponse à la question précédente) ?
15. Démonter que $F(F(x)) \succ F(1+x+2c)$.
16. En déduire que $\Sigma(1+x+2c) \succ F(1+x+2c)$.
17. Conclure la preuve. □

Fonction $S(n)$

Remarquons que E_n coïncide avec l'ensemble des machines de Turing à n états qui s'arrêtent sur l'entrée vide. Soit $S(n) = \max\left\{s \mid (M,s) \in E_n\right\}$.

18. La fonction $S(n)$ est-elle calculable ?

Fonction $N_e(n)$

Rappelons que $N_e(n) = |E_n|$. Soit $N(s,n) = \left|\left\{(M,s') \in E_n \mid s' = s\right\}\right|$.

19. La fonction $N(s,n)$ est-elle calculable ?

    Soient $G(s,n) = \sum_{i=1}^{s} N(i,n)$ et $\Phi(s,n) = N_e(n) - G(s,n)$.

20. Exprimer avec des mots la fonction $G(n,s)$.
21. Que peut-on dire de $\Phi(s,n)$?
22. Quelle est la valeur minimale de s telle que $\Phi(s,n) = 0$?
23. En déduire que $N_e(n)$ n'est pas calculable.

Remarque

Supposons que pour un entier n_0 nous arrivons à déterminer $N_e(n_0)$.

24. Peut-on alors déterminer $S(n_0)$ et $\Sigma(n_0)$?
25. Que dire de l'inégalité $S(n) \leq (n+1)\,\Sigma(5n)\,2^{\Sigma(5n)}$?