TD 09 – Révisions – Correction des exercices 4 et 6

Exercice 4. *vrai ou faux ?*

1. **(a)** Faux **(b)** Vrai **(c)** Faux **(d)** Vrai **(e)** Vrai **(f)** Faux.
2. **(a)** Faux **(b)** Vrai **(c)** Faux **(d)** Vrai **(e)** Vrai **(f)** Faux.

Exercice 6. *colorabilité*

1. …
2. …
3. Un 3-coloriage d'un graphe $G = (V, E)$ peut être décrit par une fonction $c : V \to \{1, 2, 3\}$ telle que $\{x, y\} \in E \implies c(x) \neq c(y)$. Un 3-coloriage valide c d'un graphe G constitue un certificat/preuve de l'appartenance de G à l'ensemble 3-**Couleur** des instances positives.

   Soit le langage : **Verif**-3-**Couleur** $= \{(G, c) \mid c$ est une 3-coloration valide de $G\}$ et le polynome $2\sqrt{n}$. Si l'on considère que les graphes sont donnés par matrice d'adjacence, alors pour une entrée de taille n on a $p(n)$ qui est égal à deux fois le nombre de sommets, juste assez pour décrire simplement une 3-coloration comme la concaténation des couleurs (2 bits par couleur) de chaque sommet. **Verif**-3-**Couleur** $\in \mathsf{P}$ car il est aisé de vérifier une trois coloration : pour chaque $\{x, y\} \in E$ on vérifie que $c(x) \neq c(y)$, ce qui se fait en temps linéaire (donc polynomial) en la taille de G.

   Montrons maintenant que
   $$G \in 3\text{-}\textbf{Couleur} \iff \exists\, c \in \{0,1\}^{p(|x|)} \text{ tel que } (G, c) \in \textbf{Verif-}3\textbf{-Couleur},$$
   pour utiliser la caractérisation existentielle de la classe NP qui donnera le résultat.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Si G est 3-coloriable alors il existe une 3-coloration c par définition, et donc $(G, c) \in$ **Verif**-3-**Couleur**.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Si il existe c telle que $(G, c) \in$ **Verif**-3-**Couleur**, alors c est une 3-coloration valide de G, donc G est 3-coloriable (donc $G \in$3-**Couleur**).

4. Il s'agit de constuire une application calculable en temps polynomial et qui associe à chaque graphe G une formule ϕ_G (sous forme k-CNF) telle que :
   $$G \text{ est } k\text{-coloriable} \iff \phi_G \text{ est satisfaisable.}$$
   L'idée intuitive est de concevoir cette formule de telle sorte qu'elle décrive, dans le langage du calcul propositionnel, un 3-coloriage de G. C'est le passage le plus délicat de la preuve de réduction, qui nous oblige à faire preuve d'imagination. Il faut d'abord choisir un ensemble de variables propositionnelles susceptibles de porter une information « atomique » sur les coloriages. À charge ensuite pour ϕ_G de connecter ces informations atomiques pour décrire ce qu'est un bon coloriage de G. On se rend compte assez facilement que l'information de base, pour parler de coloriage de G, est du type : *tel sommet est colorié par telle couleur*. On crée alors une variable propositionnelle x_i pour chaque sommet $x \in V$ et chaque couleur $i \in [k]$ (où, pour abréger, on a noté $[k]$ l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$ des couleurs possibles). On se retrouve ainsi avec $k|V|$ variables propositionnelles $(x_i)_{x \in V,\, i \in [k]}$, à partir desquelles on peut commencer à bâtir ϕ_G, en s'appuyant sur la vocation de x_i à transcrire l'information « x est colorié par i ».

   Un coloriage de G par les couleurs $1, 2, \ldots, k$ doit respecter trois contraintes :

— chaque sommet est colorié par *au moins une* couleur ;
— chaque sommet est colorié par *au plus une* couleur ;
— deux sommets adjacents sont de couleurs distinctes.
Ces trois contraintes sont exprimées par les formules suivantes :

$$\phi_G^1 = \bigwedge_{x\in V} \bigvee_{i\in[k]} x_i \qquad \phi_G^2 = \bigwedge_{x\in V} \bigwedge_{i\neq j\in[k]} (x_i \to \neg x_j) \qquad \phi_G^3 = \bigwedge_{\{x,y\}\in E} \bigwedge_{i\in[k]} (x_i \to \neg y_i)$$

On note ϕ_G la conjonction de ces trois formules : $\phi_G = \phi_G^1 \wedge \phi_G^2 \wedge \phi_G^3$.

Notre objectif est désormais de démontrer que l'application $r : G \mapsto \phi_G$ est une réduction many-one polynomiale de k-**Couleur** à k-**SAT**.

Notons d'abord que chaque ϕ_G^i est une conjonction de k-clauses : pour ϕ_G^1 c'est clair, puisque chaque conjonction $\bigvee_{i\in[k]} x_i$ est une k-clause. Quant à ϕ_G^2 et ϕ_G^3, ce sont même des conjonctions de 2-clauses : il suffit de réécrire chaque implication du type $p \to \neg q$ sous la forme $\neg p \vee \neg q$ pour s'en convaincre. L'application $r : G \mapsto \phi_G$ a donc bien le prototype d'une réduction de k-**Couleur** à k-**SAT** : les entrées du problème k-**Couleur** sont transformées en des entrées du problème k-**SAT**.

Par ailleurs, r est calculable en temps polynomial. On voit bien en effet que la construction de $r(G) = \phi_G$ à partir de G n'exige aucun calcul sophistiqué. On peut ici se contenter de constater que la formule ϕ_G est de taille polynomialement bornée par $|G|$, puisqu'elle contient moins de $k|V| + 2k^2|V| + 2k|E|$ littéraux, et que ce nombre est majoré par $(2k^2 + 3k)|V|^2$, qui est en $O(|V|^2)$ et donc en $O(|G|)$.

Reste à établir que r préserve les instances positives, c'est-à-dire que

$$G \in k\text{-}\mathbf{Couleur} \iff \phi_G \in k\text{-}\mathbf{SAT}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$: Supposons que $G \in k$-**Couleur**. Alors G admet un k-coloriage $c : V \to [k]$, à partir duquel on définit la valuation $v_c : X \to \{0, 1\}$ suivante (avec X l'ensemble des variables de ϕ_G) : pour toute variable $x_i \in X$ (c'est-à-dire, pour tout $x \in V$ et tout $i \in [k]$),

$$v_c(x_i) = 1 \iff c(x) = i.$$

À chaque $x \in V$, le coloriage c attribue une couleur $i \in [k]$ (à savoir, $i = c(x)$), ce qui s'écrit aussi $v_c(x_i) = 1$, par définition de v_c. Il s'ensuit :

$$\forall x \in V : \; v_c\left(\bigwedge_{i\in[k]} x_i\right) = 1, \quad \text{ou encore :} \quad v_c\left(\bigwedge_{x\in V} \bigvee_{i\in[k]} x_i\right) = 1,$$

d'où finalement $v_c\left(\phi_G^1\right) = 1$.
De plus, c n'affecte qu'une seule couleur à chaque sommet. De sorte que si x est un sommet et si i et j sont deux couleurs distinctes, $c(x) = i$ entraîne $c(x) \neq j$. Ce qui se traduit, avec le choix que nous avons fait pour v_c, par :

$$\forall x \in V,\, \forall i \neq j \in [k] : \; v_c\left(x_i \to \neg x_j\right) = 1, \quad \text{et donc :} \quad v_c\left(\bigwedge_{x\in V} \bigwedge_{i\neq j\in[k]} x_i \to \neg x_j\right) = 1,$$

c'est-à-dire $v_c\left(\phi_G^2\right) = 1$.

Enfin, pour chaque arête $\{x, y\}$ de G, c affecte des couleurs différentes à x et y : si $c(x) = i$ alors $c(y) \neq i$. Ceci entraîne :

$$\forall\{x, y\} \in E,\ \forall i \in [k] :\ v_c\,(x_i \to \neg y_i) = 1, \quad \text{et donc :} \quad v_c\left(\bigwedge_{\{x,y\}\in E}\ \bigwedge_{i\in[k]} x_i \to \neg y_i\right) = 1,$$

c'est-à-dire $v_c\left(\phi_G^3\right) = 1$.
Par conséquent, la valuation v_c que nous avons définie à partir du coloriage c satisfait $\phi_G^1 \wedge \phi_G^2 \wedge \phi_G^3$ et donc ϕ_G est satisfaisable, c'est-à-dire $\phi_G \in k$-**SAT**.

$\boxed{\Leftarrow}$: Supposons que $\phi_G \in k$-**SAT**. Alors il existe une valuation v qui satisfait ϕ_G, à partir de laquel on définit l'application $c_v : V \to [k]$ suivante : pour tout $x \in V$, $c_v(x)$ est l'unique $i \in [k]$ tel que $v(x_i) = 1$. Notons pour commencer que c_v est bien définie, puisque que pour chaque x il existe bien un et un seul $i \in [k]$ tel que $v(x_i) = 1$, en vertu du fait que v satisfait les formules ϕ_G^1 et ϕ_G^2 qui, précisément, garantissent cette existence et cette unicité. La définition de c_v est donc cohérente et on a :

$$c_v(x) = i \iff v(x_i) = 1.$$

Par ailleurs, pour tout $\{x, y\} \in E$ et tout $i \in [k]$, on a $v(x_i \to \neg y_i) = 1$, c'est-à-dire

$$v(x_i) = 1 \implies v(y_i) = 0.$$

On en déduit, par définition de c_v, que pour tout $\{x, y\} \in E$ et tout $i \in [k]$:

$$c_v(x) = i \implies c_v(y) \neq i.$$

D'où finalement :

$$\forall\{x, y\} \in E : c_v(x) \neq c_v(y),$$

et cette dernière assertion signifie que c_v est un coloriage valide de G à valeur dans $[k]$, donc un k-coloriage de G.

5. Pour tout $k \geq 2$, de k-**Couleur** $\leq_m^p$ k-**SAT** et de k-**SAT**$\in$ NP on déduit que k-**Couleur**$\in$ NP, car la classe NP est close pour les réduction many-one polynomiales.
   Pour $k = 2$, de 2-**Couleur** $\leq_m^p$ 2-**SAT** et de 2-**SAT**$\in$ P on déduit que 2-**Couleur**$\in$ P, car la classe P est close pour les réductions many-one polynomiales.
6. ...
7. $r(G_1)$ est 4-coloriable, $r(G_2)$ n'est pas 4-coloriable.
8. L'application r transforme bien des entrées pour k-**Couleur** en des entrées pour $(k+1)$-**Couleur** (r transforme un graphe en un graphe). De plus, elle est clairement calculable en temps polynomial : pour construire $r(G)$, il suffit de connecter un nouveau sommet à tous les sommets de G, et ceci se fait en temps $O(|G|)$. Reste à vérifier qu'elle préserve les instances positives, c'est-à-dire :

$$G \in k\text{-}\mathbf{Couleur} \iff r(G) \in (k+1)\text{-}\mathbf{Couleur}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$: Soit $G \in k$-**Couleur**. À partir d'un k-coloriage de G, on obtient facilement un $(k+1)$-coloriage de $r(G)$ en conservant la couleur des sommets de G et en coloriant d'une nouvelle couleur le sommet α. Ainsi, $r(G) \in (k+1)$-**Couleur**.
$\boxed{\Leftarrow}$: Inversement, si $r(G) \in (k+1)$-**Couleur**, ce graphe admet un $(k+1)$-coloriage. La couleur affectée à α est nécessairement distincte de celles affectées aux autres sommets, puisque ceux-ci sont tous adjacents à α dans $r(G)$. Ainsi les sommets de $V(G)$ sont coloriés avec k-couleurs et G est bien k-coloriable, c'est-à-dire $G \in k$-**Couleur**.

9. De la question précédente on déduit la suite de réductions :

$$3\text{-}\textbf{Couleur} \leq_m^p 4\text{-}\textbf{Couleur} \leq_m^p \cdots \leq_m^p k\text{-}\textbf{Couleur}$$

Par transitivité de la réduction polynomiale, on en déduit que 3-**Couleur** $\leq_m^p$ k-**Couleur** pour tout $k \geq 3$. La NP-difficulté de 3-**Couleur** entraîne alors celle de k-**Couleur**. Comme ce dernier problème est dans NP, on peut finalement affirmer : pour chaque $k \geq 3$, k-**Couleur** est NP-complet.

10. Nous avons déjà vu que 3-**Couleur** $\in$ NP.

Soit ϕ une instance de **3-SAT**, sur n variables $x_1, \ldots, x_n$ et comportants m clauses $C_1, \ldots, C_m$, chacune de taille 3. Notre objectif est alors d'expliquer comment construire un graphe G_ϕ tel que G_ϕ est 3-coloriable ssi ϕ est satisfaisable.

Un peu d'intuition : il doit exister un lien entre l'assignation d'une valeur de vérité aux variables de ϕ et l'assignation d'une couleur aux sommets du graphe G_ϕ ; pour lier les couleurs de plusieurs sommets il faut qu'il soient voisins ou assez proches dans le graphe.

La réduction est définie comme suit :
— Nous créons un triangle de sommets $Vrai$, $Faux$, $Neutre$.
— Pour chaque varable x_i, nous créons deux sommets v_i et $\bar{v}_i$ reliés selon un triangle avec $Base$ (c'est-à-dire que l'on ajoute les arêtes $\{v_i, \bar{v}_i\}, \{v_i, Base\}, \{Base, \bar{v}_i\}$).
— Pour chaque clause $C_i = (a \vee b \vee c)$ nous ajoutons un « gadget » à 6 sommets $c_i^1, c_i^2, \ldots, c_i^6$ et les arêtes $\{a, c_i^1\}$, $\{b, c_i^2\}$, $\{c, c_i^3\}$, $\{c_i^1, c_i^2\}$, $\{c_i^1, c_i^4\}$, $\{c_i^2, c_i^4\}$, $\{c_i^3, c_i^5\}$, $\{c_i^3, c_i^6\}$, $\{c_i^4, c_i^5\}$, $\{c_i^5, c_i^6\}$, $\{c_i^6, Neutre\}$, $\{c_i^6, False\}$ (on vous conseille de dessiner un exemple).

Le premier point permet de nommer les trois couleur $Vrai$, $Faux$ et $Neutre$, puisque chacun de ces trois sommets aura l'une des trois couleurs.

Les deux premiers points assurent que si G_ϕ est 3-coloriable, alors soit v_i soit $\bar{v}_i$ possède la couleur $Vrai$.

Le rôle de la troisième partie est d'assurer que si dans une clause C_i on a les trois littéraux coloriés $Faux$, alors dans le « gadget » associé on aura c_i^6 colorié à $Faux$ (il suffit d'essayer toutes les combinaisons pour s'en convaincre). De plus, si dans une clause C_i on a au moins un littéral colorié à $Vrai$, alors dans le « gadget » associé on aura c_i^6 colorié à $Vrai$ (il suffit d'essayer toutes les combinaisons pour s'en convaincre).

Argumentons donc que $\phi \in$ **3-SAT** $\iff$ $G_\phi \in 3$-**Couleur**.

Soit $\phi \in$ **3-SAT**. Il existe une valuation v qui satisfait ϕ, à partir de laquelle on peut construire la coloration qui à v_i associe la couleur $True$ si $v(x_i) = 1$ et la couleur $False$ si $v(x_i) = 0$. Pour chaque clause $C_i = (a \vee b \vee c)$, au moins un parmis a, b, c est coloré $Vrai$, donc le « gadget » associé peut être coloré de façon à ce que $c_i^6 = True$, ce qui donne une coloration valide de G_ϕ, donc $G_\phi \in 3$-**Couleur**.

Soit $G_\phi \in 3$-**Couleur**. Il existe une 3-coloration c valide, à partir de laquelle on peut construire la valuation qui à x_i associe 1 ssi $c(v_i) = True$ (et 0 dans les deux autres cas). Pour chaque clause $C_i = (a \vee b \vee c)$, il est impossible que les trois littéraux a, b, c soient évalués à 0, c'est-à-dire aient tous la couleur $Faux$ selon c, car dans ce cas le sommet c_i^6 doit nécessairement être colorié $Faux$ ou $Neutre$ selon c, or il est relié aux sommets $Faux$ et $Neutre$, ce qui contredirait la validité de c.