Examen session 1 – Calculabilité (SIN6U05L)

Durée : 2 heures *(Barème indicatif)*
Documents : autorisés
Examen à distance, travail individuel, les échanges avec vos camarades sont interdits.

Attention : vous ne devez pas traiter tous les exercices, commencez par l'exercice 0.

Exercice 0. *PRNG30 (1 point)*

1. Inscrire votre nom, en minuscules (avec les charactères `a` à `z`).
2. Suivre la consigne ci-dessous, et inscrire les numéros des exercices que vous devez traiter.

Consigne : utiliser votre réponse à la première question de l'exercice 0 comme graine à l'adresse suivante, et cliquer sur « calculer mes exercices ».
`https://pageperso.lis-lab.fr/kevin.perrot/prng/calculabilite-examen01.html`

Exercice 1. *≈ Cadeau (2 points)*

1. Qu'est-ce qu'un langage semi-décidable ?
2. L'alphabet de ruban d'une machine de Turing est un ensemble fini. Pourquoi ?

Exercice 2. *≈ Cadeau (2 points)*

1. Qu'est-ce qu'un langage indécidable ?
2. Un langage contenant un nombre fini de mots peut-il être indécidable ? Justifier.

Exercice 3. *≈ Cadeau (2 points)*

1. Qu'est ce qu'une fonction $f : A \to B$ calculable ?
2. Réordonner les symboles suivants afin d'énoncer le théorème de l'arrêt :
   $\forall\ \exists\ \exists : M_1\ M_1\ M_2\ M_2\ M_2\ \langle\rangle\ \langle\rangle\ w\ w\ w\ halt\ ()\ ()\ ,\ ,\ \neq.$

Exercice 4. *≈ Cadeau (2 points)*

1. Donner un exemple de machine de Turing qui ne s'arrête pas sur l'entrée aaa.
2. Le symbole blanc doit vérifier $B \in \Gamma \setminus \Sigma$. Pourquoi ?

Exercice 5. *Machine de Turing (6 points)*

Soit le langage $L = \Big\{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w_1 w_2 \ldots w_k \text{ avec } (k \equiv 0 \mod 2) \text{ et } (w_{\frac{k}{2}} = a) \Big\}$.

1. Donner deux mots de $\{a,b\}^*$ appartenant à L.
2. Donner deux mots de $\{a,b\}^*$ n'appartenant pas à L.
3. Donner l'automate d'une machine de Turing reconnaissant le langage L.
4. Donner l'exécution de votre machine sur l'entrée $aaaa$ (donc en partant de q_0aaaa).

Exercice 6. *Machine de Turing (6 points)*

Soit le langage $L = \Big\{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w_1 w_2 \ldots w_k \text{ avec } (k \equiv 3 \mod 5) \text{ et } (w_3 \notin \{w_1, w_k\}) \Big\}$.

1. Donner deux mots de $\{a,b\}^*$ appartenant à L.
2. Donner deux mots de $\{a,b\}^*$ n'appartenant pas à L.
3. Donner l'automate d'une machine de Turing reconnaissant le langage L.
4. Donner l'exécution de votre machine sur l'entrée aaa (donc en partant de q_0aaa).

Exercice 7. *Machine de Turing (6 points)*

Soit le langage $L = \Big\{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w_1 w_2 \ldots w_k \text{ avec } (k \equiv 1 \mod 2) \text{ et } (w_{\frac{k+1}{2}} = a) \Big\}$.

1. Donner deux mots de $\{a,b\}^*$ appartenant à L.
2. Donner deux mots de $\{a,b\}^*$ n'appartenant pas à L.
3. Donner l'automate d'une machine de Turing reconnaissant le langage L.
4. Donner l'exécution de votre machine sur l'entrée aaa (donc en partant de q_0aaa).

Exercice 8. *Machine de Turing (6 points)*

Soit le langage $L = \Big\{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w_1 w_2 \ldots w_k \text{ avec } (k \equiv 5 \mod 6) \text{ et } (w_1 \in \{w_4, w_k\}) \Big\}$.

1. Donner deux mots de $\{a,b\}^*$ appartenant à L.
2. Donner deux mots de $\{a,b\}^*$ n'appartenant pas à L.
3. Donner l'automate d'une machine de Turing reconnaissant le langage L.
4. Donner l'exécution de votre machine sur l'entrée $aaaaa$ (donc en partant de q_0aaaaa).

Exercice 9. *Réduction « simple » (6 points)*

Rappel : le langage $L_{\bar{u}} = \{\langle M\rangle \# w \mid w \notin L(M)\}$ n'est pas semi-décidable.

1. Montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L = \{\langle M\rangle \# w \mid awb \notin L(M)\}$.

2. Que peut-on en déduire sur L ?

Exercice 10. *Réduction « simple » (6 points)*

Rappel : le langage $L_u = \{\langle M\rangle \# w \mid w \in L(M)\}$ n'est pas décidable.

1. Montrer que $L_u \leq_m^T L = \{\langle M\rangle \# w \mid ww \in L(M)\}$.

2. Que peut-on en déduire sur L ?

Exercice 11. *Réduction « simple » (6 points)*

Rappel : le langage $L_{\bar{u}} = \{\langle M\rangle \# w \mid w \notin L(M)\}$ n'est pas semi-décidable.

1. Montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L = \{\langle M\rangle \# w \mid ww \notin L(M)\}$.

2. Que peut-on en déduire sur L ?

Exercice 12. *Réduction « simple » (6 points)*

Rappel : le langage $L_u = \{\langle M\rangle \# w \mid w \in L(M)\}$ n'est pas décidable.

1. Montrer que $L_u \leq_m^T L = \{\langle M\rangle \# w \mid bwa \in L(M)\}$.

2. Que peut-on en déduire sur L ?

Exercice 13. *Divers (5 points)*

Justifier vos réponses par des démonstrations ou des contre-exemples.

1. La relation de réduction est-elle réflexive, c'est-à-dire $A \leq_m^T A$ pour tout langage A ? Justifier.

2. La relation de réduction est-elle symétrique, c'est-à-dire, pour tous langages A, B, si $A \leq_m^T B$ alors $B \leq_m^T A$? Justifier.

3. La relation de réduction est-elle transitive, c'est-à-dire, pour tous langages A, B, C, si $A \leq_m^T B$ et $B \leq_m^T C$ alors $A \leq_m^T C$? Justifier.

Exercice 14. *Divers (5 points)*

La fonction du castor affairé $C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ défini la valeur $C(n, m)$ du plus grand nombre d'étapes de temps d'un calcul qui, sur l'entrée vide ϵ, s'arrête, pour une machine de Turing à $|Q| = n$ états et $|\Gamma| = m$ symboles de ruban.

1. En gardant notre convention qu'aucune transition ne sort de l'état final, donner une machine de Turing atteignant la valeur $C(3, 2) = 6$ (sur l'alphabet de ruban $\Gamma = \{B, 1\}$).

2. À partir de vos connaissances sur l'arrêt des machines de Turing, proposer un raisonnement par l'absurde pour démontrer que C croît plus vite que toute fonction calculable.

Exercice 15. *Divers (5 points)*

La conjecture de Goldbach, formulée en 1742 et toujours ouverte, énonce que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

1. Donner un programme qui s'arrête si et seulement si la conjecture de Goldbach est fausse (ce programme n'a pas d'entrée).

On peut déduire de votre réponse précédente que si l'on savait décider le problème de l'arrêt, alors on saurait décider si la conjecture de Goldbach est vraie ou fausse.

2. Dans la phrase précédente, que veut dire « décider si la conjecture de Goldbach est vraie ou fausse » ? Répondre en complétant la phrase : « il existe un programme... ».

3. Peut-on néanmoins semi-décider si cette conjecture est vraie ? ou bien si elle est fausse ?

Exercice 16. *Divers (5 points)*

On dit qu'un nombre réel est calculable si et seulement si il existe une machine de Turing qui énumère tous ses digits, dans l'ordre. Par exemple, le réel $\pi = 3.14159...$ est calculable : on peut écrire un programme qui énumère 3 puis . puis 1 puis 4 puis 1 puis 5 puis 9 *etc.*

1. Est-ce que tous les nombres réels sont calculables ? Justifier.

2. Avec vos connaissances sur l'arrêt des machines de Turing, proposer la définition d'un nombre réel non calculable, en expliquant vos raisonnements (indication : on pourra se servir d'une bijection entre l'ensemble des machines de Turing et $\mathbb{N}$).

Exercice 17. *Réductions « difficiles » (Bonus 8 points)*

Rappel : le langage $L_{\bar{u}} = \{\langle M\rangle\#w \mid w \notin L(M)\}$ n'est pas semi-décidable, et $M(w)\uparrow$ signifie que M ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée w.

On note $A =_m^T B$ lorsque $A \leq_m^T B$ et $B \leq_m^T A$.

1. Montrer que $L_{\bar{u}} =_m^T L$ avec $L = \{\langle M\rangle \mid \forall w : M(w)\uparrow\}$.

Exercice 18. *Réductions « difficiles » (Bonus 8 points)*

Rappel : le langage $L_{halt\epsilon} = \{\langle M\rangle \mid M(\epsilon)\downarrow\}$ n'est pas décidable, $M(w)\downarrow$ signifie que M s'arrête quand on la lance sur l'entrée w, et ϵ désigne le mot vide.

On note $A =_m^T B$ lorsque $A \leq_m^T B$ et $B \leq_m^T A$.

1. Montrer que $L_{halt\epsilon} =_m^T L$ avec $L = \{\langle M\rangle \mid \exists w : M(w)\downarrow\}$.

Exercice 19. *Réductions « difficiles » (Bonus 8 points)*

Rappel : le langage $L_u = \{\langle M\rangle\#w \mid w \in L(M)\}$ n'est pas décidable, et $M(w)\downarrow$ signifie que M s'arrête quand on la lance sur l'entrée w.

On note $A =_m^T B$ lorsque $A \leq_m^T B$ et $B \leq_m^T A$.

1. Montrer que $L_u =_m^T L$ avec $L = \{\langle M\rangle \mid \exists w : M(w)\downarrow\}$.

Exercice 20. *Réductions « difficiles » (Bonus 8 points)*

Rappel : le langage $L_{\overline{halt\epsilon}} = \{\langle M\rangle \mid M(\epsilon)\uparrow\}$ n'est pas semi-décidable, $M(w)\uparrow$ signifie que M ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée w, et ϵ désigne le mot vide.

On note $A =_m^T B$ lorsque $A \leq_m^T B$ et $B \leq_m^T A$.

1. Montrer que $L_{\overline{halt\epsilon}} =_m^T L$ avec $L = \{\langle M\rangle \mid \forall w : M(w)\uparrow\}$.