AUTOMATES CELLULAIRES

PRINT 1970 "MATHEMATICAL GAMES" (SCIENTIF AMERICAN) MARTIN GARDNER : JOHN HORTON CONWAY (1937 - 2020) ♡ FUN MATHS.

↳ À LA MAIN !  $\longrightarrow^*$ TRAFFIC LIGHT.

 (R PENTAMINO) $\longrightarrow^*$? CONWAY A CALCULÉ 460 ÉTAPES...

QUESTION OUVERTE (50\$) : UN MOTIF DONT LA POPULATION TEND VERS $+\infty$?

↳ GOSPER GLIDER GUN (PÉRIODE 30).

PRINT 1971 "LIFELINE #1" WAINWRIGHT... CLASSIFICATION.

DEF : UNE CONFIGURATION $x : \mathbb{Z}^2 \to \{0,1\}$.

~~UN VOISINAGE~~

UNE RÈGLE GLOBALE $F : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$

$$x \longmapsto y \quad \text{AVEC} \quad y(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x(i,j)=0 \text{ ET } \displaystyle\sum_{\substack{(i',j')\in\mathbb{Z}^2 \\ 1\leq\sqrt{|i-i'|^2+|j-j'|^2}\leq\sqrt{2}}} x(i',j') = 3 \\ 1 & \text{SI } x(i,j)=1 \text{ ET } 2 \leq \displaystyle\sum_{\text{IDEM}} x(i',j') \leq 3 \\ 0 & \text{SINON} \end{cases}$$

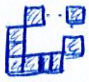
x EST FINIE LORSQUE $|\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid x(i,j)=1\}| \in \mathbb{N}$ $(<\infty)$. → DONNÉE PAR UNE MATRICE FINIE.

x EST PÉRIODIQUE LORSQU' $\exists p : F^p(x) = x$. (LE PLUS PETIT TEL) p EST LA PÉRIODE.

THÉORÈME : GOL EST OMNIPÉRIODIQUE : $\forall p \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : \exists x^{\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}, \text{ FINIE}}$ DE PÉRIODE p.

[LIFEWIKI / OMNIPERIODIC : $p=19$ ET $p=41$ EN JUILLET 2023 !]

CONWAYLIFE.COM/WIKI

GOLLY : GLIDERS  , RANDOM, GOLLY PATTERNS A, LIFEWIKI / PRIMER

GOLLY.SOURCEFORGE.NET

DEF : y EST UN JARDIN D'EDEN LORSQU' $\nexists x : F(x) = y$.

THÉORÈME [MOORE-MYHILL 1963] UN AC EST SURJECTIF ⇔ IL EST INJECTIF SUR LES CONFIGS FINIES.
(∅ JARDIN D'EDEN).

SUR LES CONFIGS AVEC UN NOMBRE FINI D'ÉTATS NON-QUIESCENTS

SUR LES PAIRES DE CONFIGS QUI DIFFÈRENT EN UN NOMBRE FINI DE CELLULES.

COROLLAIRE : IL EXISTE DES JARDINS D'EDEN DANS G.O.L.

PREUVE :  ⟶  ET  ⟶  DONC ¬INJECTIF FINI DONC ¬SURJECTIF. □

OUVERT : QUELLE EST LA TAILLE DU PLUS PETIT MOTIF JARDIN D'EDEN ? $(6\times6 < \cdot \leq 8\times12)$

TEST 2^{36} AVEC 2^{64} ANTÉCÉDANTS CHACUNE !

OUVERT : EXISTE-T-IL UNE FORTERESSE DANS GOL ?

THÉORÈME : LES PROBLÈMES DE DÉCISION SUIVANTS :

- ÉTANT DONNÉS 2 MOTIFS FINIS A ET B, LE MOTIF B VA-T-IL APPARAÎTRE AU COURS DE L'ÉVOLUTION DEPUIS LE MOTIF A ?
- ÉTANT DONNÉE UNE CONFIG FINIE x, TOUTES LES CELLULES VONT-ELLES MOURIR ? ($\exists t \in \mathbb{N} : \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2 : F^t(x)(i,j) = 0$?)
- ÉTANT DONNÉE UNE CONFIG FINIE x ET UNE CELLULE MORTE $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ T.Q. $x(i,j) = 0$, CETTE CELLULE VA-T-ELLE NAÎTRE AU COURS DE L'ÉVOLUTION ? ($\exists t \in \mathbb{N} : F^t(x)(i,j) = 1$?)

SONT TOUS INDÉCIDABLES.

IDÉE DE LA PREUVE : PORTES LOGIQUES (GOLLY PATTERNS B) ...

THÉORÈME [CONWAY ET AL. 1982]. GOL EST TURING-COMPLET.

[RENDELL 2000]. PREMIÈRE IMPLÉMENTATION ENTIÈREMENT FONCTIONNELLE D'UNE M.T.U. (11040 GÉNÉRATIONS PAR CYCLE DE MTU)

[LOIZEAU 2016]. ORDINATEUR PROGRAMMABLE 8-BIT (8 REGISTRES ET 13 INSTRUCTIONS)

AVEC
- P60 GLIDER GUN
- 90° GLIDER REFLECTOR
- GLIDER DUPLICATOR
- GLIDER EATER

$\Rightarrow$ BASCULE R-S (MÉMOIRE)

$\Rightarrow$ ARITHMETIC AND LOGIC UNIT

VIDEO : LIFE IN LIFE.

DEFINITION : UN AUTOMATE CELLULAIRE EST DÉFINI PAR

- UNE DIMENSION $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- UN ENSEMBLE FINI D'ÉTATS Q.
- UN VOISINAGE FINI $N = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ UN m-UPLET DE $\mathbb{Z}^d$.
- UNE RÈGLE LOCALE $f : Q^m \to Q$.

UNE CONFIGURATION $x : \mathbb{Z}^d \to Q$ ÉVOLUE EN $F(x) = y$ AVEC $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \to Q^{\mathbb{Z}^d}$

TELLE QUE $\forall i \in \mathbb{Z}^d : y(i) = f(x(i+n_1), x(i+n_2), \dots, x(i+n_m))$.

PAR VON NEUMANN ET ULAM DANS LES ANNÉES 1940.

$\hookrightarrow$ DÉMONSTRATION LOGIQUE DE L'AUTO-RÉPLICATION (29 ÉTATS GOLLY SELF-REP). ("PLUS GROS" ?!)

M1 IMD - CALCULABILITÉ AVANCÉE 2023-24

VIDÉO : VOUS PENSEZ QUE GOL EST EXCEPTIONNEL ? LARGER THAN LIFE.
SMOOTH LIFE.

THÉORÈME [GANDY 1980] : SI LES HYPOTHÈSES PHYSIQUES SUIVANTES SONT VRAIES :

1. NOTRE MONDE PHYSIQUE (SES LOIS) ~~…~~ EST HOMOGÈNE DANS L'ESPACE,
2. ——— LE TEMPS,
3. LA VITESSE DE PROPAGATION DE L'INFORMATION EST BORNÉE,
4. LA DENSITÉ D'INFORMATION EST BORNÉE,
5. IL EXISTE UN ÉTAT QUIESCENT (VIDE INTER-GALACTIQUE),

ALORS NOUS VIVONS DANS UN AC.

ET TOUTE FONCTION CALCULABLE PHYSIQUEMENT (PAR UN MÉCANISME) EST CALCULABLE PAR UNE MACHINE DE TURING.

THÈSE DE CHURCH-TURING.

IL Y A UNE VERSION QUANTIQUE DE CE RÉSULTAT PAR ARRIGHI ET DOWEK EN 2012.

AUTOMATES CELLULAIRES ÉLÉMENTAIRES (ECA) : TD

- FIRING SQUAD SYNCHRONIZATION PROBLEM : PAGE WEB NOUVEL / EXEMPLE "SIMPLE" SUR WIKIPEDIA / MAZOYER 1986/7. 6-STATES
- THÉORÈME DE RICE POUR LES ENSEMBLES LIMITES DES AC. $\Omega_F = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} F^t(Q^{\mathbb{Z}^d})$.
  THÉORÈME [KARI 1994] : TOUTE PROPRIÉTÉ NON TRIVIALE DE L'ENSEMBLE LIMITE EST INDÉCIDABLE.
  [GUILLON-RICHARD 2010] : À ÉTATS FIXÉ.
- FOURMI DE LANGTON. OUVERT : TOUJOURS UNE AUTOROUTE (PARTANT D'UNE CONFIG FINIE) ?
- LIFE WITHOUT DEATH.
- THÉORÈME [SMITH 1971] LES AC EN DIMENSION 1 SONT TURING-COMPLETS,
  DANS LE SENS OÙ POUR TOUTE M.T. $M = (Q, \Gamma, \delta)$ IL EXISTE UN AC $f : Q'^N \to Q'$ ET UNE FONCTION INJECTIVE $\varphi : \Gamma^{\mathbb{Z}} \times Q \times \mathbb{Z} \to Q'^{\mathbb{Z}}$ TELLE QUE $\varphi \circ M = F \circ \varphi$.
  PREUVE : AVEC $N = (-1, 0, 1)$ ET $Q' = \Gamma \cup (Q \times \Gamma)$ PAR EXEMPLE.