

TD 05 – Théorème de Rice et pavages

Exercice 1.*Théorème de Rice*

Utiliser le théorème de Rice pour étudier la décidabilité des propriétés suivantes.

1. $P_1 = \{a^*, ba^*, b + a^*\}$.
2. $P_2 = \{L \mid aa \in L, \text{ et } \forall k \neq 2 : a^k \notin L\}$.
3. $P_3 = \{L \mid ab \notin L, \text{ ou } \exists k : ab^k \in L\}$.
4. $P_4 = \{\{\langle M \rangle \mid M \text{ n'accepte pas } \langle M \rangle\}\}$.
5. $P_5 = \{\{\langle M \rangle \mid M \text{ accepte } \langle M \rangle\}\}$.
6. Plus généralement, si L est semi-décidable, que peut-on dire de la propriété $P = \{L\}$?

Exercice 2.*Des puzzles... indécidables!*

Dans cet exercice nous allons démontrer que le problème suivant est indécidable :

PAVABILITÉ-DÉPART (pavabilité du plan avec tuile de départ)

Entrée : un jeu de tuiles T , et une tuile de départ $t_0 \in T$.

Question : existe-t-il un T -pavage τ avec $\tau(0, 0) = t_0$?

Une *tuile* t est un carré de taille 1×1 dont chacun des quatre côtés comporte une couleur représentée par un entier; c'est-à-dire $t = (t_n, t_e, t_s, t_o) \in \mathbb{N}^4$ donne les couleurs sur les côtés nord t_n , est t_e , sud t_s et ouest t_o . Un *jeu de tuiles* T est un ensemble fini de tuiles (qui utilisent donc un nombre fini de couleurs). Un T -pavage $\tau : \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ associe à chaque case de l'espace en deux dimensions \mathbb{Z}^2 , une tuile de T , de façon à ce que deux tuiles adjacentes aient la même couleur sur leur côté en commun (par exemple si $\tau(0, 0) = t$ et $\tau(1, 0) = t'$ avec $t = (t_n, t_e, t_s, t_o)$ et $t' = (t'_n, t'_e, t'_s, t'_o)$ alors on doit avoir $t_e = t'_o$).

Important : d'après la définition on a autant de copies que l'on veut de chaque tuile, mais on ne peut pas tourner les tuiles.

1. Quels U -pavages peut-on former avec le jeu de tuiles $U = \{u_0, u_1\}$, où :

$$u_0 = \begin{array}{|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{2} \quad \text{2} \\ \hline \text{1} \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad u_1 = \begin{array}{|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{3} \quad \text{3} \\ \hline \text{1} \\ \hline \end{array}$$

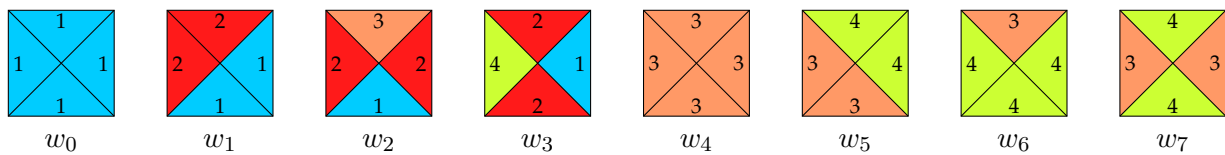
2. L'instance U, u_0 est-elle positive ou négative?
3. Soit $V = \{v_0, v_1, v_2\}$ un jeu de tuiles, avec

$$v_0 = \begin{array}{|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{2} \quad \text{2} \\ \hline \text{3} \\ \hline \end{array}, \quad v_1 = \begin{array}{|c|} \hline \text{3} \\ \hline \text{4} \quad \text{4} \\ \hline \text{4} \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{array}{|c|} \hline \text{4} \\ \hline \text{4} \quad \text{2} \\ \hline \text{1} \\ \hline \end{array}$$

L'instance V, v_0 est-elle positive ou négative?

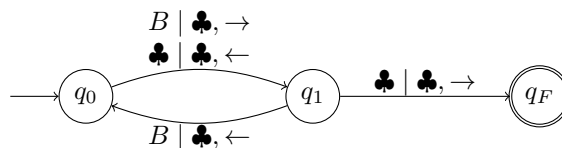
4. Pourquoi est-ce important que l'on ne puisse pas tourner les tuiles?
5. Reformuler ce problème de décision comme un langage. (*Indication* : il faut donner un encodage des jeux de tuiles comme des mots sur un alphabet de votre choix).

6. Soit $W = \{w_0, w_1, \dots, w_7\}$ le jeu de tuiles suivant :



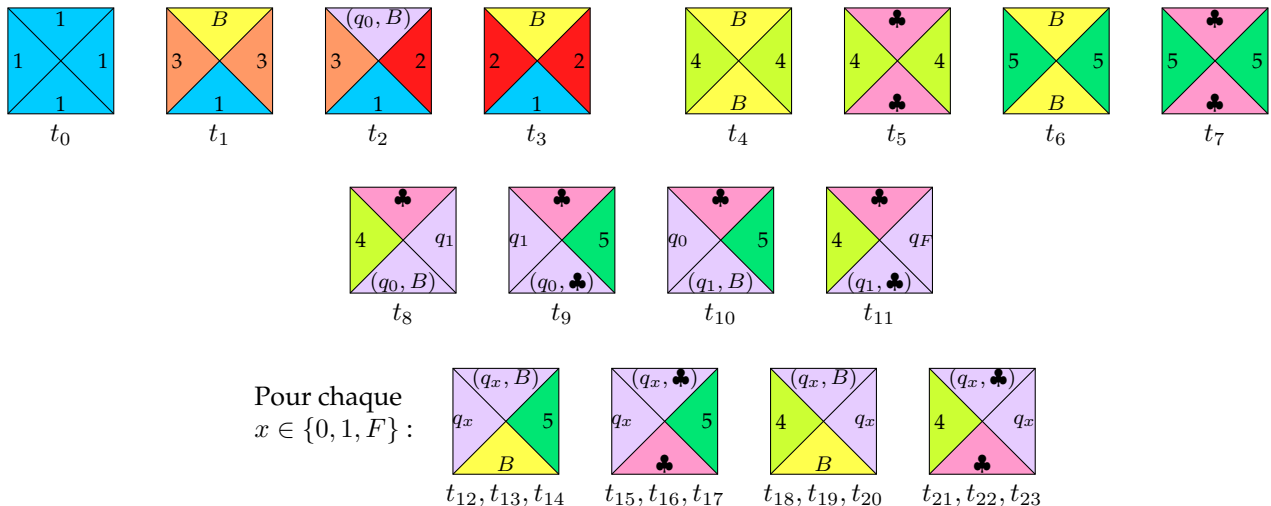
Essayer d'assembler des tuiles de W en partant de w_1 , et tâcher de comprendre ce que « fait » ce jeu de tuiles. L'instance W, w_1 est-elle positive ou négative ?

7. Soit M_{bb2} la machine de Turing à trois états $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabet de ruban $\Gamma = \{B, \clubsuit\}$, et dont le graphe de transition est le suivant :



Le calcul de M_{bb2} sur l'entrée vide s'arrête-t-il ?

8. On considère maintenant le jeu de tuiles T composé des 23 tuiles suivantes :



Remarque : $B, \clubsuit, (q_0, B), (q_1, \clubsuit), etc$ sont des couleurs dans ce jeu de tuiles. Les couleurs utilisées sont en quantité finie, nous pouvons les convertir en entiers naturels.

L'instance T, t_2 du problème PAVABILITÉ-DÉPART est-elle positive ou négative ?

9. En remarquant la similitude entre le calcul de M_{bb2} et l'assemblage d'un pavage par les tuiles de T à partir de t_2 , généraliser : étant donnée une machine de Turing arbitraire M , expliquer comment construire un jeu de tuiles T_M qui lui corresponde.

10. En déduire une réduction de $L_{\overline{halt\epsilon}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée } \epsilon\}$ à PAVABILITÉ-DÉPART, et conclure.