Calculabilité avancée (SINBU06) – Examen – Session 1

Durée : 2 heures *(Barème indicatif)*
Documents : non autorisés
Ce sujet comporte 1 page et 5 exercices

Soit $A \subseteq \{0,1\}^*$ un langage semi-décidable non-vide (c'est-à-dire $A \neq \emptyset$) quelconque, et soit l'ensemble des codes de machines de Turing dont le langage reconnu est A :

$$L_A = \{\langle M \rangle \mid L(M) = A\}.$$

Exercice 1. *Rice (3 points)*

✎ Appliquer le théorème de Rice pour montrer que L_A n'est pas un langage décidable.

Exercice 2. *Réduction (7 points)*

L'ensemble des codes de machines de Turing dont le calcul sur le mot vide s'arrête est un langage semi-décidable mais pas décidable : $L_{halt\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon){\downarrow}\}$.

✎ Montrer que $L_{halt\epsilon} \leq_m^T L_A$ (réduction many-one Turing).
Indication : utiliser le fait que $A \neq \emptyset$.

Exercice 3. *Complexité de Kolmogorov (6 points)*

La description minimale de $x \in \{0,1\}^*$, notée $d(x)$, est le plus petit mot $(\langle M \rangle, w)$ tel que l'exécution $M(w)$ de M sur w s'arrête avec le mot x sur son ruban. Alors $K(x) = |d(x)|$.

1. On associe à tout entier $x \in \mathbb{N}$ un mot dans $\{0,1\}^*$ qui est sa représentation en binaire. Ainsi on peut parler de la complexité de Kolmogorov des entiers naturels.
   Montrer que $\exists c \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : K(x^3 + 14) \leq K(x) + c$.
2. Comment calculer $K : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ avec un oracle pour le problème de l'arrêt ?
   C'est-à-dire, en supposant que vous puissiez faire des appels à un algorithme `HALT` prenant deux arguments $\langle M \rangle$ et w, et retournant `vrai` ou `faux` suivant si $M(w)\downarrow$ ou $M(w)\uparrow$ respectivement, donner un algorithme pour calculer la complexité de Kolmogorov.

Exercice 4. *Auto-référence (4 points)*

On considère ici les programmes qui prennent en entrée un entier naturel, et retournent en sortie un entier naturel. Un programme p est vu comme un mot dont la taille est son nombre de caractères, noté $|p|$. Soit $B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction qui à un entier n associe le plus grand entier retourné par l'exécution d'un programme de taille n sur l'entrée 42.

✎ Montrer que la fonction B n'est pas calculable, avec un raisonnement par l'absurde utilisant le fait qu'un programme peut avoir accès à son propre code source, qui lui est retourné par l'appel à `MONCODE()`.

Exercice 5. *Bonus (6 points)*

✎ Est-ce que le langage L_A est semi-décidable ? Justifier.
Indication : commencer par traiter le cas $A \neq \{0,1\}^*$.