Cours d'Interfaces Graphiques n°6

Edouard THIEL

Faculté des Sciences

Université d'Aix-Marseille (AMU)

Janvier 2016

Les transparents de ce cours sont téléchargeables ici :
`http://pageperso.lif.univ-mrs.fr/~edouard.thiel/ens/igra/`

Lien court : `http://j.mp/optigra`

Transformations géométriques pour l'infographie

Entrée : – liste de points $\{P_i\}$ (de grande taille)
– liste de transformations géométriques F_j (rotations, translations, etc)

Sortie : – liste de nouveaux points transformés $\{F_n(\ldots(F_2(F_1(P_i)))\ldots)\}$

Buts :

- mettre F_j en équation
- faire le calcul efficace sur $\{P_i\}$
- précalculer $F = F_n \circ \ldots \circ F_2 \circ F_1$?

Plan du cours n°6

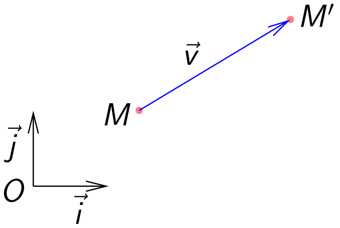
1. Exemples de transformations 2D
2. Composition
3. Espace projectif
4. Projection en 3D
5. Transformations avec Cairo

1 - Exemples de transformations 2D

- Translation
- Rotation
- Homothétie
- Affinité
- Symétrie centrale
- Symétrie axiale

Translation $T_{\vec{v}}$

Vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



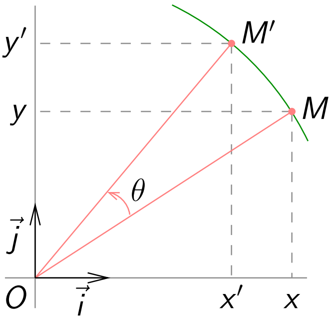
$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Rotation $R_{O,\theta}$

Centre O, angle θ



$$R_{O,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

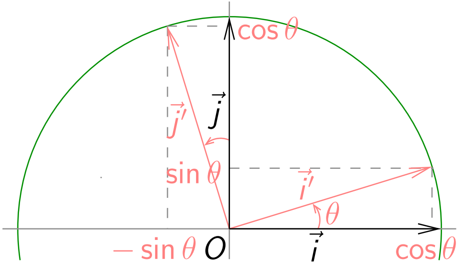
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{O,\theta} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Matrice de rotation

Rotation de la base $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\rightarrow$ base $(O, \vec{i}', \vec{j}')$

Matrice des vecteurs colonne : $R_{O,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

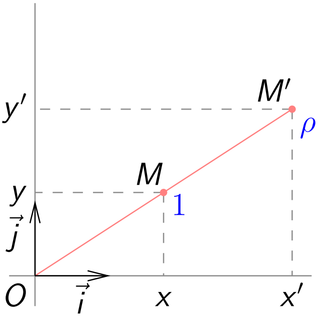


$$R_{O,\theta} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i}'$$

$$R_{O,\theta} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{j}'$$

Homothétie $H_{O,\rho}$

Centre O, rapport ρ



$$\overrightarrow{OM'} = \rho\, \overrightarrow{OM}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\, x \\ \rho\, y \end{pmatrix}$$

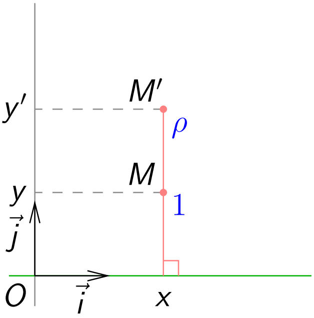
Peut encore s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = H_{O,\rho} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $H_{O,\rho} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$

Affinité $A_{Ox,\perp,\rho}$

Axe Ox, direction $\perp$, rapport ρ



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \rho\, y \end{pmatrix}$$

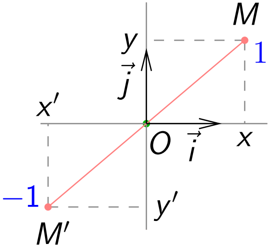
Peut encore s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A_{Ox,\perp,\rho} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $A_{Ox,\perp,\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$

Symétrie centrale S_O

Centre O



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

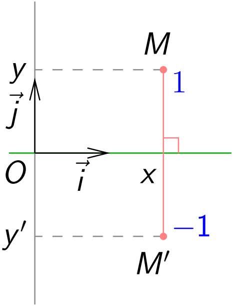
Peut encore s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_O \, . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $S_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H_{O,-1}$

Symétrie axiale $S_{(Ox)}$

Axe (Ox)



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Peut encore s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_{(Ox)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $S_{(Ox)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_{Ox,\perp,-1}$

2 - Composition

Soit M un point

f, g, h des transformations

On calcule $M' = h(g(f(M))) = h \circ g \circ f(M)$

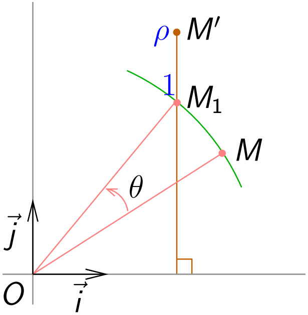
$$\underset{\text{dans ce sens}}{\longleftarrow}$$

Précalcul : soit $T = h \circ g \circ f$

alors $M' = T(M)$ en une seule opération

Exemple 1

Une rotation $R_{O,\theta}$ puis une affinité $A_{Ox,\perp,\rho}$



$$T = A_{Ox,\perp,\rho} \circ R_{O,\theta}$$

$\longleftarrow$
dans ce sens

Composition $\Leftrightarrow$ multiplication matricielle : $T = A_{Ox,\perp,\rho} \,.\, R_{O,\theta}$

⚠ Non commutatif en général

Matrice composée

$$T = A_{Ox,\perp,\rho} \, . \, R_{O,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

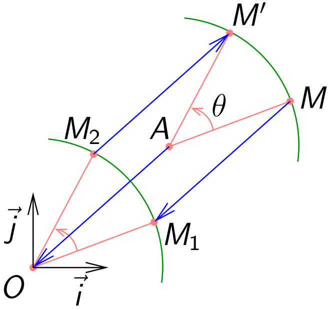
Non commutativité :

$$T' = R_{O,\theta} \, . \, A_{Ox,\perp,\rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : rotation de centre A

On ramène A au centre : $R_{A,\theta} = T_{\overrightarrow{OA}} \circ R_{O,\theta} \circ T_{\overrightarrow{AO}}$



$M \to M_1 \to M_2 \to M'$

Problème

⚠ $T_{\vec{v}}$ n'est pas définie pas une multiplication matricielle !

En fait, pas possible avec matrices 2×2

Solution : augmenter la dimension

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{peut encore s'écrire :}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution : matrices 3×3

On écrit donc : $T_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

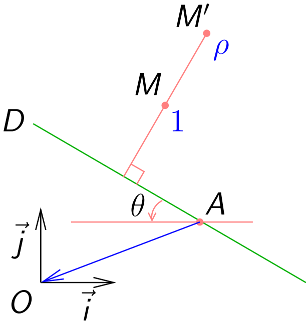
et de même : $R_{O,\theta} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} c = \cos\theta \\ s = \sin\theta \end{cases}$

Rotation matricielle de centre A

On a donc :

$$
\begin{aligned}
R_{A,\theta} &= T_{\overrightarrow{OA}} \,.\, R_{O,\theta} \,.\, T_{\overrightarrow{AO}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & -s & -ac+bs \\ s & c & -as-bc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c & -s & a-ac+bs \\ s & c & b-as-bc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemple 3 : affinité $A_{D,\perp,\rho}$



$$A_{D,\perp,\rho} = T_{\overrightarrow{OA}} \circ R_{-\theta} \circ A_{Ox,\perp,\rho} \circ R_{\theta} \circ T_{\overrightarrow{AO}}$$

$$A_{D,\perp,\rho} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

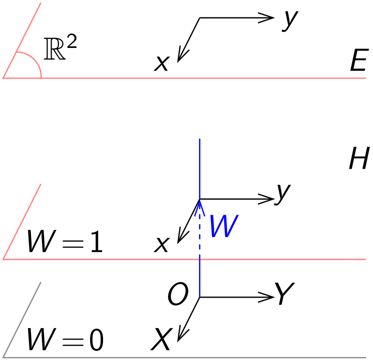
$$c = \cos\theta = \cos(-\theta)\ , \quad s = \sin\theta = -\sin(-\theta)$$

Cas général en 2D

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

À quoi correspond géométriquement cette augmentation de dimension ?

3 - Espace projectif



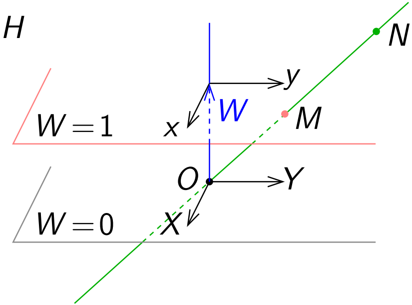
Espace affine, dim n

$\downarrow$

Espace projectif, dim n
dans espace H, dim $n+1$

Droites vectorielles

On remplace des points $M \in E$ par des droites vectorielles $(ON) \in H$



$M = (x, y) = (x, y, 1)$

$N = (\lambda x, \lambda y, \lambda)$

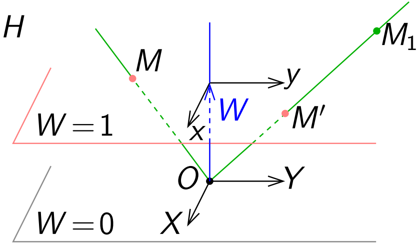
N représente une direction

Projection Π

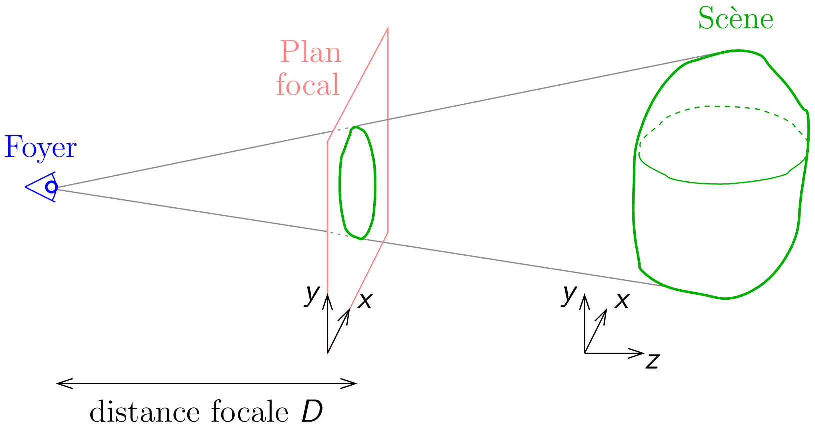
$$\Pi : (X, Y, W) \longmapsto \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, 1 \right)$$

On fait les transformations sur les droites vectorielles :

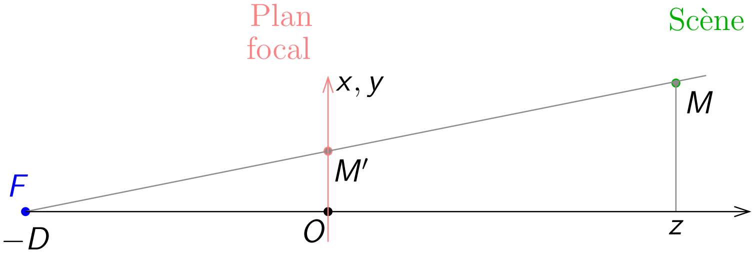
$$M = (x, y, 1) \xrightarrow{T} M_1 = (X_1, Y_1, W_1) \xrightarrow{\Pi} M' = \left(\frac{X_1}{W_1}, \frac{Y_1}{W_1}, 1 \right)$$



4 - Application : projection en 3D

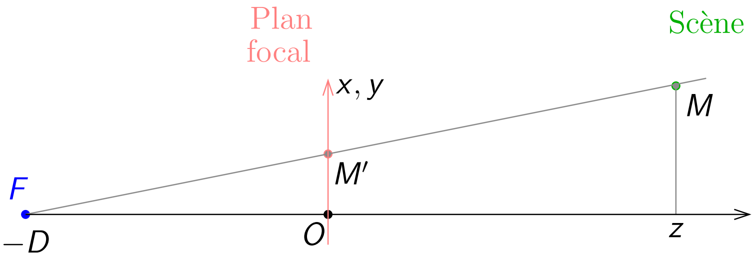


Transformation en dimension 4



$$\text{On cherche} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{pmatrix} = ?$$

Thalès



Par Thalès : $\begin{cases} \dfrac{x'}{x} = \dfrac{D}{D+z} \\ \dfrac{y'}{y} = \dfrac{D}{D+z} \\ z' = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x' = x \cdot \dfrac{D}{D+z} \\ y' = y \cdot \dfrac{D}{D+z} \\ z' = 0 \end{cases}$

Calculs

On pose : $x = \dfrac{X}{W}\ ,\ \ y = \dfrac{Y}{W}\ ,\ \ z = \dfrac{Z}{W}$

$$x' = \frac{X'}{W'}\ ,\ \ y' = \frac{Y'}{W'}\ ,\ \ z' = \frac{Z'}{W'}$$

On remplace : $x' = x \cdot \dfrac{D}{D+z}$

devient : $\dfrac{X'}{W'} = \dfrac{X}{W} \cdot \dfrac{D}{D + \dfrac{Z}{W}} = \dfrac{X}{W} \cdot \dfrac{DW}{DW+Z} = \dfrac{DX}{DW+Z}$

On pose : $W' = DW + Z$

d'où : $\dfrac{X'}{W'} = \dfrac{DX}{W'}$ donc $X' = DX$

de même $Y' = DY$

Projection P_{Oxy}

Finalement :

$$\begin{cases} X' = DX \\ Y' = DY \\ Z' = 0 \\ W' = Z + DW \end{cases} \qquad \text{donc } P_{Oxy} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D \end{pmatrix}$$

Profondeur

Pour savoir si un point est devant un autre (il le cache), on remplace $Z' = 0$ par $Z' = DZ$

Fonction monotone croissante $\rightarrow$ préserve l'ordre

$$P_{Oxy} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D \end{pmatrix}$$

Forme finale

On divise X, Y, Z et W par D $\rightarrow$ même résultat après projection

$$P_{Oxy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D & 1 \end{pmatrix}$$

Usage et Z-buffer

Soit $T = P_{Oxy} \circ R \circ T \circ A \circ \ldots$

$\longleftarrow$

dans ce sens, P en dernier

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X = x \\ Y = y \\ Z = z \\ W = 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{pmatrix} = T \,.\, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{X'}{W'} \\[2ex] y' = \dfrac{Y'}{W'} \end{array}\right\} \text{dessin}$$

$$\left.\begin{array}{l} z' = \dfrac{Z'}{W'} \end{array}\right\} \text{test de profondeur dans Z-buffer}$$

Multiplications câblées dans les cartes graphiques

5 - Transformations avec Cairo

Cairo utilise aussi le produit de matrices

Transformations affines 2D avec matrice 3×3

Dernière ligne toujours $(0 \;\; 0 \;\; 1)$ $\rightarrow$ non stocké dans matrices Cairo

```
typedef struct {
    double xx; double yx;
    double xy; double yy;
    double x0; double y0;
} cairo_matrix_t;
```

correspond à $\begin{pmatrix} \mathtt{xx} & \mathtt{xy} & \mathtt{x0} \\ \mathtt{yx} & \mathtt{yy} & \mathtt{y0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Current Transformation Matrix CTM

CTM stockée dans le contexte graphique cr

Tous les dessins sont réalisés après transformation avec CTM

```
// reset CTM
cairo_identity_matrix (cr);

// transformations -> multiplications CTM
cairo_translate (cr, dx, dy);
cairo_scale (cr, sx, sy);
cairo_rotate (cr, radians);

// dessins transformés
```

Stockage de matrice

```
cairo_matrix_t mat;

cairo_matrix_init_identity (&mat);
cairo_matrix_translate (&mat, dx, dy);
cairo_matrix_scale (&mat, sx, sy);
cairo_matrix_rotate (&mat, radians);

cairo_set_matrix (cr, &mat);        // -> CTM

// dessins transformés
```


Sauvegarde et restauration

Utile dans le cas de scènes emboîtées :

```
cairo_matrix_t mat_svg;
cairo_get_matrix (cr, &mat_svg);

// transformations et dessins

cairo_set_matrix (cr, &mat_svg);
```

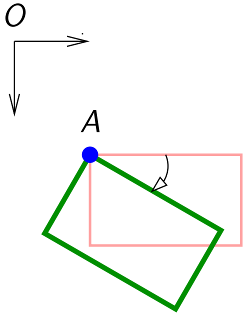
On peut aussi sauvegarder/restaurer tout le contexte (sauf le chemin) dans une pile interne :

```
cairo_save (cr);

// transformations et dessins

cairo_restore (cr);
```

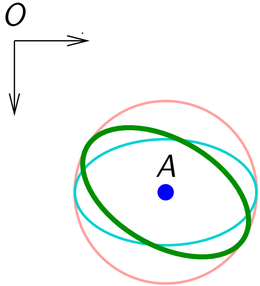

Exemple : rotation de rectangle

Rotation de centre A de 30° du coin en haut à gauche

```
double xA = 50.0, yA = 100.0;

cairo_identity_matrix (cr);
cairo_translate (cr, xA, yA);
cairo_rotate (cr, G_PI/6);
cairo_translate (cr, -xA, -yA);

cairo_rectangle (cr, xA, yA, 90, 60);
cairo_stroke (cr);
```



Exemple : ellipse et rotation



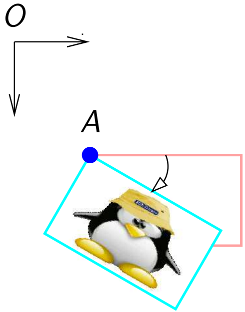

```
double xA = 80.0, yA = 100.0;

cairo_identity_matrix (cr);
cairo_translate (cr, xA, yA);
cairo_rotate (cr, G_PI/6);
cairo_scale (cr, 1.0, 0.4);
cairo_translate (cr, -xA, -yA);

cairo_arc (cr, xA, yA, 60.0, 0, 2*G_PI);

cairo_identity_matrix (cr);  // pour épaisseur uniforme
cairo_set_line_width (cr, 10.0);
cairo_stroke (cr);
```

Afficher une image avec une Surface Cairo

Transformations d'images : pas possible avec Pixbufs
Utiliser Surfaces Cairo (uniquement format png)

```
cairo_surface_t *image;
image = cairo_image_surface_create_from_png ("tux2.png");

int ima_w = cairo_image_surface_get_width (image),
    ima_h = cairo_image_surface_get_height (image);

double xA = 50.0, yA = 100.0;

cairo_set_source_surface (cr, image, xA, yA);
cairo_rectangle (cr, xA, yA, ima_w, ima_h);
cairo_fill (cr);

cairo_surface_destroy (image);
```


Transformation d'image




```
double xA = 50.0, yA = 100.0;

cairo_identity_matrix (cr);
cairo_translate (cr, xA, yA);
cairo_rotate (cr, G_PI/6);
cairo_scale (cr, 0.8, 0.4);
cairo_translate (cr, -xA, -yA);

cairo_set_source_surface (cr, image, xA, yA);
cairo_rectangle (cr, xA, yA, ima_w, ima_h);
cairo_fill (cr);
```

