
Examen session 2 – 3 heures – documents non autorisés

Ce sujet comporte 2 pages et 7 exercices. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1.*Machine de Turing (4 points)*

Soit $L = \{ w_1 w_2 \dots w_n \in \{0,1\}^* \mid n \geq 3 \text{ et } w_3 = w_{n-1} \text{ et } n \equiv 3 \pmod{4} \}$.

On rappelle que la relation de *congruence* ($x \equiv y \pmod{z}$) signifie $(x \pmod{z}) = (y \pmod{z})$.

1. Donner un exemple de mot qui appartient à L .
2. Donner un exemple de mot qui n'appartient pas à L .
3. Donner une machine de Turing déterministe pour décider le langage L .
4. Donner une borne sur le temps d'exécution de votre machine.

Exercice 2.*Questions de cours (2.5 points)*

Définir les notions suivantes en complétant les débuts de phrase. On notera \leq_m^p les réductions many-one polynomiales.

1. Les deux lettres de NP signifient respectivement ...
2. $A \leq_m^p B$ si et seulement si ...
3. Un problème A est NP-complet (pour \leq_m^p) si et seulement si ...
4. Une machine de Turing non-déterministe M accepte un mot x si et seulement si ...

Exercice 3.*Compréhension du cours (1.5 points)*

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si : (un seul choix possible)

il est vrai, il est faux, il implique $P = NP$, il implique $P \neq NP$.

1. **SAT** $\in P$.
2. $\text{co-}P = P$.
3. **Clique** est P-complet pour les réduction \leq_m^p .
4. $P \cap NP = P$.

Exercice 4.*Taille des entrées (2 points)*

Soit l'algorithme suivant.

```

entrée: n (entier)
i (entier) <- 0
j (entier) <- n
tant que (i < n) faire
    si (j%2 == 0) alors j <- j/2, sinon j <- 3*j+1
    i <- i+1
si ((j == 1) ou (j == 2) ou (j == 4)) alors accepter, sinon rejeter

```

1. Donner une borne supérieure sur le temps d'exécution de cet algo en fonction de la taille de l'entrée, en justifiant.

Exercice 5.**Horn-SAT** \in P (2 points)

Une *clause de Horn* est une clause comportant au plus un littéral positif (par exemple $x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_7 \vee \neg x_8$). Une *formule de Horn* est une formule propositionnelle en forme normale conjonctive, où toutes les clauses sont des clauses de Horn.

Horn-SATentrée : une formule de Horn ϕ .question : ϕ est-elle satisfiable ?

1. Donner un exemple d'instance négative de **Horn-SAT**.
2. Montrer que le problème **Horn-SAT** appartient à la classe P.

Exercice 6.**Half-Clique** (5 points)

Rappel : dans un graphe non-orienté $G = (V, E)$, une *clique* est un sous-ensemble $V' \subseteq V$ tel que pour tous $v, v' \in V'$ on a l'arrête $\{v, v'\} \in E$. Sa *taille* est $|V'|$.

Half-Cliqueentrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$.question : G contient-il une clique de taille au moins $\frac{|V|}{2}$?

1. Donner un exemple d'instance positive de **Half-Clique**, avec au moins 7 sommets.
2. Montrer que le problème **Half-Clique** appartient à la classe NP.

Cliqueentrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.question : G contient-il une clique de taille au moins k ?**Rappel :** **Clique** est NP-complet.

3. Montrer que **Half-Clique** est NP-difficile.
4. Que peut-on conclure des réponses de cet exercice ?

Exercice 7.**Sudoku** \leq_m^p **SAT** (4 points)

La grille de jeu du **Sudoku** est un carré de neuf cases de côté, subdivisé en autant de sous-grilles carrées identiques, appelées "régions". Le but du jeu est de remplir cette grille avec des chiffres allant de 1 à 9 en veillant toujours à ce que chaque ligne, chaque colonne et chaque région ne contiennent qu'une seule fois tous les chiffres allant de 1 à 9. Au début du jeu, un certain nombre de chiffres sont déjà placés.

Étant donnée une grille de **Sudoku**, nous souhaitons savoir s'il existe une solution. Pour cela, dans cet exercice nous allons modéliser ce problème par une formule propositionnelle. On utilisera $9^3 = 729$ variables propositionnelles $c_{i,j,k}$ avec $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$, qui codent le fait que la case (i, j) contient le chiffre k .

1. Écrire les contraintes suivantes qui modélisent partiellement le problème, en formule sous forme normale conjonctive (on vous donne la première réponse) :

(a) Au moins une valeur par case : $\bigwedge_{i,j \in \{1, \dots, 9\}} \bigvee_{k \in \{1, \dots, 9\}} c_{i,j,k}$

(b) Au moins une fois chaque chiffre sur chaque ligne.

(c) Au plus une valeur par case.

(d) Au plus une fois chaque chiffre sur chaque colonne.

(e) Au moins une fois chaque chiffre dans chaque région.

			8	1				5
				2			3	
8					5		4	9
4			1				6	3
	2						9	
3	7				2			8
7	8		2					6
	4			5				
6				9	8			

2. On souhaite ensuite ajouter des clauses encodant les cases déjà pré-remplies. Quel ensemble de clauses faut-il ajouter pour les deux premières lignes de la grille ci-contre où des chiffres sont déjà placés ?
3. Quel est l'intérêt de réduire un problème de la classe NP à **SAT**, si l'on sait déjà que **SAT** est NP-complet ?