Fonctions booléennes

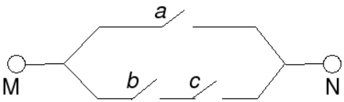
Arnaud Labourel
Courriel : arnaud.labourel@lif.univ-mrs.fr

Université de Provence

18 octobre 2011

Circuits et interrupteurs

- Circuit électrique : 3 interrupteurs (états : ouvert ou fermé) : passage ou non du courant de M à N



voici un certain état des interrupteurs : autorise-t-il la traversée du courant ?

- Comment répondre ?
  - Imaginer le circuit et voir si le courant passe ou pas
  - Elaborer le catalogue de toutes les possibilités. Chercher dans le catalogue l'état courant des interrupteurs.

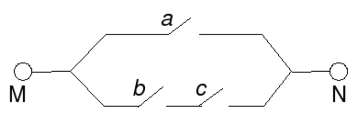
    Pour 100 interrupteurs : 2^{100} possibilités !
  - Calculer la réponse à partir d'une représentation booléenne du circuit via la description des états des interrupteurs.

Codage d'un circuit

Codage de l'état de chaque interrupteur

L'état de l'interrupteur i est codé par une *variable booléenne*

- valeur 1 si i est fermé (le courant passe cet interrupteur)
- valeur 0 si i est ouvert (le courant ne passe pas)



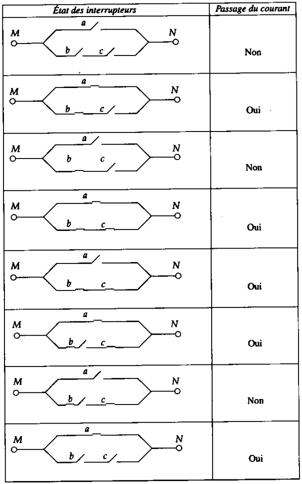
$a = 0$ et $b = 0$ et $c = 0$

- Nom de l'interrupteur = nom de la variable
- Etat du circuit = mot binaire abc

Codage du passage du courant de M à N

Variable booléenne d (1 si le courant passe, 0 sinon)

Catalogue de l'état d'un circuit



a	b	c	d
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Encore plus simple ?

Remplacer la table de vérité par une formule simple

- Formule pour retrouver d directement en fonction du mot binaire abc

Automatisation du calcul de l'état du circuit

Equivalence de circuits

- Comment trouver cette formule ?

Pour aller plus loin

Synthèse des fonctions booléennes : la formule est connue, on cherche à construire un dispositif pour la calculer.

Plus généralement

Etats des phénomènes alternatifs

Codé par une variable booléenne

- Interrupteur OUVERT / FERMÉ
- Vote individuel OUI / NON
- Proposition VRAIE / FAUSSE
- point de l'écran BLANC / NOIR

Alternatives liées

Liaison des variables booléennes qui les représentent : calcul booléen

Rappels

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$ algèbre de Boole

$0 \vee 0 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	$1 \vee 0 = 1$	$1 \vee 1 = 1$
$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge 1 = 0$	$1 \wedge 0 = 0$	$1 \wedge 1 = 1$
	$\bar{0} = 1$	$\bar{1} = 0$	

Calculs booléens et calculs classiques

$x \vee y = x + y - xy$ $\quad x \wedge y = xy$ $\quad \bar{x} = 1 - x$

Règles utiles de calcul

$xx = x$ $\quad x\bar{x} = 0$ $\quad x \vee xy = x$

Définition

Fonction booléenne de n variables

- Application de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$
- Fonction binaire, fonction logique

Exemple

Chaque mot binaire de longueur 5 $\rightarrow$ produit des deux bits extrêmes : fonction booléenne de 5 variables.
$f(00010) = 0$, $f(10000) = 0$,
$f(01110) = 0, f(11111) = 1, f(10001) = 1$, etc.

Représentation d'une fonction booléenne

Table de vérité

- Lister les mots binaires de longueur n
- Les ranger dans l'ordre lexicographique
- Inscrire en face de chacun, la valeur binaire renvoyée par la fonction : la dernière colonne définit la fonction = liste des valeurs de la fonction
- Taille de la table : $n+1$ colonnes et 2^n lignes

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

0101 représente la fonction booléenne f

Représentation d'une fonction booléenne (cont'd)

Fonction caractéristique d'une partie de $\mathbb{B}^n$

Eléments de cette partie = mots binaires auxquels la fonction associe 1

a	b	c	d
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$d = 00011111$

d est la fonction caractéristique de la partie $\{011, 100, 101, 110, 111\} \subseteq \mathbb{B}^3$

Ensemble des fonctions booléennes à n variables

- Noté $\mathbb{B}^{\mathbb{B}^n}$ car applications de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$
- Noté $\mathbb{B}^{2^n}$ car associées aux mots binaires de longueur 2^n
- Noté $\mathcal{P}(\mathbb{B}^n)$ car identifiées aux parties de $\mathbb{B}^n$
- Noté $\mathcal{F}_n$ pour plus de simplicité

Nombre $= 2^{2^n}$

Nombre de variables	Nombre de f. bool.
1	4
2	16
3	256
4	65 536
5	4 294 967 296
6	18 446 744 073 709 551 616

Interprétons $\mathcal{F}_n$ comme $\mathbb{B}^{2^n}$

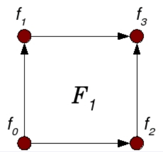
L'ensemble $\mathcal{F}_n$ devient une algèbre de Boole

1. $f \preceq g$ signifie que $\forall m$ mot binaire, $f(m) \leq g(m)$
2. $h = f \vee g$ signifie que $\forall m, h(m) = f(m) \vee g(m)$
3. $h = f \wedge g$ signifie que $\forall m, h(m) = f(m) \wedge g(m)$
4. $f \wedge g = fg$ autrement dit $f(m) \wedge g(m) = f(m)g(m)$
5. $w = \overline{f}$ signifie que $\forall m, w(m) = \overline{f(m)}$
6. Le plus petit élément est la fonction constante 0
7. Le plus grand élément est la fonction constante 1.

Exemples

Algèbre de Boole à 4 éléments $\mathcal{F}_1$

$\mathbb{B}^1$	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

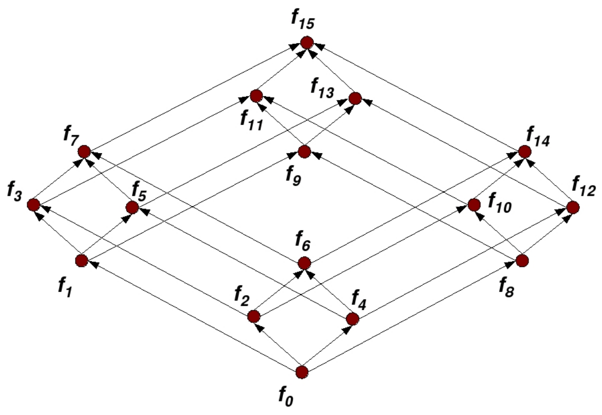


$2^{2^2} = 16$ Fonctions booléennes de 2 variables

$\mathbb{B}^2$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Exemple (cont'd)

Treillis des fonctions booléennes à deux variables



Opérations de Boole faciles à effectuer

$\mathbb{B}^3$			f	g	$f \vee g$	$f \wedge g$	$\overline{f}$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1

Motivations

Soit f une fonction booléenne dont on connaît la table de vérité

- Peut toujours être exprimée par une formule
- Moyens d'obtenir la formule

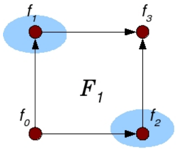
Retour sur l'algèbre $\mathcal{F}_n$

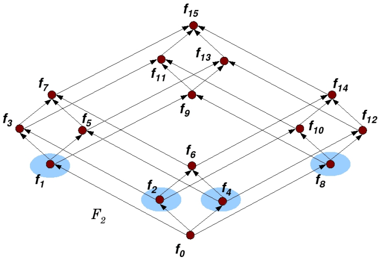
- Plus petit élément $= f_0$ de formule $f_0 = 0$
- Pour f_i, elle est la somme booléenne ($\vee$) des atomes qui la minorent
- Conséquence : formule de f_i connue si
  1. les atomes minorant f_i sont identifiés
  2. et la formule de chacun de ces atomes est connue

Une notion essentielle : les min-termes

Atomes de $\mathbb{B}^{2^n}$ = mots binaires ayant un seul bit à 1

- Atomes de $\mathcal{F}_n$ = fonctions booléennes qui ne prennent qu'une seule fois la valeur 1 = min-termes.
- L'algèbre $\mathcal{F}_n$ possède 2^n min-termes





Théorème sur $\mathcal{F}_n$

Soit f une fonction booléenne de n variables

Alors

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_k \qquad (1)$$

si $m_1, m_2 \cdots m_k$ sont tous les min-termes inférieurs ou égaux à f. De plus, c'est la seule façon, à l'ordre près des termes, d'écrire f comme une somme booléenne de min-termes.

Remarques

- $k =$ nombre de fois où f prend la valeur 1 : cette formule pour f explicite chaque condition pour laquelle f vaut 1.
- Chaque bit à 1 dans la dernière colonne de la table de f correspond à un min-terme qui minore f : f est la somme booléenne de ces min-termes.

Exemple : une histoire de pizza

- Trois personnes x, y et z, votent par OUI (1) ou NON (0) à la proposition : *voulez-vous une pizza Reine ?*
- L'indicateur de majorité, t, vaut 1 si le OUI est majoritaire, et 0 sinon
- Inventaire de tous les cas possibles :

x	y	z	t
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Exemple : une histoire de pizza (cont'd)

x	y	z	t
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Min-termes : $m_1(011) = 1$, $m_2(101) = 1$, $m_3(110) = 1$, $m_4(111) = 1$
- $t = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4$

$\mathbb{B}^3$			t	m_1	m_2	m_3	m_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Petites définitions

Convention : la p-ième variable

- La fonction booléenne : m de longueur $n \to$ valeur de sa p-ième composante, s'appelle la *p-ième variable*
- Notation : x_p
- Exemples : $x_4(001110110) = 1$, $x_1(0111) = 0$

Notion de littéral

$\mathbb{B}^2$	x_2	$\bar{x}_2$
00	0	1
01	1	0
10	0	1
11	1	0

- Une fonction de type $x_1, x_2, \cdots x_n$ ou $\bar{x}_1, \cdots \bar{x}_n$ s'appelle un *littéral*.
- Dans $\mathcal{F}_n$, il y a $2n$ littéraux.
- Ci-contre : f_5 et f_{10}

Allure des formules des min-termes

Théorème

Les 2^n min-termes de $\mathcal{F}_n$ sont tous les produits de la forme :

$$m = \tilde{x_1}\tilde{x_2}\cdots\tilde{x_n} \tag{2}$$

où $\tilde{x_i}$ désigne indifféremment x_i ou son complément $\bar{x_i}$.

Preuve

- Soit $a = a_1a_2\cdots a_n \in \mathbb{B}^n$. Soit m le min-terme défini par la condition $m(a) = 1$
- Posons $M = \tilde{x_1}\tilde{x_2}\cdots\tilde{x_n}$ (produit !) avec : $\tilde{x_p} = \begin{cases} x_p \text{ si } a_p = 1 \\ \bar{x_p} \text{ si } a_p = 0 \end{cases}$
- Vérifions que $M = m$

Allure des formules des min-termes (cont'd)

Preuve (cont'd)

Posons $b = b_1 b_2 \cdots b_n \in \mathbb{B}^n$ et calculons $M(b)$:
$M(b) = \tilde{x_1}(b)\tilde{x_2}(b)\cdots\tilde{x_n}(b) = 1$ si et seulement si tous les $\tilde{x_p}(b)$ valent 1 car M est un produit de littéraux.

a_p	b_p	$\tilde{x_p}(b)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\tilde{x_p} = \begin{cases} x_p \text{ si } a_p = 1 \\ \bar{x}_p \text{ si } a_p = 0 \end{cases}$$

- Pour avoir $\tilde{x_p}(b) = 1$, il faut que $a_p = b_p$
- Donc $M(b) = 0$ si $b \neq a$ et $M(b) = 1$ si $b = a$
- Donc $m = M$ par définition de m

Méthode pour écrire un min-terme

Produit de littéraux

1. Ecrire $m = x_1 x_2 \cdots x_n$
2. Si $a_1 a_2 \cdots a_n$ est l'unique mot tq $m(a_1 a_2 \cdots a_n) = 1$, corriger la formule précédente en prenant $\bar{x_p}$ lorsque $a_p = 0$

Exemple du vote pour la pizza Reine

x	y	z	t
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- $m_1(011) = 1$, donc m_1 s'écrit $\bar{x}yz$
- $m_2(101) = 1$, donc m_2 s'écrit $x\bar{y}z$
- $m_3(110) = 1$, donc m_3 s'écrit $xy\bar{z}$
- $m_4(111) = 1$, donc m_4 s'écrit xyz

$$t = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

Méthode pour obtenir la forme canonique disjonctive

A partir de la table de vérité

1. Ecrire la table de vérité de la fonction f
2. Chaque fois que f prend la valeur 1, écrire le min-terme correspondant comme produit de littéraux
3. Ecrire f comme somme booléenne de ces min-termes

Exemple du vote pour la pizza Reine

On avait $t = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$ c'est-à-dire

$$t = (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

La forme canonique conjonctive

Issue de la symétrie entre $\wedge$ et $\vee$

Ecrire la FCD de $\bar{f}$ et prendre son complément en appliquant le principe de dualité.

Le choix de la pizza

x	y	z	t	$\bar{t}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

- $m_1(000) = 1$, $m_2(001) = 1$, $m_3(010) = 1$ et $m_4(100) = 1$
- $\bar{t} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$
- $\bar{\bar{t}} = \overline{\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}}$
- $t = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$

Le dual des min-termes : les max-termes

Définition

Les fonctions de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ qui n'attribuent qu'une fois la valeur 0 sont appelés des *max-termes*.

Méthode pour écrire un max-terme comme somme de littéraux

1. Ecrire $M = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$
2. Si $a_1 a_2 \cdots a_n$ est l'unique mot tel que $M(a_1 a_2 \cdots a_n) = 0$, corriger la formule précédente en prenant le complémentaire de x_p lorsque $a_p = 1$.

Méthode pour obtenir la forme canonique conjonctive

Théorème

A part la fonction constante 1, toute fonction booléenne de n variables est le produit des max-termes qui la majorent : c'est la seule façon d'écrire une fonction comme produit de max-termes.

La méthode

1. Ecrire la table de vérité de f
2. Chaque fois que f prend la valeur 0, écrire le max-terme correspondant comme somme booléenne de littéraux
3. Ecrire f comme produit de ces max-termes

Exemple du choix de la pizza

x	y	z	t
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- $M_1(000) = 0$, $M_2(001) = 0$, $M_3(010) = 0$ et $M_4(100) = 0$
- $M_1 = x \vee y \vee z$, $M_2 = x \vee y \vee \bar{z}$, $M_3 = x \vee \bar{y} \vee z$, $M_4 = \bar{x} \vee y \vee z$

$$t = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)$$

$$t = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$$

Formule or not formule ?

Ce que l'on vient de voir

Formes canoniques : une fonction booléenne peut toujours être représentée par deux formules. En existe-t-il d'autres ?

Qu'est-ce qu'une formule ?

- Naïvement : résultat d'un calcul où l'on combine les littéraux au moyen des opérations $\wedge$, $\vee$ et $\bar{\ }$.

  $= $ Construction d'une formule

- Plus exactement : soit X des symboles $x_1 \cdots x_n$

  R1 Les bits 0 et 1 sont des formules
  R2 Si $x \in X$, alors x est une formule
  R3 Si u et v sont des formules, alors $u \wedge v$, $u \vee v$ sont des formules
  R4 Si u est une formule, alors $\bar{u}$ en est une

Formule or not formule ? (cont'd)

Une formule est...

Un enchaînement de symboles est une formule quand sa construction résulte uniquement de l'emploi successif des règles **R1** à **R4**.

$\overline{((\overline{x_1})) \wedge (x_2)) \vee ((x_3) \wedge (x_4)))}$

formule intermédiaire	règle
x_1, x_2, x_3, x_4	**R2**
$\overline{(x_1)}$	**R4**
$((\overline{x_1}) \wedge (x_2))$ et $((x_3) \wedge (x_4))$	**R3**
$((\overline{x_1}) \wedge (x_2)) \vee ((x_3) \wedge (x_4))$	**R3**
$(\overline{((\overline{x_1}) \wedge (x_2)) \vee ((x_3) \wedge (x_4))})$	**R4**

Formule or not formule ? (cont'd)

Une formule est...

Un enchaînement de symboles est une formule quand sa construction résulte uniquement de l'emploi successif des règles **R1** à **R4**.

$\overline{((\overline{x_1})) \wedge (x_2)) \vee ((x_3) \wedge (x_4)))} \rightsquigarrow \overline{(\bar{x}_1 x_2 \vee x_3 x_4)}$

formule intermédiaire	règle
x_1, x_2, x_3, x_4	**R2**
$\overline{(x_1)}$	**R4**
$(\overline{x_1})) \wedge (x_2))$ et $((x_3) \wedge (x_4))$	**R3**
$(\overline{x_1})) \wedge (x_2)) \vee ((x_3) \wedge (x_4))$	**R3**
$\overline{((\overline{x_1})) \wedge (x_2)) \vee ((x_3) \wedge (x_4)))}$	**R4**

Ne pas confondre formule et fonction

Association

Formule ϕ construite sur n symboles $\mapsto$ fonction booléenne de n variables

formule ϕ définit (ou représente) fonction f

Calculer f revient à appliquer la formule où chaque x_p est remplacé par le bit a_p

Exemple

La formule $x_1x_2 \vee x_3$ définit une fonction dans $\mathcal{F}_3$ qui associe au mot binaire $a_1a_2a_3$ le bit $a_1a_2 \vee a_3$.

Fonction définie par une formule

R5 La fonction définie par la simple formule x_p = la p-ième variable (fonction qui associe le p-ième bit d'un mot binaire de longueur n).

R6 Si ϕ définit f et si ψ définit g, alors $\phi \vee \psi$ définit $f \vee g$ et $\phi\psi$ définit fg.

R7 Si ϕ définit f alors $\bar{\phi}$ définit $\bar{f}$

En définissant une fonction, la formule sert à :

1. Donner un nom à la fonction si besoin
2. Indiquer comment la fonction est reliée aux fonctions $x_1, x_2, \cdots, x_n$
3. Indiquer comment le bit $f(a_1 a_2 \cdots a_n)$ s'obtient à partir des bits du mot $a_1 a_2 \cdots a_n$

Plus généralement

Une même formule pour plusieurs algèbres de Boole

Une formule définit une fonction f en indiquant une suite de calculs.
Elle définit donc aussi une fonction de n variables dans toute algèbre de Boole (malheureusement toujours notée f !)

Puisque $\mathcal{F}_n$ est une algèbre de Boole

- Les règles de calcul (1) à (21) du chapitre précédent s'appliquent
- La formule de définition d'une fonction peut changer
- On peut montrer l'égalité de fonctions en *réécrivant* leurs formules, etc.

Série de transformations (extrait)

D'une formule à une autre sans changer la fonction booléenne

T1 $u \vee v \leftrightarrow v \vee u$

T2 $(u \vee v) \vee w \leftrightarrow u \vee v \vee w$

T3 $u(v \vee w) \leftrightarrow uv \vee uw$

T4 $\overline{(uv)} \leftrightarrow \bar{u} \vee \bar{v}$

T5 $\overline{(\bar{u})} \leftrightarrow u$

T6 $u \vee u \leftrightarrow u$

T7 $u \vee \bar{u} \leftrightarrow 1$

T8 $uu \leftrightarrow u$

T9 $u\bar{u} \leftrightarrow 0$

T10 $u \vee uv \leftrightarrow u$

Théorème

1. En appliquant de façon répétitive les règles de transformation **T1** à **T5**, il est toujours possible de passer d'une formule qcq à une formule qui est une somme booléenne de produits de littéraux définissant la même fonction.
2. En appliquant ensuite, de façon répétitive, les règles de transformation **T1** à **T10**, il est possible d'arranger la formule précédemment obtenue pour qu'on ne trouve pas dans la somme deux termes multiples l'un de l'autre.
3. Ces transformations permettent toujours de passer à la forme canonique disjonctive d'une fonction.

Principe de prolongement des identités booléennes

Soient F et G deux fonctions booléennes de n variables.
Si elles ont la même table de vérité, ou la même forme canonique disjonctive, alors quels que soient u_1, u_2, $\cdots$, u_n, dans une algèbre de Boole quelconque on aura :

$$F(u_1, u_2, \cdots, u_n) = G(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

Système d'équations

Rappel

Etant données $2k$ fonctions booléennes de n variables $G_1, G_2, \cdots, G_k$ et $D_1, D_2, \cdots, D_k$, on cherche les mots binaires a de longueur n tels que l'on ait à la fois :

$$G_1(a) = D_1(a)$$

$$G_2(a) = D_2(a)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$G_k(a) = D_k(a)$$

Système d'équations booléennes

Les fonctions sont définies par des formules

$$\left\{\begin{array}{rcl} G_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & D_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ G_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & D_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots \\ G_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & D_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}\right.$$

où $x_1 \cdots x_n$ sont des inconnues booléennes.

Résoudre le système = trouver toutes les solutions.

Exemple

Chercher les valeurs de x, y, z, u vérifiant le système :

$$x(y \vee u) = 1 \qquad \bar{x} \vee \bar{u} = yz \qquad \bar{x}z \vee yu = 0$$

Comment résoudre un tel système

Enumérer toutes les possibilités : fastidieux

$$x(y \vee u) = 1 \qquad \bar{x} \vee \bar{u} = yz \qquad \bar{x}z \vee yu = 0$$

a trois solutions : 1001, 1011 et 1110.

Transformer les équations par étapes

Jusqu'à obtention d'un système simple.

Les étapes de transformation

Etape 1. Utilisation de **T1** à **T10**

- Objectif : n'avoir dans chaque membre que des sommes booléennes de produits de littéraux simplifiées pour qu'il n'y ait pas un produit qui en divise (multiplie...) un autre.
- Exemple : avec le système

$$x(y \vee u) = 1 \qquad \bar{x} \vee \bar{u} = yz \qquad \bar{x}z \vee yu = 0$$

$$\rightsquigarrow xy \vee xu = 1 \qquad \bar{x} \vee \bar{u} = yz \qquad \bar{x}z \vee yu = 0$$

Les étapes de transformation (cont'd)

Etape 2. Transformation des équations

- Objectif : tous les membres de gauche à 1, puis étape 1
- Théorème L'équation $G = D$ a les mêmes solutions que $1 = GD \vee \bar{G}\bar{D}$

$x(y \vee u) = 1 \qquad \bar{x} \vee \bar{u} = yz \qquad \bar{x}z \vee yu = 0$

$$\rightsquigarrow 1 = xy \vee xu \qquad 1 = (\bar{x} \vee \bar{u})yz \vee \overline{(\bar{x} \vee \bar{u})(yz)} \qquad 1 = \overline{\bar{x}z \vee yu}$$

$$\rightsquigarrow 1 = xy \vee xu \qquad 1 = \bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee xu(\bar{y} \vee \bar{z}) \qquad 1 = (x \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{u})$$

$$\rightsquigarrow 1 = xy \vee xu \qquad 1 = \bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee x\bar{y}u \vee x\bar{z}u \qquad 1 = x\bar{y} \vee x\bar{u} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{u}$$

Les étapes de transformation (cont'd)

Etape 3. Mise sous forme d'une seule équation

- Au début de cette étape, système de la forme :

$$1 = F_1, 1 = F_2, \cdots, 1 = F_k$$

- Le produit des F_i doit donc être 1 !
- Transformation en produit de formules
- Sur l'exemple :

$$1 = xy \vee xu \quad 1 = \bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee x\bar{y}u \vee x\bar{z}u \quad 1 = x\bar{y} \vee x\bar{u} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{u}$$

$$\rightsquigarrow 1 = (xy \vee xu)(\bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee x\bar{y}u \vee x\bar{z}u)(x\bar{y} \vee x\bar{u} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{u})$$

Les étapes de transformation (cont'd)

Etape 4. Développement puis transformations **T1** à **T10**

- Objectif : obtenir une équation de la forme $1 = F$ où F est sous FCD sans qu'un terme n'en divise un autre
- Sur l'exemple :

$$1 = xy \vee xu \quad 1 = \bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee x\bar{y}u \vee x\bar{z}u \quad 1 = x\bar{y} \vee x\bar{u} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{u}$$

$$\rightsquigarrow 1 = x\bar{y}u \vee xyz\bar{u}$$

Les étapes de transformation (cont'd)

Etape 5. Retour à un système simplifié

- Equation de la forme $1 = h_1 \vee \cdots \vee h_p$
- Solutions : celles pour lesquelles un des h_i vaut 1
- Sur l'exemple :

$$1 = x\bar{y}u \qquad\qquad 1 = xyz\bar{u}$$

Etape 6. Résolution immédiate

- Tous les littéraux de chaque h_i doivent valoir 1
- Sur l'exemple (valeurs de $xyzu$) : 1001, 1011, 1110.

Exemple : problème de couverture

Le problème général

- Deux ensembles donnés $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ liés par la relation $\mathcal{R}$
- Comment choisir le moins possible d'éléments de $\mathcal{V}$ pour être certain que chaque élément de $\mathcal{U}$ est lié à un (au moins) des éléments choisis ?
- Autrement dit : on cherche une partie $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ la plus petite possible, telle que pour tout $u \in \mathcal{U}$, il existe $v \in \mathcal{W}$ avec $u\mathcal{R}v$.

Exemple plus concret

$\mathcal{V}$ =Etudiants d'une université, $\mathcal{U}$ =Cours de la même université, et $\mathcal{R}$ =Admettre.

Autre exemple : la couverture minimale

Problème général

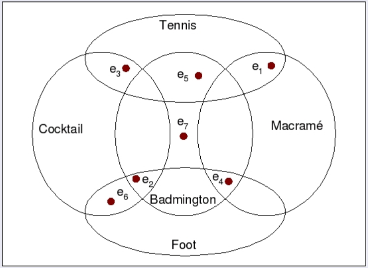
- Soient $e_1, e_2, \cdots, e_n$ des éléments de E, et $A_1, \cdots, A_p$ des parties de E.
- Comment choisir le moins possible de parties pour que leur réunion recouvre tous les éléments $e_1, \cdots, e_n$?
- Cette réunion s'appelle la couverture minimale de $e_1, e_2, \cdots, e_n$ par $A_1, \cdots, A_p$.

Exemple plus concret

$T = e_1, \cdots, e_n$ des touristes dans un club Med, $A_1, \cdots, A_p$ des groupes d'activités : quels groupes suffisent à couvrir tous les touristes de K ?

Exemple de résolution du problème de couverture minimale

Quelles activités couvrent tous les touristes ?

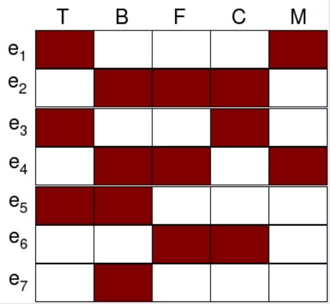


Du diagramme cartésien de la relation $\mathcal{R}$, à la résolution d'un système d'équations booléennes.

Exemple : étape 1. Diagramme cartésien

Ici, la relation est $\in$

Appartenance d'un touriste à un groupe d'activité



Exemple : étape 2. Elaboration du système

Une variable booléenne par élément de $\mathcal{V}$

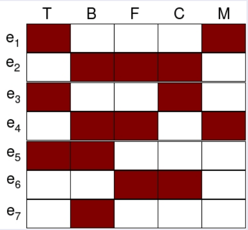
- x_1 : tennis, x_2 : badmington, x_3 : foot, x_4 : cocktail, et x_5 : macramé.
- Pour chaque élément de $\mathcal{U}$: $x_j = 1$ si l'élément de $\mathcal{V}$ (l'activité) v_j est choisi par l'élément de $\mathcal{U}$, e_i (le touriste)
- Interprétation : $u \in \mathcal{U}$ en relation avec éléments choisis dans $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ une des variables associées aux éléments de $\mathcal{V}$ avec qui u en relation vaut 1.
- Autrement dit : borne sup de ces variables $= 1$.

Exemple

e_3 a choisi tennis (T) et cocktail (C). Sa couverture est $x_1 \vee x_4$.

Exemple : étape 2. Elaboration du système (cont'd)

Une équation par élément de $\mathcal{U}$



$$
\begin{aligned}
e_1 &\rightarrow 1 = x_1 \vee x_5\\
e_2 &\rightarrow 1 = x_2 \vee x_3 \vee x_4\\
e_3 &\rightarrow 1 = x_1 \vee x_4\\
e_4 &\rightarrow 1 = x_2 \vee x_3 \vee x_5\\
e_5 &\rightarrow 1 = x_1 \vee x_2\\
e_6 &\rightarrow 1 = x_3 \vee x_4\\
e_7 &\rightarrow 1 = x_2
\end{aligned}
$$

Exemple : étape 3. Résolution du système

Chaque solution est une couverture minimale

- Le système simplifié mène à :

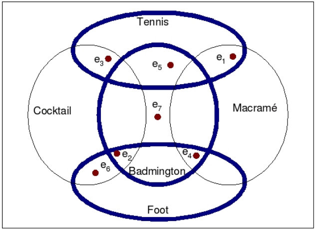
$$1 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_4 x_5$$

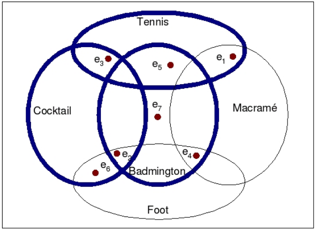
- Un des produits à 1 : 3 solutions :

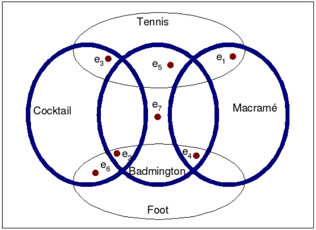
$$\begin{array}{lll} x_1 = 1 & x_2 = 1 & x_3 = 1 \\ x_1 = 1 & x_2 = 1 & x_4 = 1 \\ x_2 = 1 & x_4 = 1 & x_5 = 1 \end{array}$$

- Il faut du badmington...

Exemple : visualisation







Introduction

Jusque là

Représentation et définition des fonctions booléennes

Maintenant : la synthèse de ces fonctions

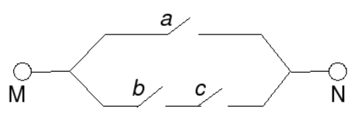
Représentation par des dispositifs physiques

- Passage d'un circuit à une formule
- Passage d'une formule à un circuit

Définition

Circuits électriques

- Interrupteurs à deux états
- Reliés par fils conducteurs
- Actionnés par des relais



Les relais

- Coordonnent l'état des interrupteurs
- Deux sortes :
  1. Interrupteurs coordonnés = même état
  2. Interrupteurs coordonnés = états opposés

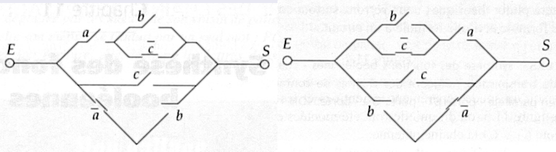
Conventions

Attribution de noms aux interrupteurs

- Même nom aux interrupteurs de même état
- Même nom aux interrupteurs en opposition, mais l'un avec une barre

Entrée E et sortie S de la chaîne de contact

Chaînes inverses



Chaîne de transmission

Fonction booléenne

Contrôle le passage du courant à travers la chaîne

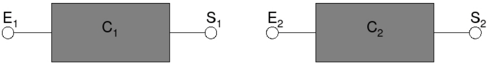
Définition

- A chaque interrupteur : une variable booléenne de même nom que l'indicateur d'état.
- Passage du courant de E à S : variable booléenne.
- Fonction de transmission : associe valeur du passage du courant aux bits d'états des interrupteurs.

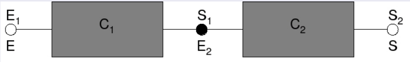
Objectif

Trouver une formule pour la fonction de transmission, sans table de vérité.

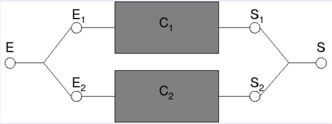
Soudures entre chaînes de contact



Soudure en série $C_1 \wedge C_2$



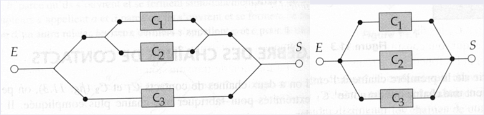
Soudure en parallèle (dérivation) $C_1 \vee C_2$



Calcul algébrique avec $\vee$ et $\wedge$

Propriétés de $\vee$: commutative, associative

Généralisons à $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$



propriétés de $\wedge$: associative, non commutative

- Fonction de transmission de $C_1 \wedge C_2$ = celle de $C_2 \wedge C_1$
- Pas de distributivité entre $\vee$ et $\wedge$

Théorèmes

Premier théorème

Si f_i désigne la fonction de transmission de la chaîne de contacts C_i, alors :

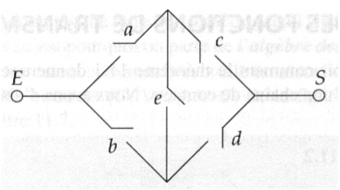
1. $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ est la fonction de transmission de la chaîne $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$
2. $f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_n$ est la fonction de transmission de la chaîne $C_1 \vee \cdots \vee C_n$

Second théorème

La fonction de transmission de la chaîne de contacts constituée uniquement d'un interrupteur a (resp. $\bar{a}$) est la fonction booléenne $f(a) = a$ (resp. $f(a) = \bar{a}$).

Une méthode pratique

1. Liste des chaînes de E à S sans traverser deux fois le même interrupteur, constituées d'interrupteurs montés en série
2. Ecriture de la fonction de transmission de chaque chaîne comme produit de littéraux
3. Somme booléenne des produits de littéraux



- 4 listes

$$f = ac \vee aed \vee bd \vee bec$$

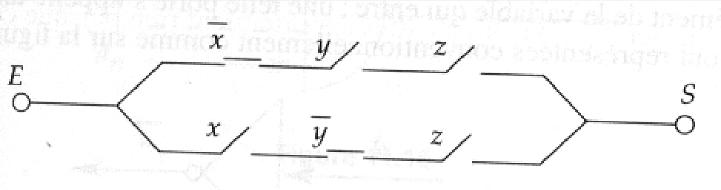
- Boucle *aebac* et loi d'absorption

Un dernier résultat

Théorème

Les chaînes de contact permettent de synthétiser toutes les fonctions booléennes : on peut toujours construire une chaîne de contacts ayant pour fonction de transmission une fonction booléenne donnée.

Exemple : $\bar{x}yz \vee x\bar{y}z$



Second procédé pour la synthèse

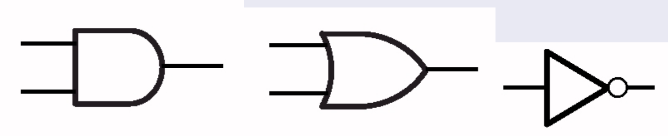
Principe

Courants électriques de tension 0 ou 1, envoyés via des fils conducteurs dans un dispositif électronique appelé une porte.

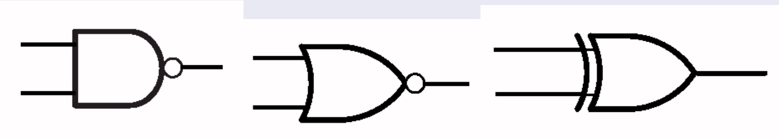
- Une variable booléenne par fil
- Portes principales : OR, AND, NOT : permettent de synthétiser toutes les fonctions booléennes
- Portes secondaires : NOR, NAND, XOR : une combinaison de portes NAND peut toujours remplacer les portes AND, OR, et NOT. Idem pour NOR.

Les portes

Les principales (ab, $a \vee b$, $\bar{a}$)



Les secondaires ($\overline{ab}$, $\overline{a \vee b}$, $a\bar{b} \vee \bar{a}b$)



Exemple

Fonction $c \vee (a(\bar{c} \vee b))$