Automates et circuits : Ordres, treillis et algèbre de Boole

Arnaud Labourel
Courriel : arnaud.labourel@lif.univ-mrs.fr

Aix-Marseille Université

Imaginons une hiérarchie

Hiérarchie et précédence

Soit un ensemble E : avoir une *hiérarchie* sur E permet de définir une relation de précédence sur E :

a est en relation avec b si a précède b dans la hiérarchie

Exemples

- Les employés d'une société et la relation `est-responsable-de`
- Les livres et la relation `a-autant-ou-plus-de-pages-que`
- ... Les entiers naturels et la relation $\leq$

Propriétés de la précédence

Antisymétrique

Si a et b sont différents, et si a précède b, alors b ne peut pas précéder a
(sinon ce n'est plus une hiérarchie...)

Transitive

Si a précède b et si b précède c alors a précède c
(en principe !)

Réflexive

Le chef de service est responsable de lui-même, chaque livre a autant de pages que lui-même, $12 \leq 12$

Relation d'ordre : définition

Définition

Une relation *réflexive*, *antisymétrique* et *transitive*, s'appelle une relation d'ordre.
Un ensemble muni d'une relation d'ordre est un *ensemble ordonné*

Exemples

- Les relations $\leq$ et $\geq$ sur $\mathbb{N}$ sont des relations d'ordre
- Les relations $<$ et $>$ sur $\mathbb{N}$ n'en sont pas
- sur $\mathbb{N}^*$, la relation a divise b, notée $a \mid b$ est une relation d'ordre (a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$). Par exemple, $3 \mid 24$.

Ordre lexicographique

Soit $\mathbb{B}^*$ les mots binaires, avec l'ordre $0 < 1$
Soit ϵ le mot de longueur nulle
Soit $m \in \mathbb{B}^*$, $m = m_1 m_2 m_3 \cdots m_p$ et $w \in \mathbb{B}^*$, $w = w_1 w_2 w_3 \cdots w_q$

Ordre lexicographique $\preceq$

- $\forall m \in \mathbb{B}^*, \epsilon \preceq m$
- $m \preceq w$ si : $p = q$ et $\forall i, m_i = w_i$ $(011 \preceq 011)$
- $m \preceq w$ si : $m_1 = w_1,\ m_2 = w_2 \cdots m_{s-1} = w_{s-1}$ et $m_s < w_s$ avec $1 \leq s \leq p$ et $s \leq q$ $(101 \preceq 11)$

$100100 \preceq 1001001$, $01000111 \preceq 1100$, $01101 \preceq 01101$, $101 \preceq 110$
fa$\preceq$fa, poule $\preceq$ poulet, avion $\preceq$ train, livraison $\preceq$ livre, foot $\preceq$ fort

Notations et vocabulaire

Notations conventionnelles

- Relations d'ordre fréquentes :
  $\leq, \geq, \preceq, \succeq, \sqsubseteq, \sqsupseteq, \subseteq, \supseteq, |$ etc.
- Notation générale : $\ll$ et $\gg$

Vocabulaire conventionnel

Si $x \ll y$, on dit que :

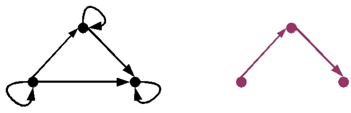
$$x \text{ est un minorant de } y \ (x \text{ minore } y)$$
$$y \text{ est un majorant de } x \ (y \text{ majore } x)$$

Par exemple, soit $\geq$, on a $5 \geq 2$, donc 5 minore 2...

Diagramme de Hasse : intuitivement

Version simplifiée du diagramme sagittal

Plus de boucles (réflexivité) et plus de flèche déductible par transitivité



Successeur immédiat

y est un successeur immédiat de x si :

1. $x \ll y$
2. $x \neq y$
3. il n'existe pas z tel que $x \ll z \ll y$

Diagramme de Hasse : un exemple

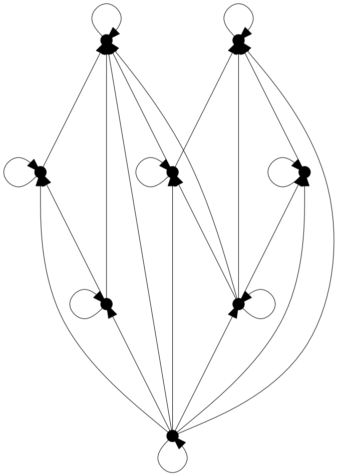


diagramme sagittal

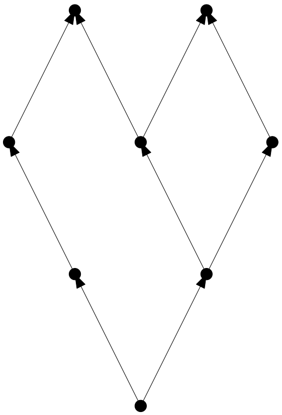


diagramme de Hasse

Exemples

Relation d'infériorité large $\leq$ chez $\mathbb{N}^+$

Chaque élément n'a qu'un seul successeur immédiat, par exemple 3 est le seul successeur immédiat de 2

Relation de divisibilité $|$

Il existe une infinité de successeurs immédiats de 2

$$4,\ 6,\ 10,\ 14,\ 22,\ 26,\ 34,\ 36,\ \text{etc.}$$

Ordre lexicographique

Le successeur immédiat de 100 est 1000 (et non pas 101 car $1000 \preceq 101$)

Théorème

Théorème

L'élément x minore y ($x \ll y$) si et seulement si on peut passer du point qui représente x au point qui représente y en suivant les flèches du diagramme de Hasse.

Intérêt

- Comment le diagramme de Hasse permet de visualiser la relation d'ordre.
- Topologie du diagramme

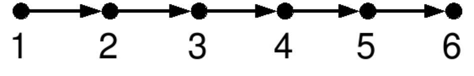
Ordre total (ou linéaire)

Définition

Une relation d'ordre $\ll$ sur A est un ordre total si et seulement si $\forall x, y \in A$, on a $x \ll y$ ou $y \ll x$.
Autrement dit, tout élément se compare à tout autre.

Exemple de $\leq$

L'ordre de large infériorité $\leq$ sur $\mathbb{N}_6^*$ est un ordre total.



Ordre total (cont'd)

Ensemble totalement ordonné

Un ensemble totalement ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre total

Diagramme de Hasse d'un ordre total

C'est une *Chaîne* (qui peut-être infinie)

Ordre partiel

Pour souligner qu'un ordre n'est pas total (par exemple la responsabilité entre employés), on dit qu'il s'agit d'un *ordre partiel* : certains éléments sont incomparables dans un tel ordre

Elément maximal

Définition

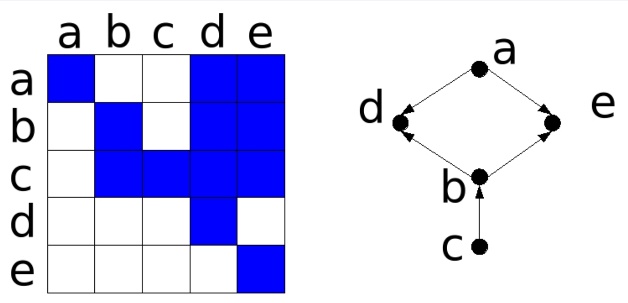
Un élément x d'un ensemble ordonné est *maximal* s'il ne possède pas d'autre majorant que lui-même.

Sur les diagrammes

- Diagramme de Hasse : un sommet duquel ne part aucune flèche
- Diagramme cartésien : sur sa ligne, aucune autre case noircie que celle de la diagonale (donc sur la matrice, cette ligne n'a qu'une valeur à 1)

Exemple d'éléments maximaux

Ici, *d* et *e* sont maximaux



Elément minimal

Définition

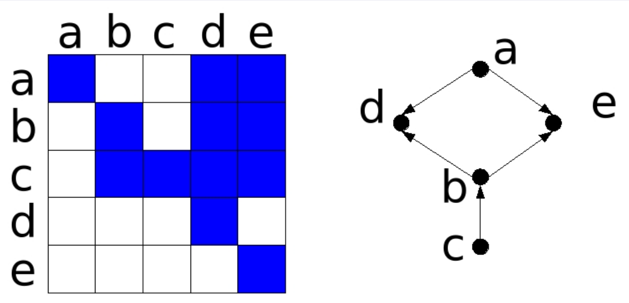
Un élément x d'un ensemble ordonné est *minimal* s'il ne possède pas d'autre minorant que lui-même.

Sur les diagrammes

- Diagramme de Hasse : un sommet vers lequel n'arrive aucune flèche
- Diagramme cartésien : sur sa colonne, aucune autre case noircie que celle de la diagonale (donc sur la matrice, cette colonne n'a qu'une valeur à 1)

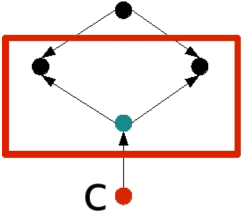
Exemple d'éléments minimaux

Ici, a et c sont minimaux



Notes sur les éléments maximaux et minimaux

- Ils existent toujours dans les ensembles ordonnés finis, mais pas toujours chez les infinis (ex : $\mathbb{Z}$)
- Les successeurs immédiats d'un élément x sont les éléments minimaux de l'ensemble formé par les majorants de x différents de x



Plus grand élément

Définition

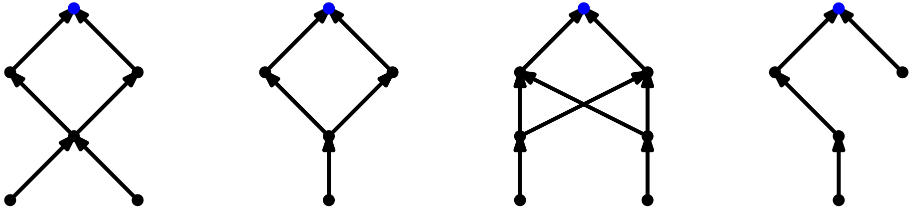
Un élément x est **le** plus grand élément d'un ensemble ordonné A s'il majore **tous** les éléments de A.

Sur les diagrammes

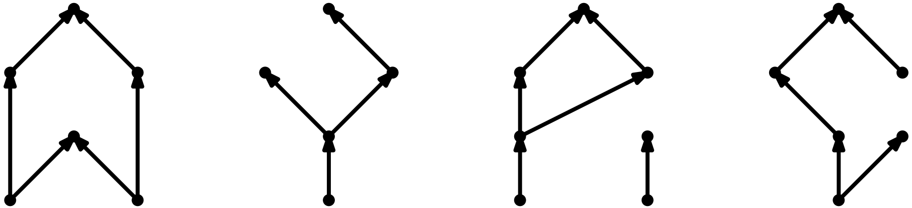
- Diagramme cartésien : la colonne qui lui correspond est complètement noircie
- Diagramme de Hasse : il existe un chemin (en parcourant les flèches) qui va de n'importe quel élément de A vers le plus grand

Exemples de plus grands éléments

plus grand élément



Exemples d'ensemble sans plus grands éléments



Plus petit élément

Définition

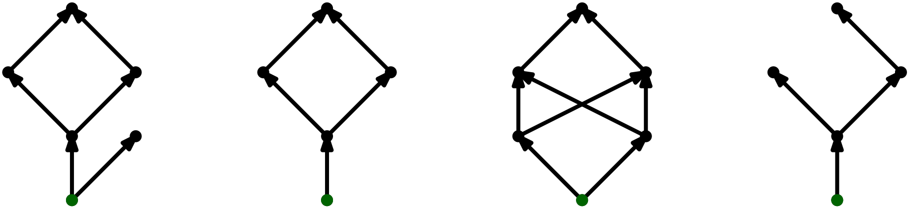
Un élément x est **le** plus petit élément d'un ensemble ordonné A s'il minore **tous** les éléments de A.

Sur les diagrammes

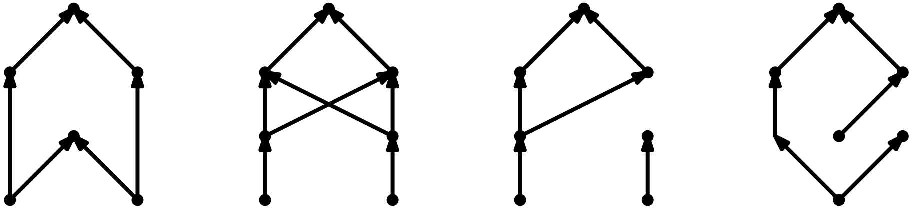
- Diagramme cartésien : la ligne qui lui correspond est complètement noircie
- Diagramme de Hasse : il existe un chemin (en parcourant les flèches) du plus petit élément vers tous les autres éléments de A

Exemples de plus petits éléments

plus petit élément



Exemples d'ensemble sans plus petits éléments



Notes sur les plus petits et plus grand éléments

Ils n'existent pas toujours

Théorème

Soit A un ensemble ordonné

1. Si A possède un plus grand élément, celui-ci est unique ; c'est un élément maximal de A, et c'est le seul : on le note $\sup(A)$
2. Si A possède un plus petit élément, celui-ci est unique ; c'est un élément minimal de A, et c'est le seul : on le note $\inf(A)$

Plus petit, plus grand, maximaux

Théorème (réciproque du précédent)

Soit A un ensemble ordonné fini

1. Tout élément de A est majoré par au moins un élément maximal, et minoré par au moins un élément minimal
2. Si A possède un seul élément maximal, c'est $\sup(A)$
3. Si A possède un seul élément minimal, c'est $\inf(A)$

Treillis : introduction

Motivations

- Propriétés remarquables des treillis
- Représentation des algèbres de Boole en dimension n
- Théorème de Stone
- Structure de données élaborée (treillis de Galois, cubes en fouille de données, etc.)

Autres appellations

- En anglais : lattice
- En mathématiques : espace réticulé

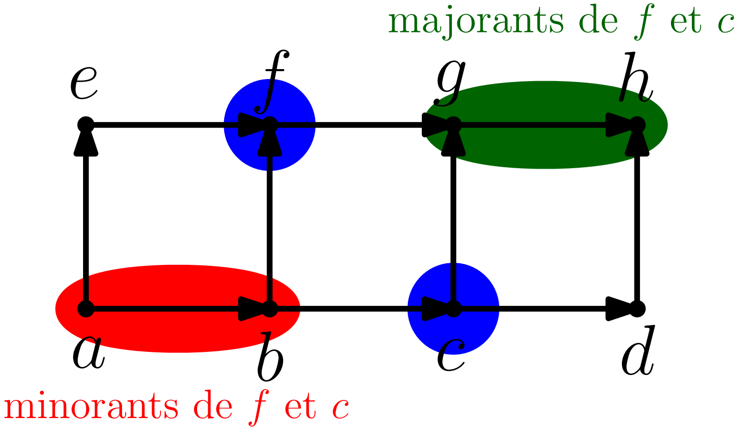
Treillis : histoires de majorants et de minorants

Théorème (preuve sur transitivité de l'ordre)

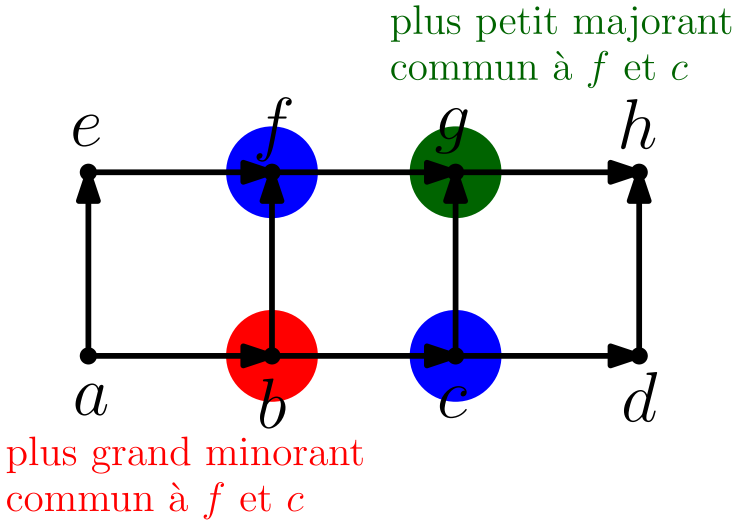
Soit A un ensemble ordonné, x et y deux éléments quelconques de A.

1. Si l'ensemble $M(x, y)$ des majorants communs à x et y admet un plus petit élément z, alors $M(x, y)$ coïncide avec l'ensemble des majorants de z.
2. Si l'ensemble $m(x, y)$ des minorants communs à x et y admet un plus grand élément t, alors $m(x, y)$ coïncide avec l'ensemble des minorants de t.

Exemple de treillis



Exemple de treillis



Définitions préalables

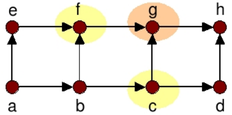
Soit A un ensemble ordonné, et x, y des éléments qcq de A.

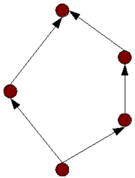
Borne supérieure de x et de y

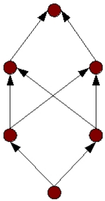
Quand l'ensemble des majorants communs à x et y possède un plus petit élément : on le note $\sup(x, y)$ ou encore $x \vee y$.

Borne inférieure de x et de y

Quand l'ensemble des minorants communs à x et y possède un plus grand élément : on le note $\inf(x, y)$ ou encore $x \wedge y$.







Définitions préalables

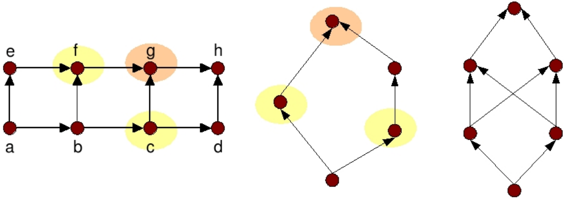
Soit A un ensemble ordonné, et x, y des éléments qcq de A.

Borne supérieure de x et de y

Quand l'ensemble des majorants communs à x et y possède un plus petit élément : on le note $\sup(x, y)$ ou encore $x \vee y$.

Borne inférieure de x et de y

Quand l'ensemble des minorants communs à x et y possède un plus grand élément : on le note $\inf(x, y)$ ou encore $x \wedge y$.



Définitions préalables

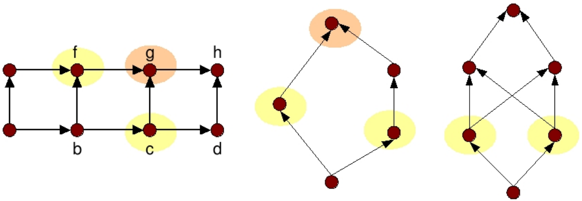
Soit A un ensemble ordonné, et x, y des éléments qcq de A.

Borne supérieure de x et de y

Quand l'ensemble des majorants communs à x et y possède un plus petit élément : on le note $\sup(x, y)$ ou encore $x \vee y$.

Borne inférieure de x et de y

Quand l'ensemble des minorants communs à x et y possède un plus grand élément : on le note $\inf(x, y)$ ou encore $x \wedge y$.

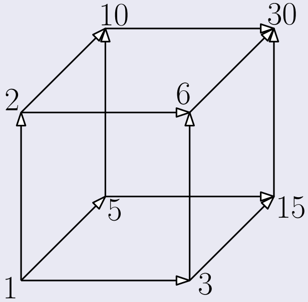


Qu'est-ce qu'un treillis

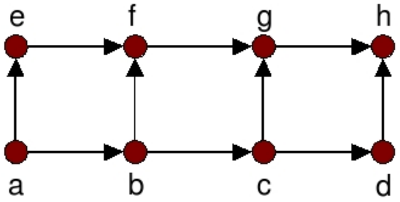
Définition

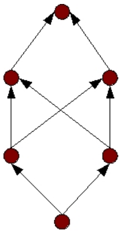
On dit qu'un ensemble ordonné A est un treillis si, pour tous x et y dans A, les bornes $x \vee y$ et $x \wedge y$ existent.

Diviseurs entiers positifs de 30



Exemples de treillis (ou non)





Quelques résultats

Théorèmes

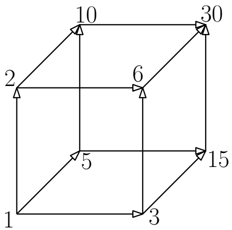
- Les ensembles totalement ordonnés sont des treillis
- Dans un treillis, quels que soient x, y et z :
  $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$
  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ et $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
- Tout treillis fini possède un plus grand et un plus petit éléments.
  $\sup(A) = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$
  $\inf(A) = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$
  Attention : faux dans le cas où A est infini, par exemple $\mathbb{Z}$.

Treillis distributif

Définition

On dit qu'un treillis est distributif si l'on a, pour tous x, y et z :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

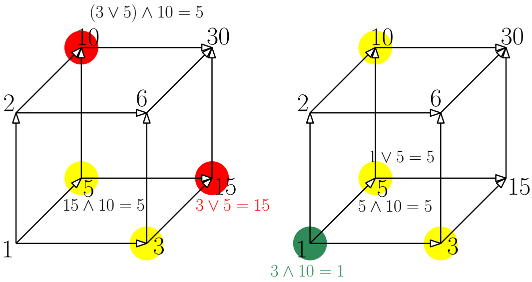


Treillis distributif

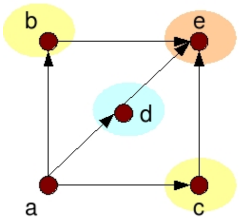
Définition

On dit qu'un treillis est distributif si l'on a, pour tous x, y et z :

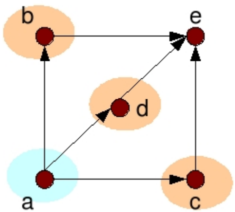
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$



Treillis non distributif



$(b \vee c) \wedge d$



$(b \wedge d) \vee (c \wedge d)$

Elément complémenté

Définition

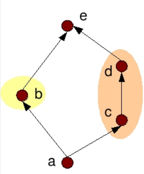
Soit A un treillis ayant un plus petit et un plus grand élément.

x est complémenté dans A s'il existe un $y \in A$ qui vérifie :

$x \vee y = \sup(A)$ et $x \wedge y = \inf(A)$

y s'appelle le complément de x dans A.

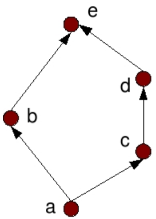
Un chemin parallèle de bas en haut

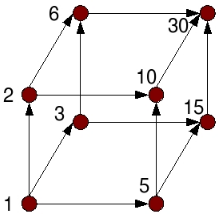


Treillis complémenté

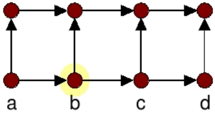
Définition

Un treillis est complémenté si chacun de ses éléments possède au moins un complément.





x et 30/x



Définition algébrique d'un treillis

Nouvelle définition de treillis

Un treillis est un ensemble E muni de deux lois internes habituellement notées $\vee$ et $\wedge$ vérifiant :

- Les deux lois sont commutatives et associatives
- $\forall a \in E$, $a \vee a = a$ et $a \wedge a = a$ (idempotence)
- $\forall a, b \in E$, $a \wedge (a \vee b) = a$ et $a \vee (a \wedge b) = a$ (absorption)

Lien avec les relations d'ordre $(E, \preceq)$

Définir sur E une relation d'ordre $\preceq$:
$a \preceq b \iff a \vee b = b$

Preuve que $\preceq$ est une relation d'ordre

$E : a \preceq b \Longleftrightarrow a \vee b = b$

Antisymétrie

$a \preceq b$ et $b \preceq a$

$\Rightarrow a \vee b = b$ et $b \vee a = a$

$\Rightarrow b = a$ par commutatitivité

réflexivité

$a \vee a = a$ par idempotence

$\Rightarrow a \preceq a$

Preuve que $\preceq$ est une relation d'ordre

$E : a \preceq b \iff a \vee b = b$

Transitivité

$a \preceq b$ et $b \preceq c$
$\Rightarrow a \vee b = b$ et $b \vee c = c$
$\Rightarrow a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$ par associativité
$\Rightarrow a \preceq c$

Définition

Une définition

Un treillis à la fois distributif et complémenté est une algèbre de Boole

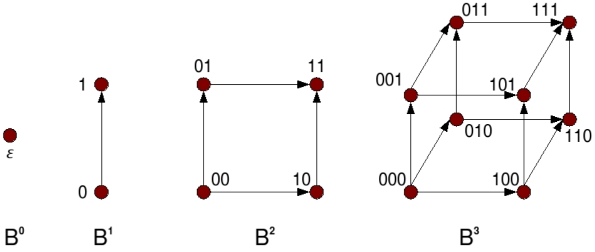
Exemple : les parties d'un ensemble non-vide E

$\mathcal{P}(E)$ ordonné par la relation d'inclusion large $\subseteq$, est une algèbre de Boole.

Exemple d'algèbre de Boole : $\mathbb{B}^n$

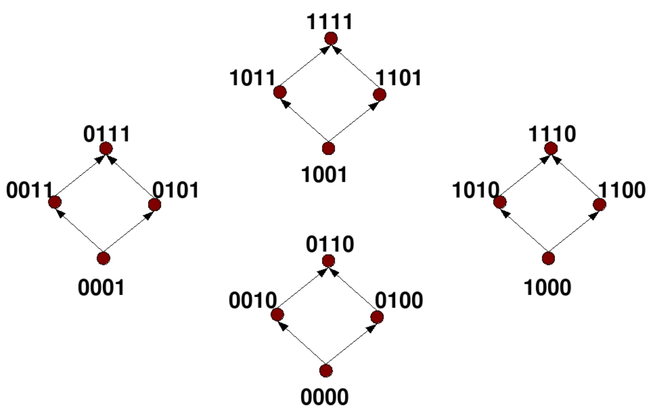
1. $\mathbb{B}^0$: un seul élément (cas dégénéré)
2. $\mathbb{B}^1$: $0 \preceq 1, 0 \preceq 0, 1 \preceq 1$
3. $\mathbb{B}^n$ ordonné par $\preceq$:

$$a_1 a_2 \cdots a_n \preceq b_1 b_2 \cdots b_n \text{ si } a_p \preceq b_p \forall 1 \leq p \leq n$$



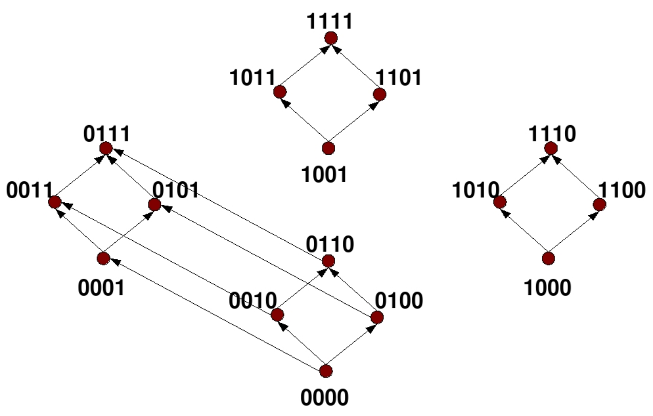
Exemple d'algèbre de Boole : $\mathbb{B}^n$ (cont'd)

Dessinons $\mathbb{B}^4$



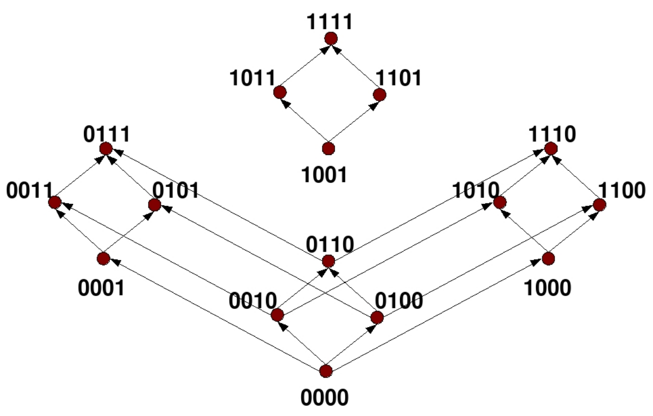
Exemple d'algèbre de Boole : $\mathbb{B}^n$ (cont'd)

Dessinons $\mathbb{B}^4$



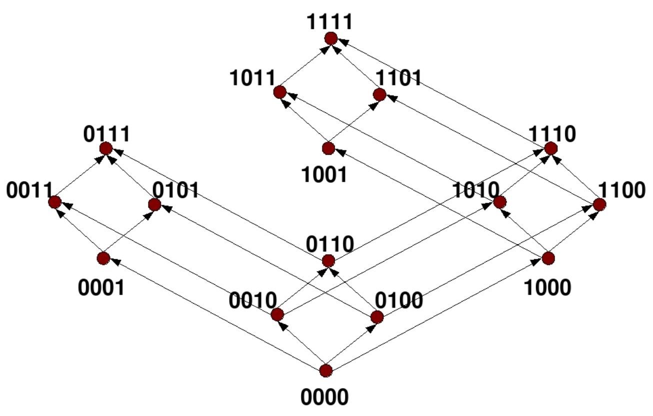
Exemple d'algèbre de Boole : $\mathbb{B}^n$ (cont'd)

Dessinons $\mathbb{B}^4$



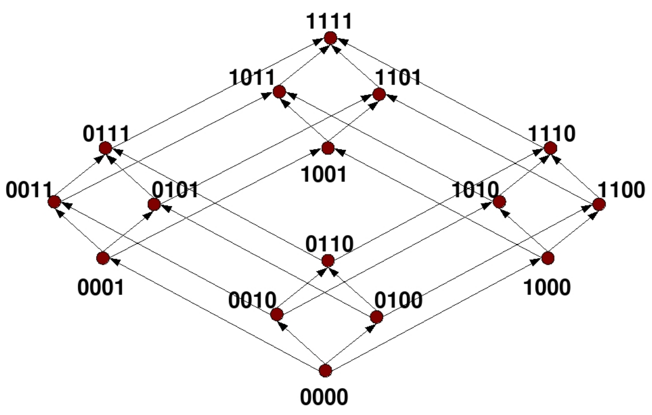
Exemple d'algèbre de Boole : $\mathbb{B}^n$ (cont'd)

Dessinons $\mathbb{B}^4$



Exemple d'algèbre de Boole : $\mathbb{B}^n$ (cont'd)

Dessinons $\mathbb{B}^4$



Exemple d'algèbre de Boole : $\mathbb{B}^n$ (cont'd)

Soit $a, b \in \mathbb{B}^n$: $a = a_1 \cdots a_n$ et $b = b_1 \cdots b_n$

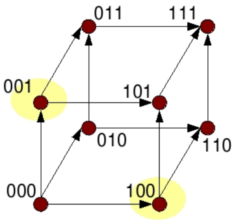
1. PpM : $a \vee b = (a_1 \vee b_1)(a_2 \vee b_2) \cdots (a_n \vee b_n)$
2. PGm : $a \wedge b = (a_1 \wedge b_1)(a_2 \wedge b_2) \cdots (a_n \wedge b_n)$
3. Complément : $\bar{a} = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n$

Exemple dans $\mathbb{B}^3$

$001 \vee 100 = 101$

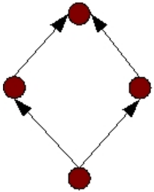
$001 \wedge 100 = 000$

$\overline{001} = 110$



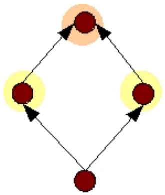
Notations générales

- Algèbre de Boole : $\mathcal{B}$, de relation d'ordre $\preceq$
- Plus petit majorant (PpM) de a et b : $a \vee b$
- Plus Grand minorant (PGm) de a et b : $a \wedge b$
- Complément de a : $\bar{a}$ unique (à montrer)
- Plus grand élément de $\mathcal{B}$: $\top$
- Plus petit élément de $\mathcal{B}$: $\perp$



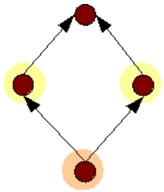
Notations générales

- Algèbre de Boole : $\mathcal{B}$, de relation d'ordre $\preceq$
- Plus petit majorant (PpM) de a et b : $a \vee b$
- Plus Grand minorant (PGm) de a et b : $a \wedge b$
- Complément de a : $\bar{a}$ unique (à montrer)
- Plus grand élément de $\mathcal{B}$: $\top$
- Plus petit élément de $\mathcal{B}$: $\perp$



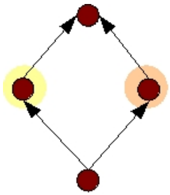
Notations générales

- Algèbre de Boole : $\mathcal{B}$, de relation d'ordre $\preceq$
- Plus petit majorant (PpM) de a et b : $a \vee b$
- Plus Grand minorant (PGm) de a et b : $a \wedge b$
- Complément de a : $\bar{a}$ unique (à montrer)
- Plus grand élément de $\mathcal{B}$: $\top$
- Plus petit élément de $\mathcal{B}$: $\perp$



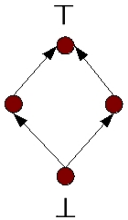
Notations générales

- Algèbre de Boole : $\mathcal{B}$, de relation d'ordre $\preceq$
- Plus petit majorant (PpM) de a et b : $a \vee b$
- Plus Grand minorant (PGm) de a et b : $a \wedge b$
- Complément de a : $\bar{a}$ unique (à montrer)
- Plus grand élément de $\mathcal{B}$: $\top$
- Plus petit élément de $\mathcal{B}$: $\perp$



Notations générales

- Algèbre de Boole : $\mathcal{B}$, de relation d'ordre $\preceq$
- Plus petit majorant (PpM) de a et b : $a \vee b$
- Plus Grand minorant (PGm) de a et b : $a \wedge b$
- Complément de a : $\bar{a}$ unique (à montrer)
- Plus grand élément de $\mathcal{B}$: $\top$
- Plus petit élément de $\mathcal{B}$: $\perp$



Propriétés des opérations d'une algèbre de Boole

Propriétés de $\vee$

$$x \vee y = y \vee x \tag{1}$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \tag{2}$$

$$x \vee \top = \top \tag{3}$$

$$x \vee \bot = x \tag{4}$$

$$x \vee x = x \tag{5}$$

Propriétés des opérations d'une algèbre de Boole (cont'd)

Propriétés de $\wedge$

$$x \wedge y = y \wedge x \tag{6}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \tag{7}$$

$$x \wedge \top = x \tag{8}$$

$$x \wedge \bot = \bot \tag{9}$$

$$x \wedge x = x \tag{10}$$

Propriétés des opérations d'une algèbre de Boole (cont'd)

Distributivités

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{11}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \tag{12}$$

Lois d'absorption

$$x \wedge (x \vee y) = x \tag{13}$$

$$x \vee (x \wedge y) = x \tag{14}$$

Propriétés des opérations d'une algèbre de Boole (cont'd)

Propriétés de la complémentation

$$x \vee \bar{x} = \top \tag{15}$$

$$x \wedge \bar{x} = \bot \tag{16}$$

$$\bar{\bar{x}} = x \tag{17}$$

$$\overline{\top} = \bot \tag{18}$$

$$\overline{\bot} = \top \tag{19}$$

Propriétés des opérations d'une algèbre de Boole (cont'd)

Lois de De Morgan

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \tag{20}$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \tag{21}$$

Liens entre $\vee$, $\wedge$ et $\preceq$

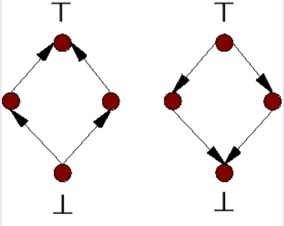
$$x \wedge y = x \text{ équivaut à } x \preceq y \tag{22}$$

$$x \vee y = y \text{ équivaut à } x \preceq y \tag{23}$$

Principe de dualité

Constatation

- En renversant la relation d'ordre de $\mathcal{B}$, $\vee$ et $\wedge$ s'échangent.
- Plus précisément : si $x \preceq y$ alors $\bar{y} \preceq \bar{x}$ (DeMorgan et complémentation)



Principe de dualité (cont'd)

Théorème

Si x est le résultat d'un calcul fait à partir uniquement de $\vee$ et $\wedge$ et des éléments y, z, etc., et de leurs compléments alors $\bar{x}$ s'obtient, en remplaçant dans le même calcul, y par $\bar{y}$, z par $\bar{z}$, etc., $\vee$ par $\wedge$ et $\wedge$ par $\vee$.

Eléments de preuve

Complémentation et lois de De Morgan.

Exemple

$x = (y \vee z) \wedge (\bar{a} \vee b)$
$\bar{x} = (\bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (a \wedge \bar{b})$

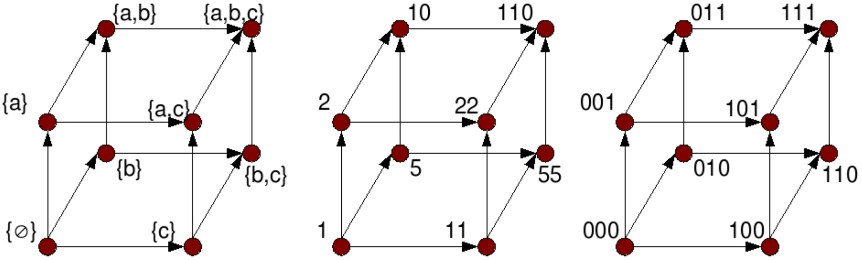
Théorème

Soit un ensemble E muni des opérations $\bigtriangledown$, $\bigtriangleup$ et $\tilde{}$, et de deux éléments α et Ω vérifiant :

$$a \bigtriangledown b = b \bigtriangledown a \tag{24}$$
$$a \bigtriangledown (b \bigtriangledown c) = (a \bigtriangledown b) \bigtriangledown c \tag{25}$$
$$a \bigtriangledown \alpha = a \tag{26}$$
$$a \bigtriangledown \tilde{a} = \Omega \tag{27}$$
$$a \bigtriangleup (b \bigtriangledown c) = (a \bigtriangleup b) \bigtriangledown (a \bigtriangleup c) \tag{28}$$
$$a \bigtriangleup b = b \bigtriangleup a \tag{29}$$
$$a \bigtriangleup (b \bigtriangleup c) = (a \bigtriangleup b) \bigtriangleup c \tag{30}$$
$$a \bigtriangleup \Omega = a \tag{31}$$
$$a \bigtriangleup \tilde{a} = \alpha \tag{32}$$
$$a \bigtriangledown (b \bigtriangleup c) = (a \bigtriangledown b) \bigtriangleup (a \bigtriangledown c) \tag{33}$$

Alors il existe une relation d'ordre sur E qui en fait une algèbre de Boole pour laquelle $\tilde{}$, $\bigtriangleup$, $\bigtriangledown$, α et Ω sont respectivement $\bar{}$, $\wedge$, $\vee$, $\perp$ et $\top$.

Ressemblances des algèbres de Boole



P({a,b,c}) Diviseurs de (110) B^3

Pour aller plus loin : diagramme de Hasse d'une algèbre de Boole de 2^n éléments = diagramme de Hasse de $\mathbb{B}^n$

Définitions supplémentaires

Atome d'une algèbre de Boole

- Un élément a est un atome de l'algèbre de Boole $\mathcal{B}$ si c'est un successeur immédiat de $\perp$
- Exemple : les atomes de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ sont les trois singletons ; dans $\mathbb{B}^3$ ce sont les mots 001, 010 et 100.

Isomorphisme d'algèbre de Boole (du grec *même forme*)

- Similarité de diagrammes (sommets et flèches identiques)
- Il existe une bijection ϕ entre deux algèbres de Boole isomorphes qui respecte leur relation d'ordre

$$\phi(x) \preceq \phi(y) \Leftrightarrow x \preceq y$$

Théorème de Stone

1. Le nombre d'éléments d'une algèbre de Boole finie est toujours une puissance de 2
2. $\forall n > 0$, il existe des algèbres de Boole à 2^n éléments (et toutes sont isomorphes entre elles)
3. Une algèbre de Boole qui possède 2^n éléments possède n atomes : elle est isomorphe à $\mathbb{B}^n$ et son diagramme de Hasse est un n-cube.

Une algèbre de Boole finie est entièrement connue dès lors que l'on connaît son nombre d'éléments

Lemme pour prouver le théorème de Stone

Lemme

Soit $a \neq \perp$ un élément d'une algèbre de boole $\mathcal{B}$.
L'élément a peut s'exprimer de manière unique comme plus petit majorant d'un ensemble d'atomes $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$.
On a donc $a = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_k$