M1 Informatique - Luminy　　　　Complexité - 2015 / 2016

N. Creignou, F. Olive, E. Perdereau et K. Perrot

TP n° 3

Deux réductions vers SAT

(À présenter en séance de TP le vendredi 27 novembre.)

L'objectif de ce TP est de montrer que le solveur Minisat peut-être utilisé pour résoudre d'autres problèmes de la classe NP que le problème SAT. Pour ce faire on utilise la notion de réduction.

Travail demandé

Exercice 1. *Réduction de* KERNEL *à* SAT

Un *noyau* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets $V' \subseteq V$ tel que :

(a) deux sommets de V' ne sont pas reliés par un arc de E

(b) et pour tout sommet $v \in V \setminus V'$ il existe un sommet $u \in V'$ avec $(u, v) \in E$.

KERNEL
Instance : Un graphe dirigé $G = (V, E)$
Question : G admet-il un noyau ?

1. Proposer une réduction en temps polynomial de KERNEL à SAT.

2. S'en servir pour développer une procédure qui permet de décider ce problème en utilisant le solveur Minisat.

Exercice 2. *Réduction de* SUDOKU *à* SAT

			8	1				5
				2			3	
8					5		4	9
4			1				6	3
	2						9	
3	7				2			8
7	8		2					6
	4			5				
6				9	8			

FIGURE 1 – Exemple d'une grille Sudoku, sa représentation textuelle est `...81...5....2..3.8....5.494..1...63.2.....9.37...2..878.2....6.4..5....6...98....`

La grille de jeu (figure 1) est un carré de neuf cases de côté, subdivisé en autant de sous-grilles carrées identiques, appelées "régions". Le but du jeu est de remplir cette grille avec des chiffres allant de 1 à

9 en veillant toujours à ce que chaque ligne, chaque colonne et chaque région ne contiennent qu'une seule fois tous les chiffres allant de 1 à 9. Au début du jeu, un certain nombre de chiffres sont déjà placés.

Étant donnée une grille de Sudoku, nous souhaitons savoir s'il existe une solution. Nous allons pour cela modéliser ce problème par une formule propositionnelle. Pour cela, on pourra utiliser $9 \times 9 \times 9$ variables propositionnelles $c_{i,j,k}$ avec $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, qui codent le fait que la case (i, j) contient le chiffre k.

1. Écrire l'ensemble des contraintes modélisant le problème sous forme d'une formule CNF :
   - Au moins une valeur par case : $\bigwedge_{i,j \in \{1,\ldots,9\}} \bigvee_{k \in \{1,\ldots,9\}} c_{i,j,k}$.
   - Au moins une fois chaque chiffre sur chaque ligne.
   - Au moins une fois chaque chiffre sur chaque colonne.
   - Au moins une fois chaque chiffre dans chaque région.
   - Au plus une valeur par case.
   - Au plus une fois chaque chiffre sur chaque ligne.
   - Au plus une fois chaque chiffre sur chaque colonne.
   - Au plus une fois chaque chiffre dans chaque région.
2. **Bonus :** Écrire un programme qui lit sur l'entrée standard une grille de Sudoku au format textuelle et produit l'ensemble des contraintes modélisant le problème au format Dimacs. Ne pas oublier d'ajouter les contraintes pour les chiffres initialement placés.
   Vous trouverez des grilles de test avec les mots clés `top95` et `top1465`.