TD 04 – Pavages, théorème de Rice

Exercice 1. *Propriétés de non-clôture*

Montrer avec des contre-exemples que les propriétés suivantes sont **<u>fausses</u>**.

1. La famille des langages non décidables est close par intersection et union.
2. La famille des langages non semi-décidables est close par complémentation.

Montrer que la propriété de clôture suivante est en revanche **<u>vraie</u>**.

3. La famille des langages non décidables est close par complémentation.

Exercice 2. *Des puzzles... indécidables !*

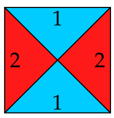
Dans cet exercice nous allons démontrer que le problème suivant est indécidable :

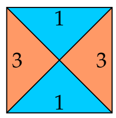
PAVABILITÉ-DÉPART (pavabilité du plan avec tuile de départ) *Entrée :* un jeu de tuiles T, et une tuile de départ $t_0 \in T$. *Question :* existe-t-il un T-pavage τ avec $\tau(0,0) = t_0$?

Une *tuile* t est un carré de taille 1×1 dont chacun des quatre côtés comporte une couleur représentée par un entier ; c'est-à-dire $t = (t_n, t_e, t_s, t_o) \in \mathbb{N}^4$ donne les couleurs sur les côtés nord t_n, est t_e, sud t_s et ouest t_o. Un *jeu de tuiles* T est un ensemble fini de tuiles (qui utilisent donc un nombre fini de couleurs). Un T-pavage $\tau : \mathbb{Z}^2 \to T$ associe à chaque case de l'espace en deux dimensions $\mathbb{Z}^2$, une tuile de T, de façon à ce que deux tuiles adjacentes aient la même couleur sur leur côté en commun (par exemple si $\tau(0,0) = t$ et $\tau(1,0) = t'$ avec $t = (t_n, t_e, t_s, t_o)$ et $t' = (t'_n, t'_e, t'_s, t'_o)$ alors on doit avoir $t_e = t'_o$).

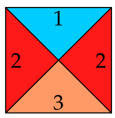
Important : d'après la définition on a autant de copies que l'on veut de chaque tuile, mais on ne peut pas tourner les tuiles.

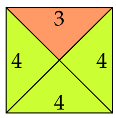
1. Quels U-pavages peut-on former avec le jeu de tuiles $U = \{u_0, u_1\}$, où :

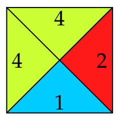
$u_0 =$ 

et $u_1 =$ 

2. L'instance U, u_0 est-elle positive ou négative ?
3. Soit $V = \{v_0, v_1, v_2\}$ un jeu de tuiles, avec

$v_0 =$ 

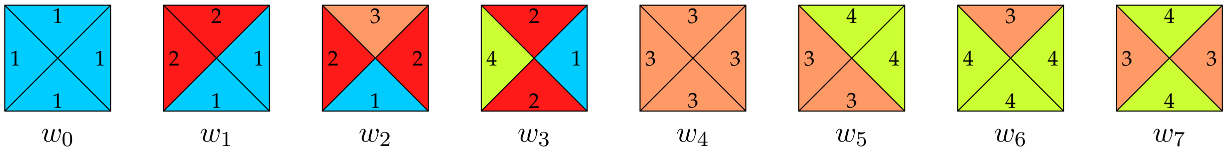
, $v_1 =$ 

et $v_2 =$ 

L'instance V, v_0 est-elle positive ou négative ?

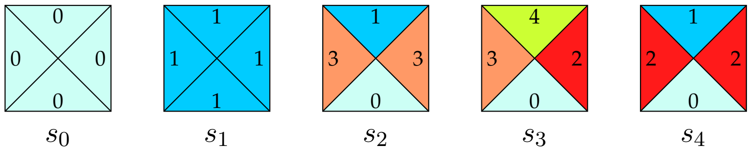
4. Pourquoi est-ce important que l'on ne puisse pas tourner les tuiles ?
5. Reformuler ce problème de décision comme un langage. *(Indication : il faut donner un encodage des jeux de tuiles comme des mots sur un alphabet de votre choix).*

6. Soit $W = \{w_0, w_1, \ldots, w_7\}$ le jeu de tuiles suivant :



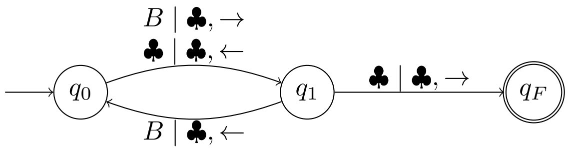
Essayer d'assembler des tuiles de W en partant de w_1, et tâcher de comprendre ce que « fait » ce jeu de tuiles. L'instance W, w_1 est-elle positive ou négative ?

7. Soit $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ le jeu de tuiles suivant :



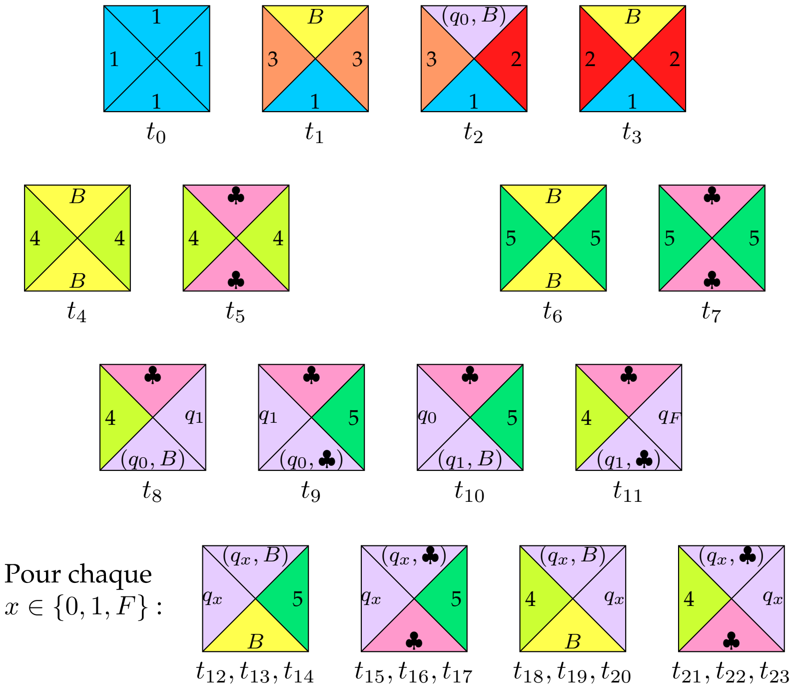
Ajouter des tuiles à S, de façon à ce que le S-pavage τ obtenu à partir de la tuile de départ s_3 soit unique et vérifie : $\tau(x, y) = s_3 \Leftrightarrow x = y$.

8. Soit M_{bb2} la machine de Turing à trois états $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabet de ruban $\Gamma = \{B, ♣\}$, et dont le graphe de transition est le suivant :



Le calcul de M_{bb2} sur l'entrée vide s'arrête-t-il ?

9. On considère maintenant le jeu de tuiles T composé des 23 tuiles suivantes :



Remarque : B, $\clubsuit$, (q_0, B), $(q_1, \clubsuit)$, *etc* sont des couleurs dans ce jeu de tuiles. Les couleurs utilisées sont en quantité finie, nous pouvons les convertir en entiers naturels.

L'instance T, t_2 du problème PAVABILITÉ-DÉPART est-elle positive ou négative ?

10. En remarquant la similitude entre le calcul de M_{bb2} et l'assemblage d'un pavage par les tuiles de T à partir de t_2, généraliser : étant donnée une machine de Turing arbitraire M, expliquer comment construire un jeu de tuiles T_M qui lui corresponde.

11. En déduire une réduction de $L_{\overline{halte}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée } \epsilon\}$ à PAVABILITÉ-DÉPART, et conclure.

Exercice 3. *Théorème de Rice*

Utiliser le théorème de Rice pour étudier la récursivité des propriétés suivantes.

1. $P_1 = \{L \mid L = a^*\}$.

2. $P_2 = \{L \mid aa \in L, \text{ et } \forall k \neq 2 : a^k \notin L\}$.

3. $P_3 = \{L \mid ab \notin L, \text{ ou } \exists k : ab^k \in L\}$.

4. $P_4 = \{\{\langle M \rangle \mid M \text{ n'accepte pas } \langle M \rangle\}\}$.

5. $P_5 = \{\{\langle M \rangle \mid M \text{ accepte } \langle M \rangle\}\}$.

6. Plus généralement, si L est semi-décidable, que peut-on dire de la propriété $P = \{L\}$?

Exercice 4. *Arrêt et conjectures mathématiques*

La conjecture de Golbach, formulée en 1742 et toujours ouverte, énonce que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

1. Donner un programme qui s'arrête si et seulement si la conjecture de Golbach est fausse (ce programme n'a pas d'entrée).

On peut déduire de votre réponse précédente que si l'on savait décider le problème de l'arrêt, alors on saurait décider si la conjecture de Golbach est vraie ou fausse.

2. Peut-on néanmoins semi-décider si cette conjecture est vraie ? ou bien si elle est fausse ?

La suite de Collatz (ou suite de Syracuse) d'un entier $n > 0$ est la suite infinie $(f^i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ avec

$$\begin{aligned} f : \ & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La conjecture de Collatz, formulée en 1937 et toujours ouverte, énonce que $\forall\ n > 0 : \exists\ i \geq 0 : f^i(n) = 1$, c'est-à-dire que la suite de Collatz de tout entier converge vers la boucle $1, 4, 2$.

3. Proposer un algorithme liant le problème de l'arrêt et la conjecture de Collatz.

Exercice 5. *Réductions Turing many-one pour les fonctions*

Pour obtenir une réduction Turing many-one d'une fonction $f : A \to B$ à une fonction $g : C \to D$, il faut donner deux fonctions calculables $h : A \to C$ et $h' : D \to B$ telles que pour tout $a \in A$ on ait $f(a) = h'(g(h(a)))$. On peut en déduire que si g est calculable alors f aussi, autrement dit que si f n'est pas calculable alors g non plus.

1. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_1 : (\langle M\rangle, w) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(bw)\uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

2. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_2 : \langle M\rangle \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(\epsilon)\uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

3. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_3 : \langle M\rangle \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } M(\epsilon)\uparrow \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

4. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_4 : \langle M\rangle \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(ab)\uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.