TD 09 – Révisions

Rappel : Lorsqu'aucune précision n'est donnée quand au problème **SAT**, il s'agit de celui-ci :

SAT
entrée : une formule propositionnelle ϕ en forme normale conjonctive.
question : ϕ est-elle satisfaisable ?

Exercice 1. *sur la taille des entrées et des entiers*

✎ Ecrire un algorithme qui décide si un entier n est premier (on ne demande pas qu'il soit efficace). Préciser sa complexité, c'est-à-dire son temps de calcul.

Exercice 2. P *et la complémentation*

Si A est un problème de décision, on nomme *complémentaire* de A, et on note co-A, le problème de décision obtenu à partir de A en inversant instances positives et instances négatives. Autrement dit, les instances (entrées) de A et co-A sont les mêmes, mais on pose $x \in$ co-A ssi $x \notin A$ (de façon équivalente, on peut définir co-$A = {}^cA = \Sigma_A^* \setminus A$).

Ainsi, le complémentaire du problème **SAT** est le problème **co-SAT** défini par :

co-SAT
entrée : une formule propositionnelle ϕ.
question : ϕ est-elle non-satisfaisable ?

✎ Montrer que la classe P est close par complémentation, c'est-à-dire que pour tout problème $A \in \mathsf{P}$, on a co-$A \in \mathsf{P}$.

Exercice 3. **Noyau $\leq_m^p$ SAT**

Un *noyau* d'un graphe orienté $G = (V, A)$ est un ensemble N de sommets indépendants (aucune arrête entre deux sommets de N) et tel que tout sommet extérieur à N a un successeur dans N. Autrement dit, $N \subseteq V$ est un noyau s'il satisfait les deux contraintes :

(i) $\forall x, y \in N \ : \ (x, y) \notin A$ **(ii)** $\forall x \notin N \ : \ \exists y \in N \ : \ (x, y) \in A$

On définit alors le problème **Noyau** ci-dessous :

Noyau
entrée : un graphe orienté $G = (V, A)$.
question : G admet-il un noyau ?

1. Donner un exemple de graphe $G_1 \in$ **Noyau**, et un exemple de graphe $G_2 \notin$ **Noyau**.
2. Montrer que **Noyau** $\in \mathsf{NP}$.
3. Montrer que **Noyau** $\leq_m^p$ **SAT**, sans utiliser la question 2.
4. Montrer que **Noyau** est NP-complet. (Indice : réduire depuis **SAT**.)

Exercice 4. *vrai ou faux ?*

On considère quatre problèmes de décision A, B, C, D vérifiant :

(i)$A \in \mathsf{P}$ **(ii)**B est NP-difficile **(iii)**$C \in \mathsf{NP}$

1. Si on suppose que $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, alors que dire de la validité des affirmations suivantes ?

(a) Si $A \leq_m^p D$, alors $D \in \mathsf{P}$.

(b) Si $D \leq_m^p A$, alors $D \in \mathsf{P}$.

(c) Si $D \leq_m^p B$, alors D est NP-difficile.

(d) Si $B \leq_m^p D$, alors D est NP-difficile.

(e) Si $D \leq_m^p C$, alors $D \in \mathsf{NP}$.

(f) Si $C \leq_m^p D$, alors $D \in \mathsf{NP}$.

2. Si on suppose que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, alors que dire de la validité de ces mêmes affirmations ?

Exercice 5. *quelques machines de Turing*

1. Construire des machines de Turing qui décident les langages suivants.

(a) L'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ comportant un nombre pair de 1.

(b) L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ qui sont des palindromes.

2. Évaluer le temps de calcul de vos machines.

Exercice 6. *colorabilité*

Voici les définitions des problèmes k-**SAT** et k-**Couleur**, pour $k \geq 2$:

k-**SAT**
entrée : une formule ϕ sous forme normale conjonctive avec des clauses de taille k.
question : ϕ est-elle satisfaisable ?

k-**Couleur**
entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$.
question : G est-il k-coloriable ?

Un graphe est *k-coloriable* s'il est possible de colorier ses sommets avec au plus k couleurs, de sorte que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs distinctes.

1. Donnez un exemple de graphe G_1 à 5 sommets qui soit 3-coloriable, en justifiant.

2. Donnez un exemple de graphe G_2 à 5 sommets qui ne soit pas 3-coloriable, en justifiant.

3. Montrez que **3-Couleur** $\in \mathsf{NP}$.

4. Montrez que pour $k \geq 2$ fixé, k-**Couleur** $\leq_m^p$ k-**SAT**.

5. Que peut-on en déduire sur la complexité de k-**Couleur** pour tout k ? Et pour $k = 2$?

Pour chaque graphe non-orienté G, on note $r(G)$ le graphe obtenu en adjoignant à G un nouveau sommet α relié à chacun des sommets de G. Autrement dit, pour $G = (V, E)$, le graphe $r(G) = (V', E')$ est défini par :

$$V' = V \cup \{\alpha\} \quad \text{et} \quad E' = E \cup \big\{\{\alpha, x\} \mid x \in V\big\}.$$

6. Dessiner les graphes $r(G_1)$ et $r(G_2)$ avec G_1 et G_2 vos réponses aux questions 1 et 2.

7. Que peut-on dire de la 4-colorabilité de chacun des deux graphes $r(G_1)$ et $r(G_2)$?

8. Montrez que l'application $r : G \mapsto r(G)$ est une réduction many-one polynomiale de k-**Couleur** à $(k+1)$-**Couleur**.

9. Si l'on arrive à démontrer que 3-**Couleur** est NP-complet, que peut-on en déduire sur la complexité de k-**Couleur** pour chaque $k \geq 3$?

10. Montrer que 3-**Couleur** est NP-complet. (Indice : réduire depuis **3-SAT**.)