

Rappels de logique

I. Logique propositionnelle

Camilla Schwind

Laboratoire d'Informatique Fondamentale, CNRS
Université de Marseille
163 Avenue de Luminy - F-13288 Marseille Cedex09, case 901
`camilla.schwind@lif.univ-mrs.fr`

Une logique est un système formel qui comporte :

- un langage (langage formel)
- une définition de la sémantique (fonction de vérité)
- un mécanisme de déduction (ensemble d'axiomes et de règles d'inférence)

Le langage définit des *formules*. Celles-ci ont vocation à exprimer des faits qui peuvent être vrais ou faux. La sémantique pour la logique propositionnelle est définie par une fonction qui associe une valeur de vérité (vrai ou faux) à une formule. On appelle cette fonction *fonction de vérité* ou *valuation*. La logique définit aussi un mécanisme de *déduction*. Pour cela, on donne un ensemble de formules, appelées *axiomes* qui sont toujours vrais et un ensemble de règles de déductions qui permettent de déduire d'autres formules toujours vraies. Un axiome est une formule et une règle de déduction est un couple (condition, conséquence). Une règle s'applique à un ensemble de formules si la condition est vérifiée et le résultat de l'application consiste à ajouter la conséquence à l'ensemble.

1. Les axiomes sont toujours (nécessairement) vrais
2. Si les préconditions d'une règle de déduction sont vrais alors la conséquence est vrai.

La logique est aussi un système formel qui permet d'étudier des relations de conséquence entre formules ou ensembles de formules.

1 Syntaxe

Etant donné un ensemble \mathcal{P} de symboles appelés *variables propositionnelles*, (où *atomes*), l'ensemble des formules propositionnelles sur \mathcal{P} est le plus petit ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ tel que

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$
- Si $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ alors $\neg\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$.
- Si $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ et $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ alors $\phi \vee \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$

Souvent, on écrit \mathcal{L} au lieu de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ si \mathcal{P} est fixé dans un contexte.

On note les variables propositionnelles p, q, \dots , les formules ϕ, ψ, \dots et les ensembles de formules $\Gamma, \Delta \dots$. Une variable propositionnelle est une *formule atomique*. Un *littéral* est un atome ou la négation d'un atome.

Les autres connecteurs $\wedge, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow, \dots$ sont définis comme d'habitude.

2 Sémantique

Définition 1 (Valuation) Une valuation est une fonction v de \mathcal{P} dans $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$. On étend cette définition aux formules par $v(\neg\phi) = \text{vrai}$ ssi $v(\phi) = \text{faux}$ et $v(\phi \vee \psi) = \text{vrai}$ ssi $v(\phi) = \text{vrai}$ ou $v(\psi) = \text{vrai}$.

Chaque valuation v détermine un sous-ensemble de \mathcal{P} : $m_v = \{p \in \mathcal{P} : v(p) = \text{vrai}\}$ qu'on appelle interprétation propositionnelle. D'autre part, chaque sous-ensemble $m \subseteq \mathcal{P}$ correspond à une interprétation v_m définie par $v_m(x) = \text{vrai}$ ssi $x \in m$.

Définition 2 (Modèle) Une interprétation m est un modèle de la formule ϕ si $v_m(\phi) = \text{vrai}$; on note $m \models \phi$. m est un modèle d'un ensemble de formules Γ s'il est un modèle de chaque élément de Γ .

L'ensemble des modèles d'une formule ϕ (d'un ensemble de formules Γ) est noté $Mod(\phi)$ ($Mod(\Gamma)$). On a donc $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\phi \in \Gamma} Mod(\phi)$.

Une formule ϕ est satisfiable s'il existe une interprétation m qui est un modèle de ϕ , i.e. s'il existe une valuation v t.q. $v(\phi) = \text{vrai}$. Une formule ϕ est valide si $v(\phi) = \text{vrai}$ pour toute valuation v . Dans ce cas on a $Mod(\phi) = 2^{\mathcal{P}}$. Une formule valide est aussi appelée *tautologie*.

Définition 3 (Conséquence) On utilise le même symbole \models pour définir la relation de conséquence. Une formule ϕ est la conséquence d'un ensemble de formules Γ , $\Gamma \models \phi$, si chaque modèle de Γ est un modèle de ϕ , donc si $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\phi)$. Si $\Gamma = \{\chi\}$, on note aussi $\chi \models \phi$ au lieu de $\{\chi\} \models \phi$. On note $Cn(\Gamma) = \{\phi \in \mathcal{F} : \Gamma \models \phi\}$ l'opérateur de conséquence sémantiques.

Si $\Gamma = \emptyset$, on note $\models \phi$ et on a ϕ est valide ssi $\models \phi$.

Théorème 1 L'opérateur Cn a les propriétés suivantes :

1. $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
2. $Cn(\Gamma) = Cn(Cn(\Gamma))$ idempotent
3. Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$ alors $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma')$ monotone
4. $Cn(\Gamma) = Cn(\Delta)$ pour un sous-ensemble fini Δ de Γ compacte
5. $\phi \rightarrow \psi \in Cn(\Gamma)$ ssi $\psi \in Cn(\Gamma \cup \{\phi\})$ théorème de deduction
6. $Cn(\Gamma) = \{\chi : Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\chi)\}$
7. $Cn(Mod(\Gamma)) = Mod(Cn(\Gamma))$ dualité de Cn et Mod

3 Calcul logique : Axiomes et règles d'inférence

Une règle r d'inférence (ou de de déduction) a la forme $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \alpha$ où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et α sont des formules, appelées *prémisses* et *conclusion* de r resp. Une règle sans prémisses est appelé *axiome*. Un calcul consiste d'un nombre fini de schémas de règles d'inférence. Le calcul \mathcal{S}_0 ci-dessous [2] (comportant un axiome et quatre règles de déduction) n'est pas le seul possible [1]. Les metavariables P, Q, R désignent des formules arbitraires. Une instance d'une formule est la formule obtenue en remplaçant les metavariables par des formules.

Le calcul \mathcal{S}_0

Axiome 1 $P \vee \neg P$

Règle 1 *Expansion* $P : P \vee Q$

Règle 2 *Contraction* $P \vee P : P$

Règle 3 *Associativité* $P \vee (Q \vee R) : (P \vee Q) \vee R$

Règle 4 *Coupure* $P \vee Q, R \vee \neg Q : P \vee R$

Les axiomes et les règles d'inférence du calcul \mathcal{S}_0 définissent l'ensemble des formules *déductible* d'un ensemble Γ de formules

Définition 4 $Ded_{\mathcal{S}_0}(\Gamma)$ est le plus petit ensemble t.q.

1. $\Gamma \subseteq Ded_{\mathcal{S}_0}(\Gamma)$
2. Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \alpha$ est une instance d'une règle de \mathcal{S}_0 et $\forall i, \alpha_i \in Ded_{\mathcal{S}_0}(\Gamma)$ alors $\alpha \in Ded_{\mathcal{S}_0}(\Gamma)$
On note $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_0} P$ si $P \in Ded_{\mathcal{S}_0}(\Gamma)$.

Si $\Gamma = \emptyset$ alors P est une *théorème logique* et on note $\vdash_{\mathcal{S}_0} P$. On peut omettre l'index \mathcal{S}_0 s'il est clair dans un contexte.

Théorème 2 (Correction) Le calcul \mathcal{S}_0 est correcte : si $\vdash_{\mathcal{S}_0} \phi$ alors $\models \phi$.

Théorème 3 (Complétude) Le calcul \mathcal{S}_0 est complet : si $\models \phi$ alors $\vdash_{\mathcal{S}_0} \phi$.

Théorème 4 (Compacité) Une formule P est déductible d'un ensemble de formules Γ ssi elle est déductible d'un ensemble fini de Γ :

$$Cn(\Gamma) = \bigcup \{ Cn(\Gamma') : \Gamma' \subseteq \Gamma, \Gamma' \text{ fini} \}$$

4 Exercices

Soient $\alpha, \beta, \phi, \psi \in \mathcal{F}$ des formules et $\Delta, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$ des ensembles de formules et $M \subseteq \mathcal{M}$ un ensemble d'interprétations. $Mod(\phi)$ est l'ensemble des modèles de ϕ . $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\phi \in \Gamma} Mod(\phi)$

Démontrez :

1. $Cn(\alpha \vee \beta) = Cn(\alpha) \cap Cn(\beta)$
2. $\models \phi \rightarrow \psi$ iff $Mod(\phi) \subseteq Mod(\psi)$
3. Si $\Gamma \subseteq \Delta$ alors $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
4. Si $\Gamma \subseteq \Delta$ alors $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$
5. $Cn(\Gamma) \cap Cn(\Delta) \supseteq Cn(\Gamma \cap \Delta)$
6. $Cn(\Gamma) \cap Cn(\Delta) \not\subseteq Cn(\Gamma \cap \Delta)$
7. Si T et T' sont déductivement clos, alors $Cn(T) \cap Cn(T') = Cn(T \cap T')$
8. $FOR(M) = Cn(FOR(M))$

Références

1. Serena Cerrito. *Logique pour l'Informatique : une introduction à la déduction automatique*. Vuibert, 2008.
2. J. R. Shoenfield. *Mathematical Logic*. Addison - Wesley Publishing Company, Mass., 1967.