CALCULABILITÉ AVANCÉE 2022-23 1 LAST

AUTOMATES CELLULAIRES — THÈSE DE CHURCH TURING (λ-CALCUL) — DEGRÉS TURING.

MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

AUTOMATES CELLULAIRES : 2021-22
GOL 1
DEFINITION 2
ECA 2

PAVAGES : TD

DEFINITION : UN JEU DE TUILES τ EST APÉRIODIQUE SSI τ PAVE $\mathbb{Z}^2$ ET AUCUN PAVAGE PAR τ N'EST RÉCURSIF/CALCULABLE.
(UN PAVAGE $t : \mathbb{Z}^2 \to \tau$ EST RÉCURSIF SSI t EST CALCULABLE).

LEMME : $A = \{ m \mid \phi_m(\varepsilon) \overset{\text{SORTIE}}{\downarrow}= 0 \}$ ET $B = \{ m \mid \phi_m(\varepsilon) = 1 \}$ SONT DISJOINTS ET RÉCURSIVEMENT INSÉPARABLES ($\nexists C$ RÉCURSIF/DÉCIDABLE TEL QUE $A \subseteq C$ ET $B \cap C = \emptyset$).
A ET B SONT RÉCURSIVEMENT ÉNUMÉRABLES.

PREUVE : INSÉPARABLES : PAR L'ABSURDE AVEC L'ACCÈS À SON PROPRE CODE !
1. CALCULER C(MOI) 2. OUTPUT L'AUTRE. $\square$

THM : IL EXISTE UN JEU DE TUILE APÉRIODIQUE (À ORIGINE FIXÉE).

PREUVE : LA LIGNE HORIZONTALE DE DÉPART DU CALCUL DOIT CONTENIR UN SÉPARATEUR DE A ET B POUR QUE CE CALCUL/PAVAGE NE S'ARRÊTE PAS.
POUR CELA ON FAIT DU DOVETAILING POUR SIMULER $\phi_m(\varepsilon)$ POUR TOUT $m \in \mathbb{N}$, ET À CHAQUE ARRÊT DONNANT EN SORTIE 0 OU 1 ON VÉRIFIE LE BIT CORRESPONDANT DU SÉPARATEUR.

NB : A ET B À BASE D'AUTOMATES CELLULAIRES, ET CODER DIRECTEMENT LE DOVETAILING D'A.C. EN JEU DE TUILE (ASSEMBLEUR PLUS PROCHE DE MINECRAFT QUE DE INTEL X86 ...). $\square$

SANS LA TUILE D'ORIGINE FIXÉE ? ROBINSON ...
DOMINO PB INDÉCIDABLE $\overset{\text{(COMPACITÉ)}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ PAVAGES APÉRIODIQUES

NB : TOUT EST CONSTRUCTIF ♡

THÈSE DE CHURCH-TURING.

CM + TD (λ-CALCUL)

$\downarrow$

THÉORÈME DE GANDY !

DEGRÉS TURING.

RÉDUCTIONS AVEC <u>ORACLE</u> $\leq^T$

PLUS GÉNÉRALES QUE LES RÉDUCTION MANY-ONE $\leq^T_m$

<u>PROPRIÉTÉ</u> : $\leq^T$ EST UN $\overbrace{\text{ORDRE PARTIEL}}^{\text{POSET}}$ (RÉFLEXIF, TRANSITIF, ANTISYMÉTRIQUE).

$\uparrow$ IL EXISTE DES INCOMPARABLES

LA CLASSE D'ÉQUIVALENCE DE X POUR $\leq^T$.

LE DEGRÉ TURING D'UN LANGAGE X EST $[X] = \{A \mid \underbrace{X \leq^T A \text{ ET } A \leq^T X}_{X \equiv^T A}\}$.

$[\emptyset]$ = LANGAGES DÉCIDABLES = $\mathbf{0}$. C'EST LE PLUS PETIT ÉLÉMENT DU POSET.

$[L_{halte}]$ = LANGAGES SEMI-DÉCIDABLES = $\mathbf{0}'$

POUR TOUT X ON NOTE X' LE SAUT TURING DE X (TURING JUMP) : L'ENSEMBLE DES CODES DE M.T. AVEC ORACLE X QUI S'ARRÊTENT SUR ε.

LE SAUT TURING DU DEGRÉ $[X]$ EST LE DEGRÉ $[X']$. ON A $X \equiv^T Y \Leftrightarrow X' \equiv^T Y'$.

ON PEUT ÉTENDRE $\leq^T$ AUX DEGRÉS EN DÉFINISSANT $[X] \leq^T [Y]$ SSI $X \leq^T Y$.

<u>THM</u> : TOUS LES ÉNONCÉS SUIVANTS SONT VRAIS :

- IL EXISTE $2^{\aleph_0}$ DEGRÉS TURING.
- POUR TOUT DEGRÉ IL EXISTE UN NOMBRE DÉNOMBRABLE DE DEGRÉS QUI LUI SONT INFÉRIEURS.
- ——— $2^{\aleph_0}$ ——— SUPÉRIEURS.
- IL EXISTE DES DEGRÉS STRICTEMENT ENTRE $\mathbf{0}$ ET $\mathbf{0}'$ (MÉTHODE DES PRIORITÉ :
  <u>THM</u> [FRIEDBERG 1957, MUCHNIK 1956] : IL EXISTE A SEMI-DÉCIDABLE ($A \leq^T \mathbf{0}'$) NI DÉCIDABLE ($\mathbf{0} <^T A$) NI TURING-COMPLET POUR LES SEMI-DÉCIDABLES ($A <^T \mathbf{0}'$).)
- IL EXISTE DES DEGRÉS $[X] \neq \mathbf{0}$ TELS QUE $\nexists [Y] : \mathbf{0} <^T [Y] <^T [X]$.
- POUR TOUT DEGRÉ $[X]$, IL EXISTE DES DEGRÉS QUI LUI SONT INCOMPARABLES.

SEMI-TREILLIS
UPPER SEMILATTICE

- IL EXISTE DES PAIRES DE DEGRÉS QUI N'ONT PAS DE PLUS GRANDE BORNE INFÉRIEURE (MEET).
- TOUTE PAIRE DE DEGRÉS $([X],[Y])$ A UNE PLUS PETITE BORNE SUPÉRIEURE (JOIN, $[X] \oplus [Y] = [\{2n \mid n \in X\} \cup \{2m+1 \mid m \in Y\}]$).
- AUCUNE SÉQUENCE INFINIE STRICTEMENT CROISSANTE DE DEGRÉS N'A DE PLUS PETITE BORNE SUP, MAIS DES "PAIRES EXACTES" : POUR $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$: $\exists A,B : \forall C : (C <^T A \wedge C <^T B) \Leftrightarrow (\exists i : C \leq^T X_i)$.
  DE BORNES SUP. MINIMALES

CONCLUSION : C'EST LE BORDEL ... (WIKIPEDIA) 3 LAST

EN EFFECTUANT DES SAUTS TURING DEPUIS 0

ON SE BALADE DANS LA HIÉRARCHIE ARITHMÉTIQUE : $\Delta^0_1, \Delta^0_2, \Delta^0_3 \dots$

QUANTIFICATIONS DU SECOND ORDRE : ← ANALYTIQUE
SUR IN (PREMIER ORDRE)
ET SUR $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (SECOND ORDRE)

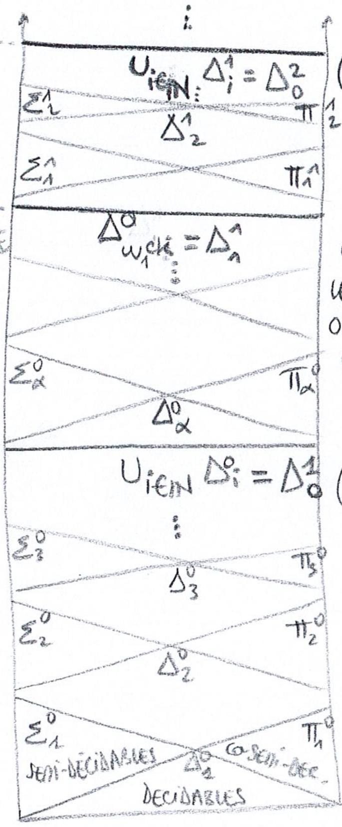
HYPERARITHMÉTIQUE

ILLUSTRATION WIKIPEDIA

← α ORDINAL CALCULABLE

ARITHMÉTIQUE

POSSÈDE UNE FORMULATION ← À BASE D'ALTERNANCE DE QUANTIFICATEURS SUR DES VARIABLES ENTIÈRES PUIS ÉQUATION POLYNOMIALE
"
ARITHMÉTIQUE DE PEANO



$(= \Sigma^2_0 = \Pi^2_0)$

ω_1^{ck} EST LE PLUS PETIT ORDINAL NON CALCULABLE.

$(= \Sigma^1_0 = \Pi^1_0)$

- EXEMPLE HYPERARITHMÉTIQUE PAS ARITHMÉTIQUE :
  L'ENSEMBLE DES NUMÉROS DE GÖDEL DES ÉNONCÉS DE L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO QUI SONT VRAIS DANS LE MODÈLE STANDARD DE IN [THM D'INDÉFINISSABILITÉ DE TARSKI].

- EXEMPLE DE PROBLÈME COMPLET DANS LA HIÉRARCHIE ANALYTIQUE :
  ÉTANT DONNÉ UN JEU DE TUILES τ DONT UNE TUILE EST ROUGE, EST-CE QU'IL EXISTE UN PAVAGE PAR τ AVEC UNE INFINITÉ DE COPIES DE LA TUILE ROUGE ?