

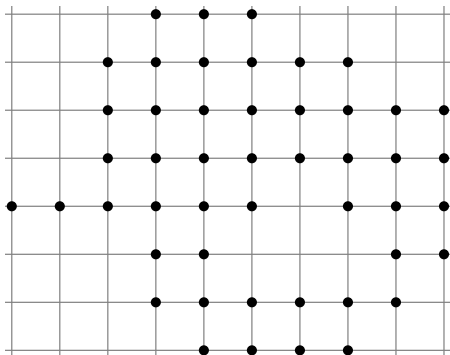
Axe Médian Discret : Propriétés Arithmétiques et Algorithmes

Jérôme Hulin
sous la direction d'Édouard Thiel

Aix-Marseille Université
Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille
Equipe Combinatoire et Recherche Opérationnelle

Espace de travail

- Espace discret \mathbb{Z}^n
- Forme $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$

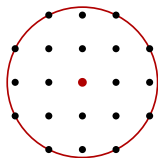


Boule discrète

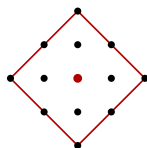
Étant donnée une distance d , la boule (fermée) de centre $p \in \mathbb{Z}^n$ et rayon $r \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}(p, r) = \{q \in \mathbb{Z}^n : d(p, q) \leq r\}.$$

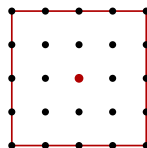
$$B_r = \mathcal{B}(O, r).$$



$$d_e, r = \sqrt{5}$$



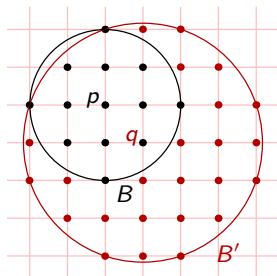
$$d_1, r = 2$$



$$d_\infty, r = 2$$

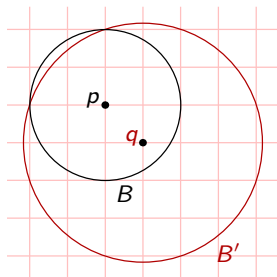
Représentation des boules discrètes

Par la frontière de la boule continue de même rayon.



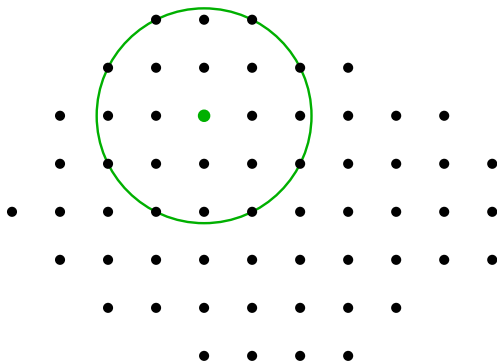
Représentation des boules discrètes

Par la frontière de la boule continue de même rayon.



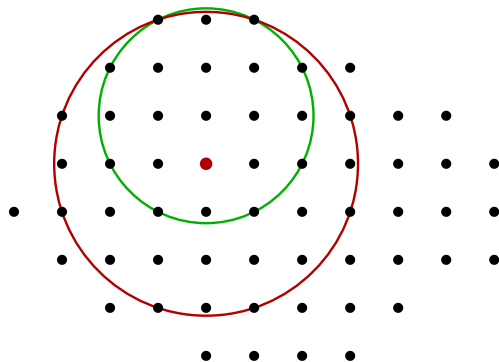
Boule maximale

Une boule est maximale dans \mathcal{S} si elle n'est incluse dans aucune autre boule de \mathcal{S} .



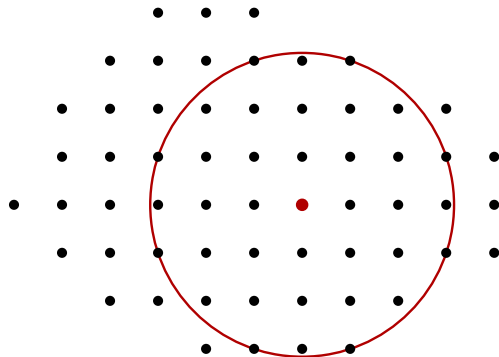
Boule maximale

Une boule est maximale dans \mathcal{S} si elle n'est incluse dans aucune autre boule de \mathcal{S} .



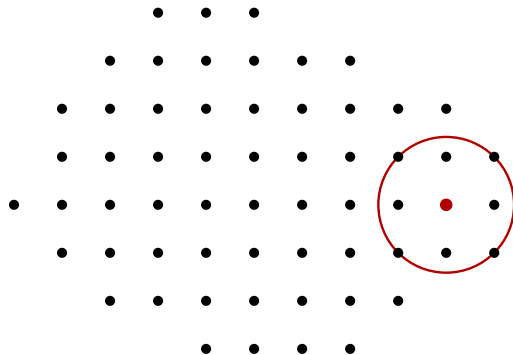
Boule maximale

Une boule est maximale dans \mathcal{S} si elle n'est incluse dans aucune autre boule de \mathcal{S} .



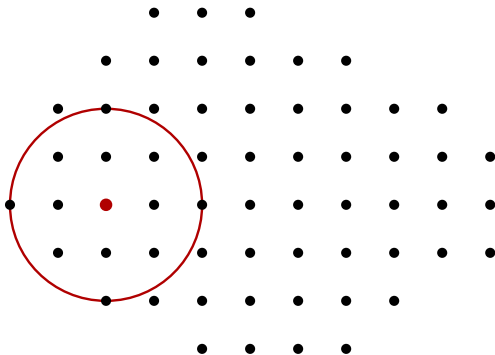
Boule maximale

Une boule est maximale dans \mathcal{S} si elle n'est incluse dans aucune autre boule de \mathcal{S} .



Boule maximale

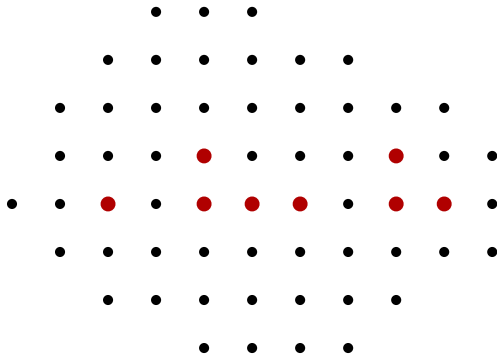
Une boule est maximale dans \mathcal{S} si elle n'est incluse dans aucune autre boule de \mathcal{S} .



Axe Médian (AM) [Pfaltz et Rosenfeld 67]

$AM(\mathcal{S}) :$

Ensemble des centres (et rayons) des boules maximales de \mathcal{S} .

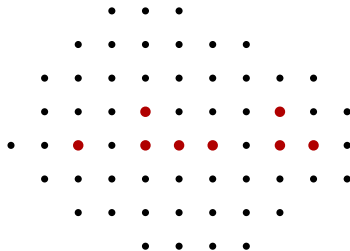


Axe Médian (AM) [Pfaltz et Rosenfeld 67]

$AM(\mathcal{S})$: Ensemble des centres (et rayons) des boules maximales de \mathcal{S} .

Nombreuses applications

- description et représentation de forme ;
- calcul de squelette ;
- compression.

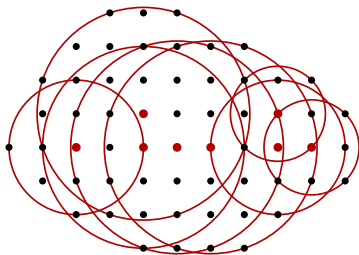


Axe Médian (AM) [Pfaltz et Rosenfeld 67]

$AM(\mathcal{S})$: Ensemble des centres (et rayons) des boules maximales de \mathcal{S} .

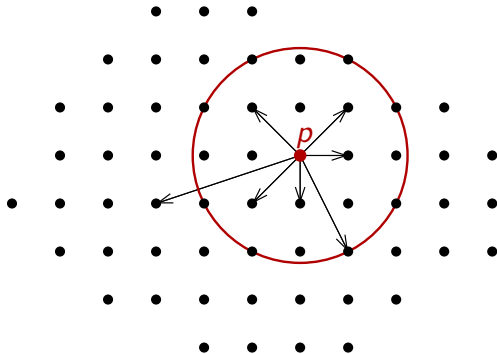
Nombreuses applications

- description et représentation de forme ;
- calcul de squelette ;
- compression.



Point commun dans la littérature

Recherche locale (par voisinage)



Distances simples

Distances d_1 et d_∞ [Pfaltz et Rosenfeld 67]

Par étude de cas

- distance euclidienne pour des formes d'épaisseur $\leq \sqrt{80}$ [Borgefors *et al.* 91]
- distance de chanfrein $\langle 3, 4 \rangle$ [Arcelli et Sanniti di Baja 88]
- distance de chanfrein $\langle 5, 7, 11 \rangle$ [Borgefors 93]

Méthodes générales

- distance euclidienne : [Rémy et Thiel 05] dim n
- normes de chanfrein : [Rémy et Thiel 02] dim n
[Normand et Évenou 08, 09] dim 2, 3

Motivations

- algorithmes existants : par calcul exhaustif uniquement ;
- nombreuses observations et conjectures fournies par ces algorithmes.

Résultats

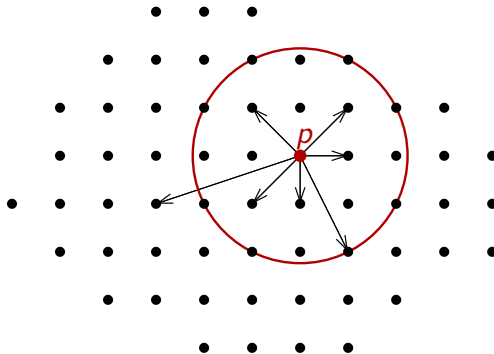
- Lien entre les voisinages de test et des outils arithmétiques ;
- caractérisations de voisinages de test pour la distance euclidienne (dim n) et les normes de chanfrein 3×3 et 5×5 ;
- nouveaux algorithmes plus performants pour le calcul des voisinages ;
- NP-difficulté du problème de couverture minimum pour d_e .

- 1 Les voisinages de test minimum $\mathcal{T}(R)$
- 2 Outils proposés
- 3 Distance euclidienne
- 4 Normes de chanfrein
- 5 Couverture minimum par des boules euclidiennes
- 6 Conclusion et perspectives

- 1 Les voisinages de test minimum $\mathcal{T}(R)$
 - Propriétés des voisinages
 - Symétries
 - Caractérisation par boule
- 2 Outils proposés
- 3 Distance euclidienne
- 4 Normes de chanfrein
- 5 Couverture minimum par des boules euclidiennes
- 6 Conclusion et perspectives

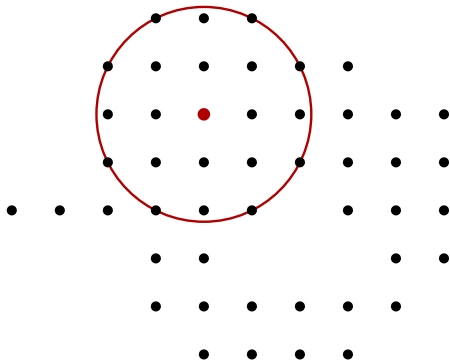
Paramètres

- la distance utilisée ;
- l'épaisseur de la forme.



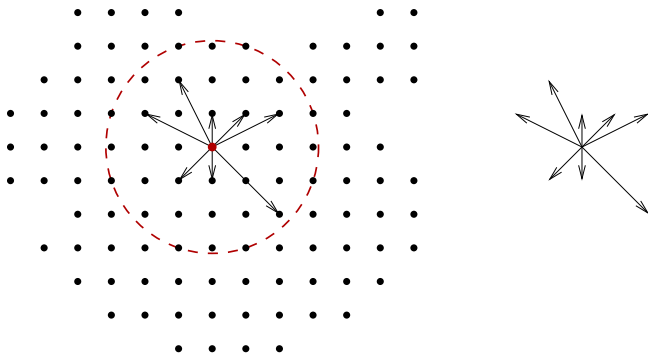
Rayon d'une forme

$\text{rad}(\mathcal{S})$: rayon d'une plus grande boule incluse dans \mathcal{S} .



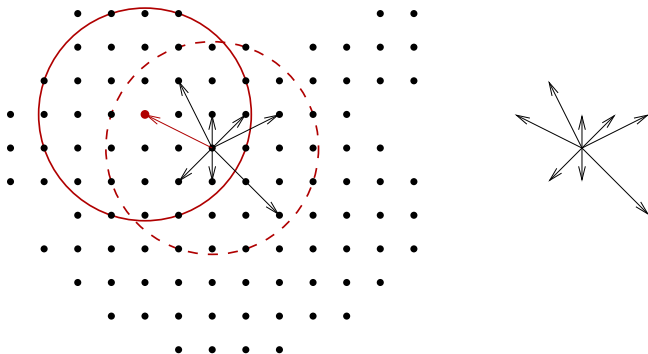
R-voisinage

Voisinage de test suffisant pour détecter l'axe médian de toutes les formes de rayon $\leq R$.



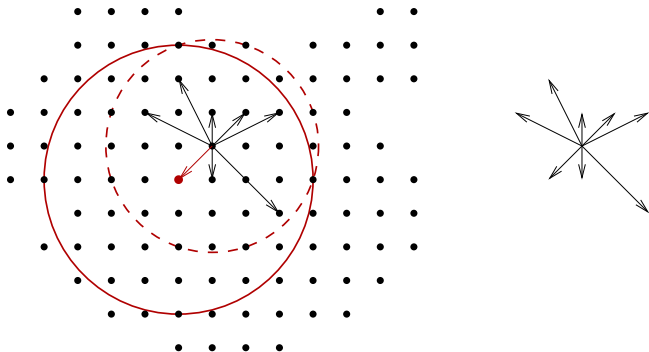
R-voisinage

Voisinage de test suffisant pour détecter l'axe médian de toutes les formes de rayon $\leq R$.



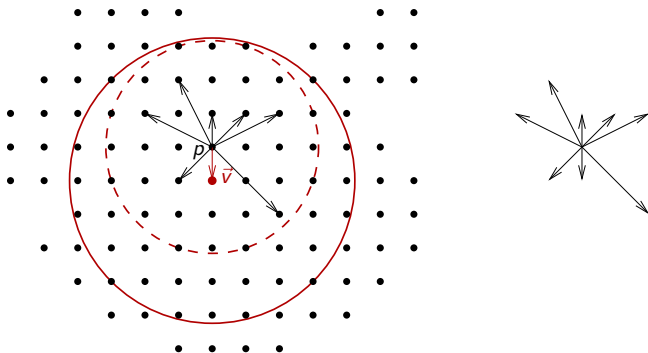
R-voisinage

Voisinage de test suffisant pour détecter l'axe médian de toutes les formes de rayon $\leq R$.



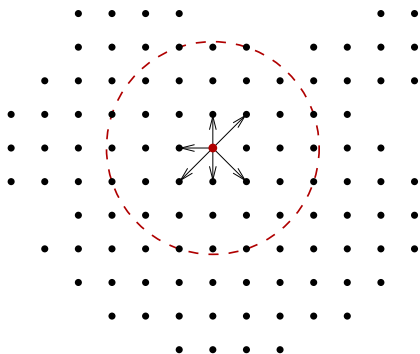
R -voisinage

Voisinage de test suffisant pour détecter l'axe médian de toutes les formes de rayon $\leq R$.



R -voisinage minimum

Pour tout $R \geq 0$, il existe un unique R -voisinage de cardinalité minimum. On le note $\mathcal{T}(R)$.

 $\mathcal{T}(R)$

R -voisinage minimum

Pour tout $R \geq 0$, il existe un unique R -voisinage de cardinalité minimum. On le note $\mathcal{T}(R)$.

Voisinage infini

Voisinage de test infini : $\mathcal{T} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{T}(R)$.

Imbrication

$$R \leq R' \Rightarrow \mathcal{T}(R) \subseteq \mathcal{T}(R').$$

Symétries

Mêmes symétries que la distance utilisée.

Imbrication

$$R \leq R' \Rightarrow \mathcal{T}(R) \subseteq \mathcal{T}(R').$$

Symétries

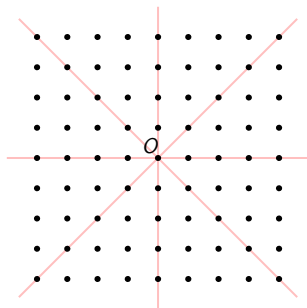
Mêmes symétries que la distance utilisée.

Les G-symétries : symétries de \mathbb{Z}^n

Symétries axiales $\{x_i = 0\}_{1 \leq i \leq n}$ et diagonales $\{x_i = x_j\}_{1 \leq i < j \leq n}$.

Générateur

$$G(\mathcal{S}) = \{x \in \mathcal{S} : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n\}.$$

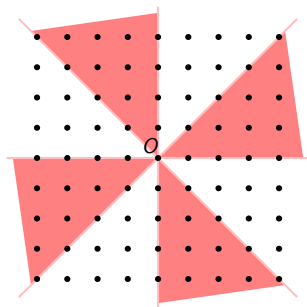


Les G-symétries : symétries de \mathbb{Z}^n

Symétries axiales $\{x_i = 0\}_{1 \leq i \leq n}$ et diagonales $\{x_i = x_j\}_{1 \leq i < j \leq n}$.

Générateur

$$G(\mathcal{S}) = \{x \in \mathcal{S} : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n\}.$$

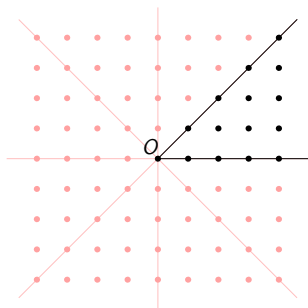


Les G-symétries : symétries de \mathbb{Z}^n

Symétries axiales $\{x_i = 0\}_{1 \leq i \leq n}$ et diagonales $\{x_i = x_j\}_{1 \leq i < j \leq n}$.

Générateur

$G(\mathcal{S}) = \{x \in \mathcal{S} : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n\}$.



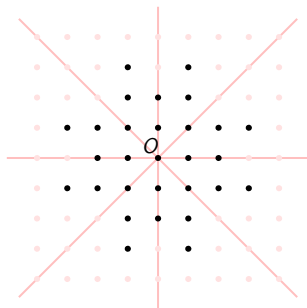
Les G-symétries : symétries de \mathbb{Z}^n

Symétries axiales $\{x_i = 0\}_{1 \leq i \leq n}$ et diagonales $\{x_i = x_j\}_{1 \leq i < j \leq n}$.

Générateur

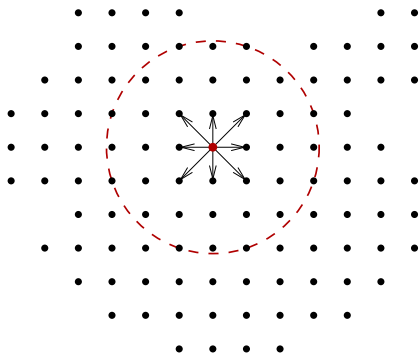
$G(\mathcal{S}) = \{x \in \mathcal{S} : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n\}$.

forme G-symétrique :



Caractérisation de $\mathcal{T}(R)$

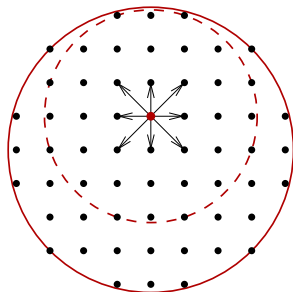
$\mathcal{T}(R)$ est nécessaire et suffisant pour calculer l'axe médian de toutes les boules de rayon $\leq R$.



$\mathcal{T}(R)$

Caractérisation de $\mathcal{T}(R)$

$\mathcal{T}(R)$ est nécessaire et suffisant pour calculer l'axe médian de toutes les boules de rayon $\leq R$.



$\mathcal{T}(R)$

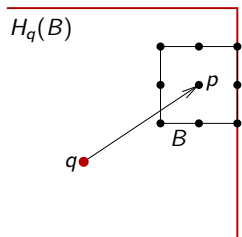
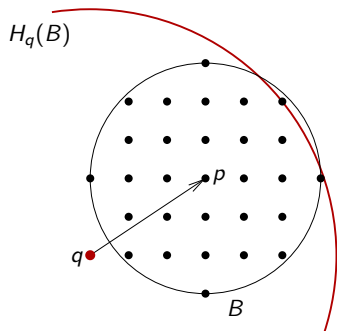
- 1 Les voisinages de test minimum $\mathcal{T}(R)$
- 2 Outils proposés
 - domination ;
 - serrure, clef.
- 3 Distance euclidienne
- 4 Normes de chanfrein
- 5 Couverture minimum par des boules euclidiennes
- 6 Conclusion et perspectives

Boule couvrante

$H_q(B)$: la plus petite boule de centre q et qui contient B .

Rayon de couverture

Le rayon de la boule $H_q(B)$.

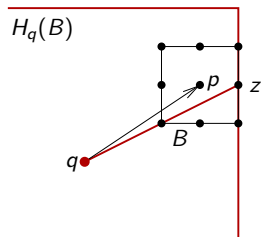
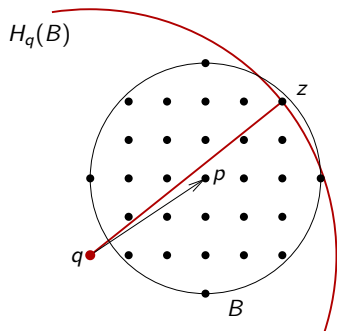


Boule couvrante

$H_q(B)$: la plus petite boule de centre q et qui contient B .

Rayon de couverture

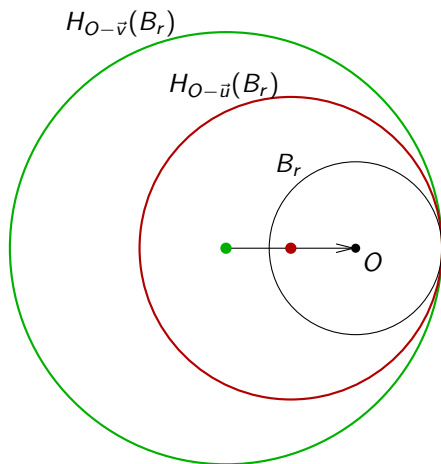
Le rayon de la boule $H_q(B)$.



Domination

$$\vec{v} \prec \vec{u} \iff \forall r \in \mathbb{N}, H_{O-\vec{u}}(B_r) \subset H_{O-\vec{v}}(B_r).$$

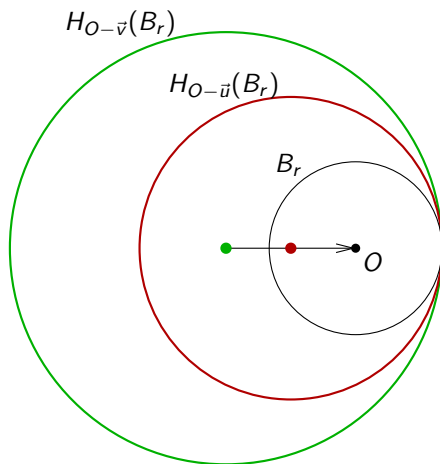
$$\vec{v} \prec \vec{u} \Rightarrow \vec{v} \notin \mathcal{T}.$$



Domination

$$\vec{v} \prec \vec{u} \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{N}, H_{O-\vec{u}}(B_r) \subset H_{O-\vec{v}}(B_r).$$

$$\vec{v} \prec \vec{u} \Rightarrow \vec{v} \notin \mathcal{T}.$$



Rayon d'apparition

$R_{app}(\vec{v})$: le plus petit R pour lequel $\vec{v} \in \mathcal{T}(R)$.

Exemple pour d_e en 2D

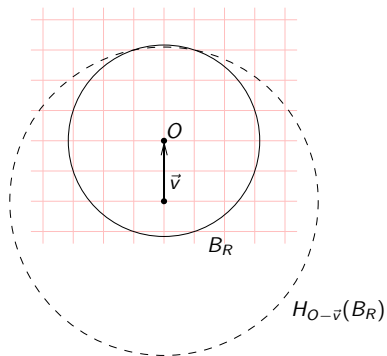
\vec{v}	$R_{app}(\vec{v})$
(1, 0)	1
(1, 1)	2
(2, 1)	101
(3, 1)	146
(3, 2)	424
(4, 1)	848
...	

Serrure

Serrure (R, \vec{v}) : couple des boules B_R et $H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

Clef

B est une clef de la serrure $(R, \vec{v}) \Leftrightarrow B_R \subsetneq B \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

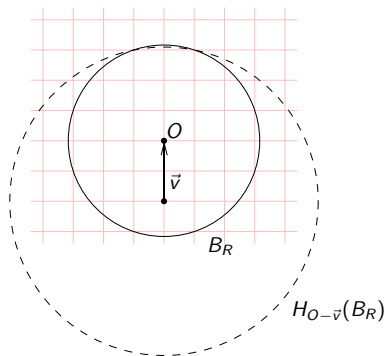


Serrure

Serrure (R, \vec{v}) : couple des boules B_R et $H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

Clef

B est une clef de la serrure $(R, \vec{v}) \Leftrightarrow B_R \subsetneq B \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

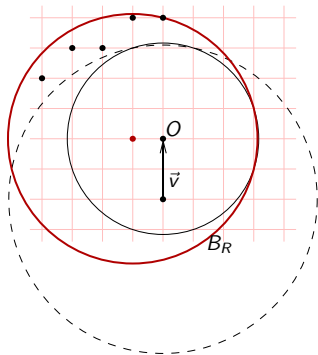


Serrure

Serrure (R, \vec{v}) : couple des boules B_R et $H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

Clef

B est une clef de la serrure $(R, \vec{v}) \Leftrightarrow B_R \subsetneq B \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

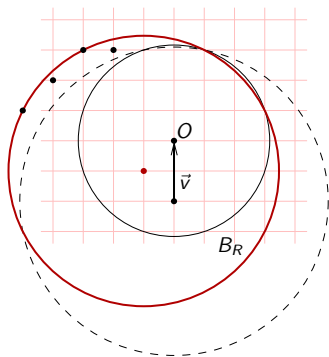


Serrure

Serrure (R, \vec{v}) : couple des boules B_R et $H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

Clef

B est une clef de la serrure $(R, \vec{v}) \Leftrightarrow B_R \subsetneq B \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

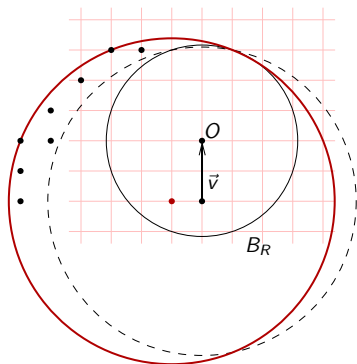


Serrure

Serrure (R, \vec{v}) : couple des boules B_R et $H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

Clef

B est une clef de la serrure $(R, \vec{v}) \Leftrightarrow B_R \subsetneq B \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

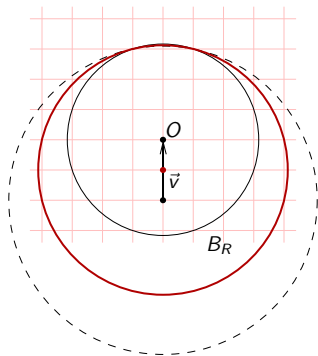


Serrure

Serrure (R, \vec{v}) : couple des boules B_R et $H_{O-\vec{v}}(B_R)$.

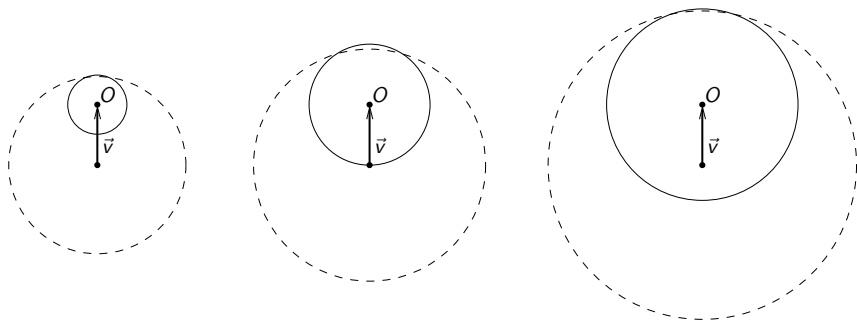
Clef

B est une clef de la serrure $(R, \vec{v}) \Leftrightarrow B_R \subsetneq B \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B_R)$.



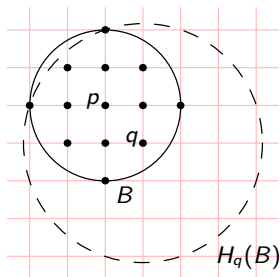
Caractérisation du rayon d'apparition

$R_{app}(\vec{v})$: le plus petit R pour lequel la serrure (R, \vec{v}) ne possède pas de clef.



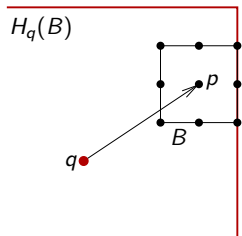
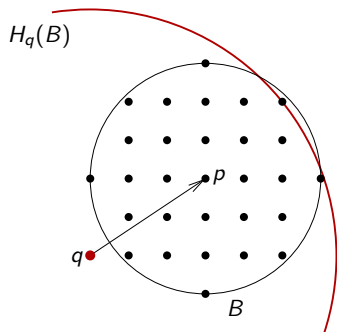
Difficulté : les inclusions de boules dans \mathbb{Z}^n

En général : pas de formule directe pour le calcul des rayons de couverture.



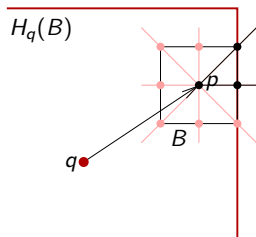
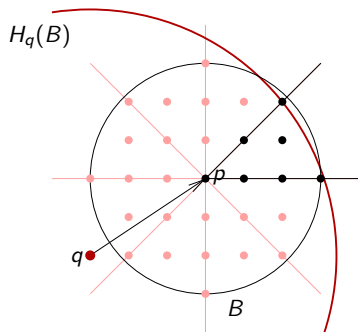
Lemme du générateur

Les inclusions de boules sont déterminées dans le générateur.



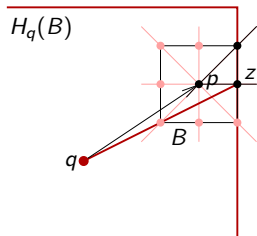
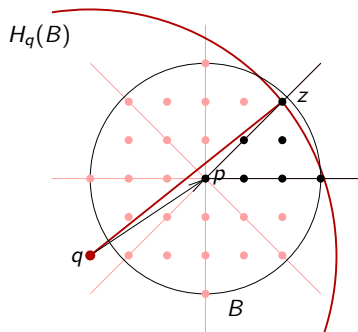
Lemme du générateur

Les inclusions de boules sont déterminées dans le générateur.



Lemme du générateur

Les inclusions de boules sont déterminées dans le générateur.

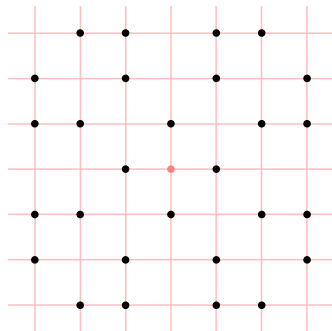


- 1 Les voisinages de test minimum $\mathcal{T}(R)$
- 2 Outils proposés
- 3 Distance euclidienne**
 - En dimension n
 - En dimension 2
- 4 Normes de chanfrein
- 5 Couverture minimum par des boules euclidiennes
- 6 Conclusion et perspectives

Points (vecteurs) visibles

\mathcal{V}^n : ensemble des points « visibles » depuis l'origine.

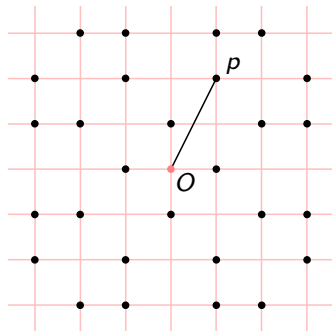
p est visible $\Leftrightarrow \text{pgcd}(p_1, \dots, p_n) = 1$.



Points (vecteurs) visibles

\mathcal{V}^n : ensemble des points « visibles » depuis l'origine.

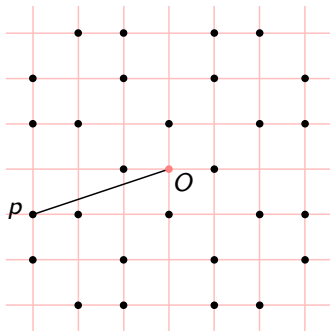
p est visible $\Leftrightarrow \text{pgcd}(p_1, \dots, p_n) = 1$.



Points (vecteurs) visibles

\mathcal{V}^n : ensemble des points « visibles » depuis l'origine.

p est visible $\Leftrightarrow \text{pgcd}(p_1, \dots, p_n) = 1$.



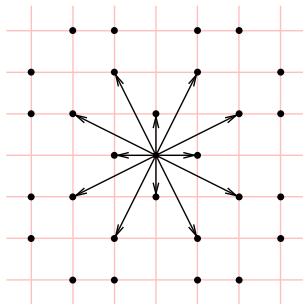
Notation

Voisinage de test infini en dim n : $\mathcal{T}^n = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{T}(R)$.

Caractérisation de \mathcal{T}^n

$$\mathcal{T}^n = \mathcal{V}^n.$$

- Tout vecteur domine ses multiples ;
- pour tout $\vec{v} \in \mathcal{V}^n$, il existe R t.q. $\vec{v} \in \mathcal{T}(R)$.



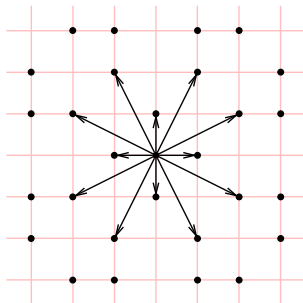
Notation

Voisinage de test infini en dim n : $\mathcal{T}^n = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{T}(R)$.

Caractérisation de \mathcal{T}^n

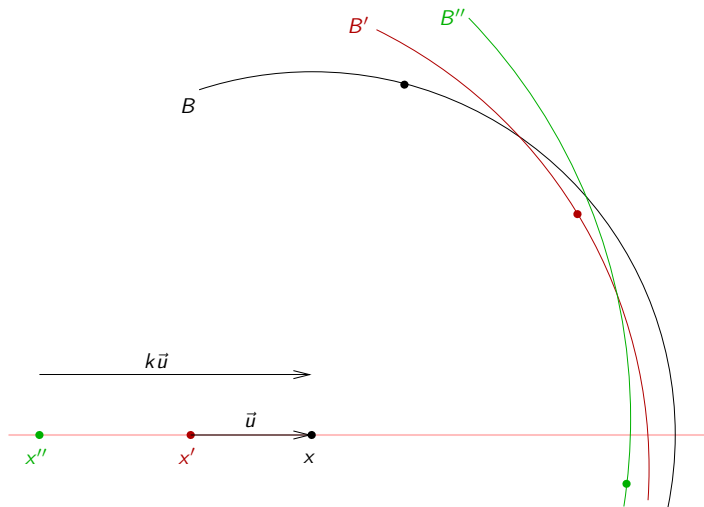
$$\mathcal{T}^n = \mathcal{V}^n.$$

- Tout vecteur domine ses multiples ;
- pour tout $\vec{v} \in \mathcal{V}^n$, il existe R t.q. $\vec{v} \in \mathcal{T}(R)$.



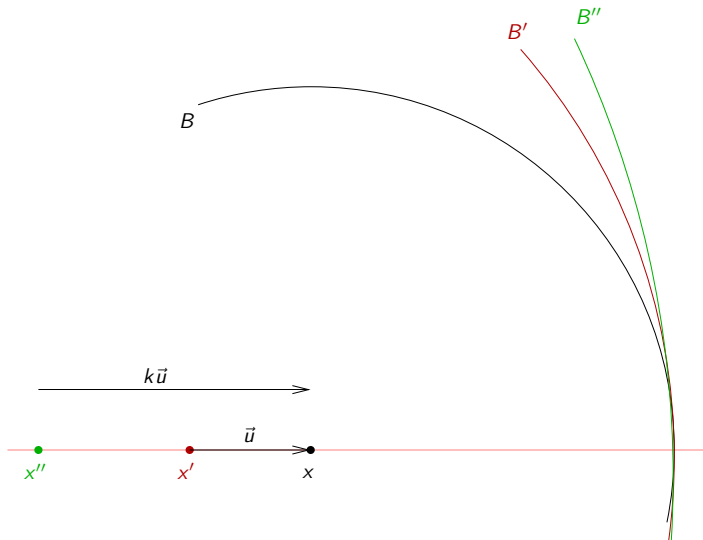
Domination sur un axe donné

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}_*, \vec{u} \succcurlyeq k\vec{u}.$$



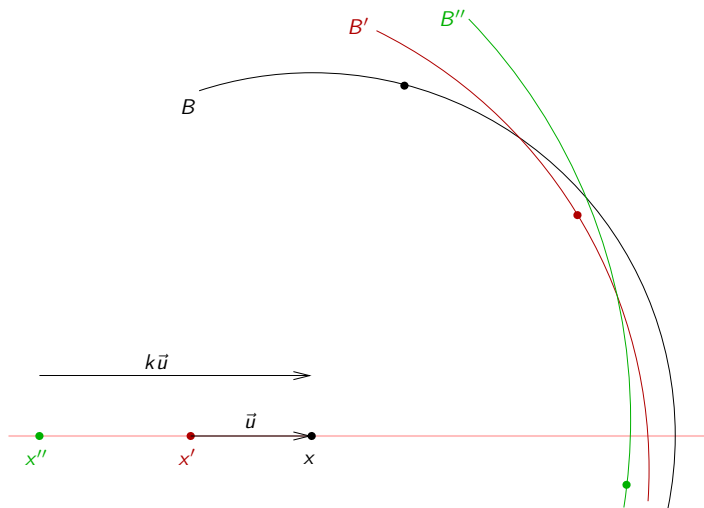
Domination sur un axe donné – cas continu –

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}_*, \vec{u} \succcurlyeq k\vec{u}.$$



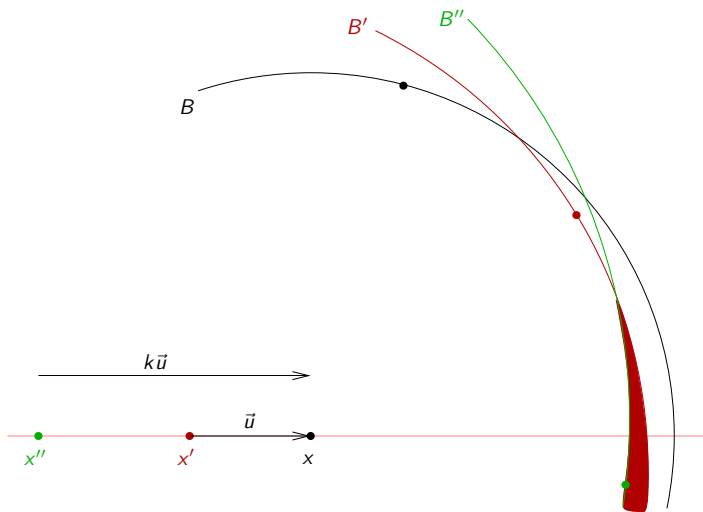
Domination sur un axe donné

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}_*, \vec{u} \succcurlyeq k\vec{u}.$$



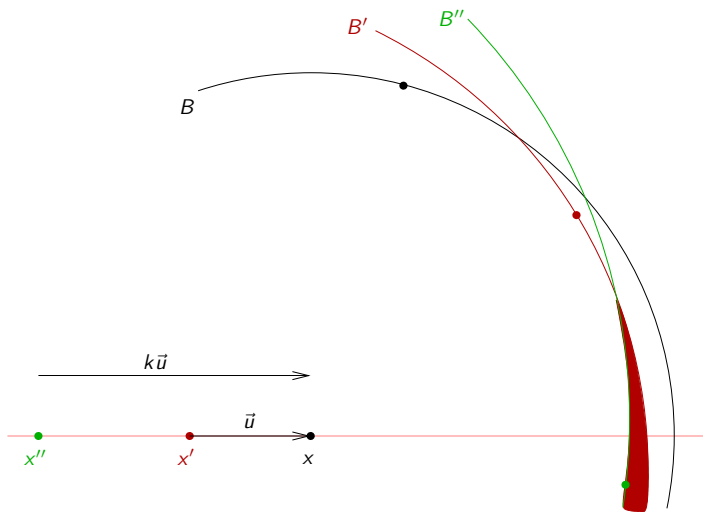
Domination sur un axe donné

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}_*, \vec{u} \succcurlyeq k\vec{u}.$$



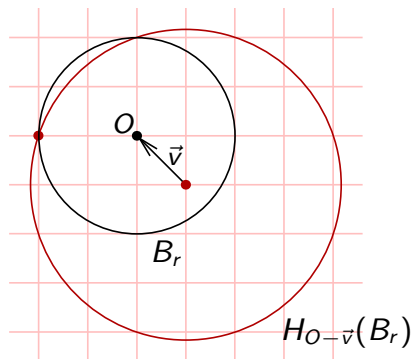
Domination sur un axe donné

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}_*, \vec{u} \succ k\vec{u} \Rightarrow \mathcal{T}^n \subseteq \mathcal{V}^n.$$



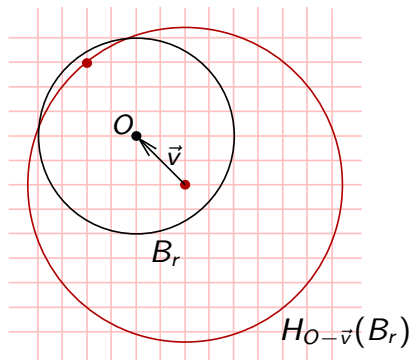
Lien entre le cas discret et le cas continu

$$r + \|\vec{v}\| - \mathcal{R}_{\vec{v}}(B_r) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$



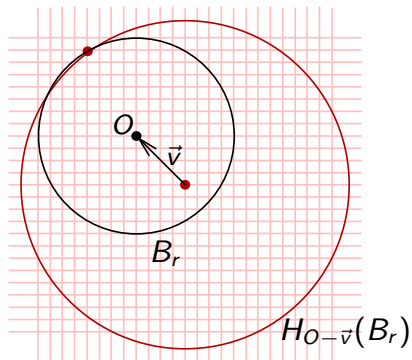
Lien entre le cas discret et le cas continu

$$r + \|\vec{v}\| - \mathcal{R}_{\vec{v}}(B_r) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$



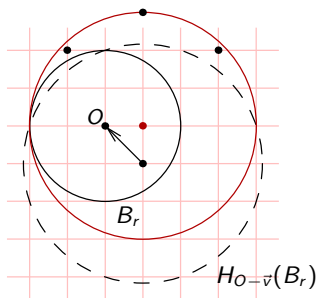
Lien entre le cas discret et le cas continu

$$r + \|\vec{v}\| - \mathcal{R}_{\vec{v}}(B_r) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$



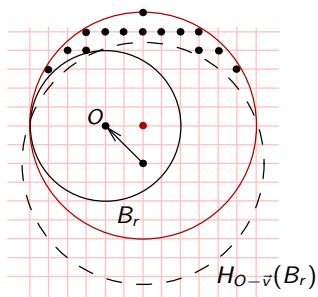
...Conséquence

Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathcal{V}^n$, il existe une serrure (R, \vec{v}) n'ayant pas de clef.



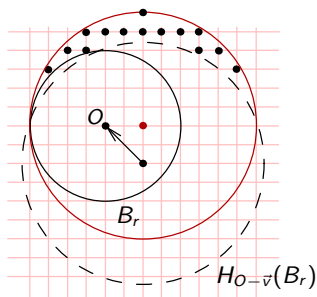
...Conséquence

Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathcal{V}^n$, il existe une serrure (R, \vec{v}) n'ayant pas de clef.



...Conséquence

Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathcal{V}^n$, il existe une serrure (R, \vec{v}) n'ayant pas de clef $\Rightarrow \mathcal{V}^n \subseteq \mathcal{T}^n$.



Fonction ζ de Riemann

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}.$$

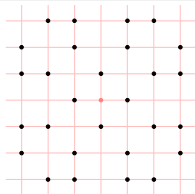
Densité des points visibles

En dimension n : $p(n) = \frac{1}{\zeta(n)}$.

$$p(2) \approx 0.61;$$

$$p(3) \approx 0.83;$$

$$p(4) \approx 0.92.$$



Suite de Farey F_k

Suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, et de dénominateur $\leq k$.

$$F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1};$$

$$F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1};$$

$$F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1};$$

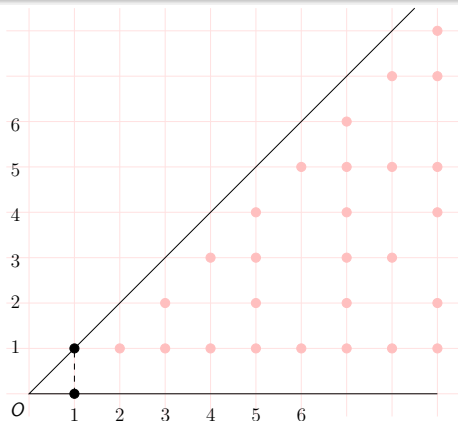
$$F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1};$$

$$F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Suite de Farey F_k

Suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, et de dénominateur $\leq k$.

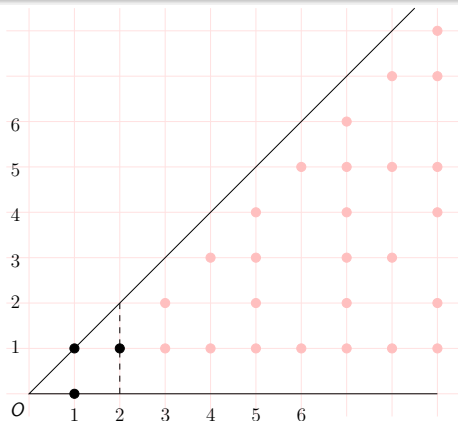
$$F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}.$$



Suite de Farey F_k

Suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, et de dénominateur $\leq k$.

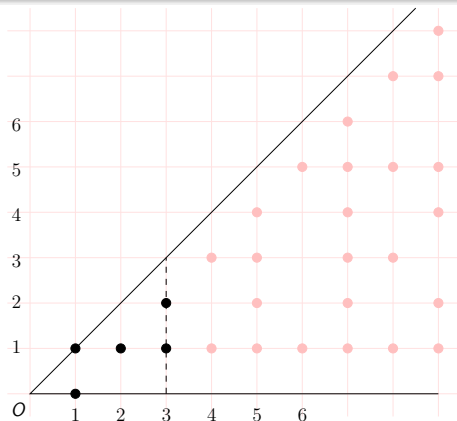
$$F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}.$$



Suite de Farey F_k

Suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, et de dénominateur $\leq k$.

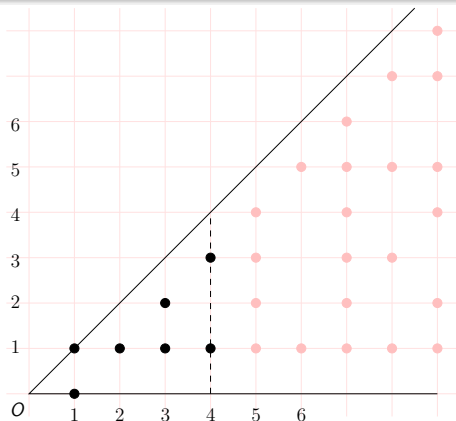
$$F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}.$$



Suite de Farey F_k

Suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, et de dénominateur $\leq k$.

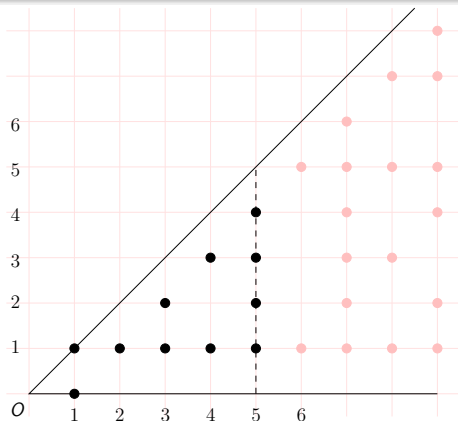
$$F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}.$$



Suite de Farey F_k

Suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, et de dénominateur $\leq k$.

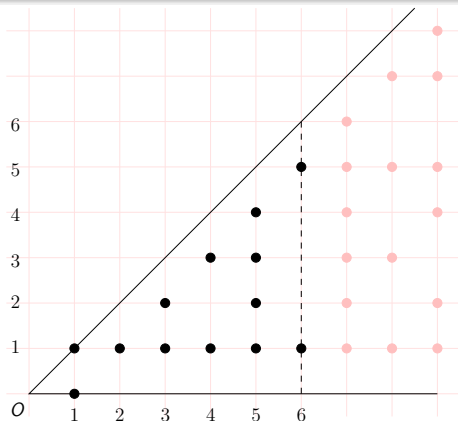
$$F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$



Suite de Farey F_k

Suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, et de dénominateur $\leq k$.

$$F_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

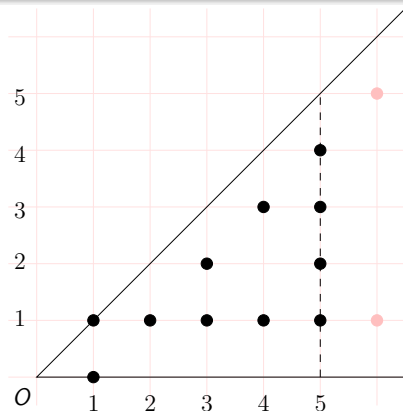


Prédécesseur et successeur

...dans une suite de Farey

$$F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

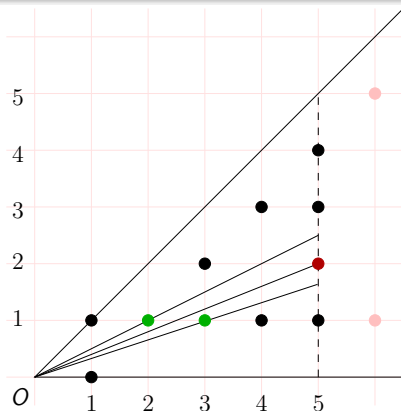


Prédécesseur et successeur

...dans une suite de Farey

$$F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

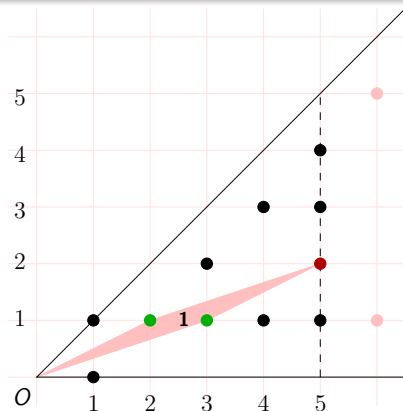


Prédécesseur et successeur

...dans une suite de Farey

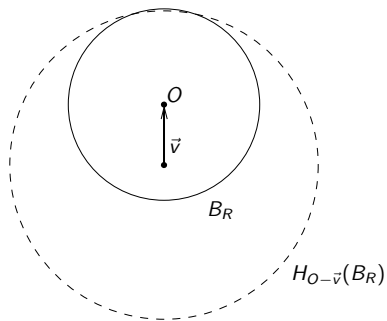
$$F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$



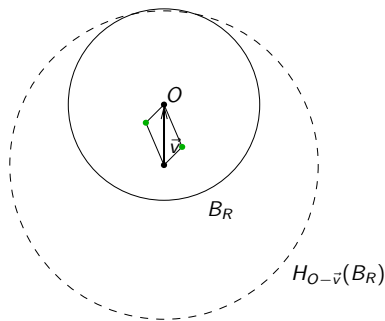
Lien avec les rayons d'apparition (\vec{v} -domination)

Il est suffisant de chercher une clef centrée en le prédécesseur et le successeur de \vec{v} .



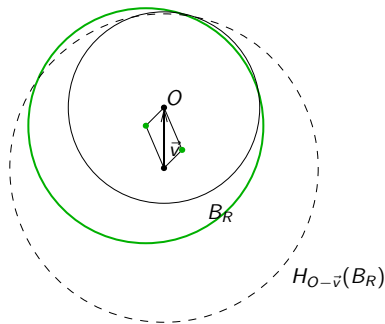
Lien avec les rayons d'apparition (\vec{v} -domination)

Il est suffisant de chercher une clef centrée en le prédécesseur et le successeur de \vec{v} .



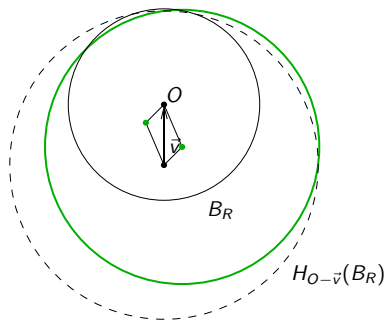
Lien avec les rayons d'apparition (\vec{v} -domination)

Il est suffisant de chercher une clef centrée en le prédécesseur et le successeur de \vec{v} .



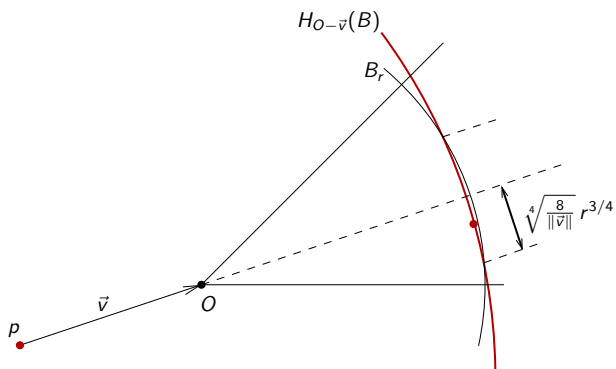
Lien avec les rayons d'apparition (\vec{v} -domination)

Il est suffisant de chercher une clef centrée en le prédécesseur et le successeur de \vec{v} .



Optimisation du calcul des rayons de couverture

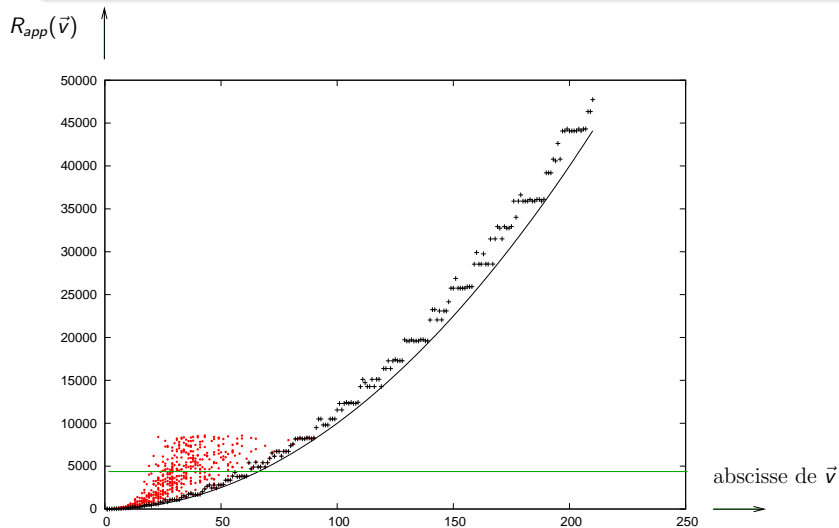
Une zone de couverture



Algorithmes

- Algorithme de calcul de $\mathcal{T}(R)$ en temps $\mathcal{O}(R^4)$ et espace $\mathcal{O}(R^2)$.
- Algorithme de calcul de $R_{app}(\vec{v})$ en temps $\mathcal{O}(R_{app}^{2.5}(\vec{v}))$ et espace $\mathcal{O}(1)$.

Expérimentations

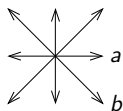


- 1 Les voisinages de test minimum $\mathcal{T}(R)$
- 2 Outils proposés
- 3 Distance euclidienne
- 4 Normes de chanfrein**
 - Définition des distances de chanfrein
 - Caractérisation des normes en dimension n
 - Masques planaires 3×3 et 5×5
- 5 Couverture minimum par des boules euclidiennes
- 6 Conclusion et perspectives

Distance de chanfrein [Montanari 68, Borgfors 84, 86]

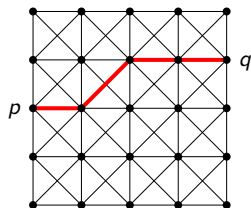
Masque de chanfrein $\mathcal{M} = \{ \vec{v}_i, w_i \}$: ensemble de pondérations

- vecteurs $\vec{v}_i \in \mathbb{Z}_*^n$;
- poids $w_i \in \mathbb{N}_*$.



b	a	b
a	O	a
b	a	b

masque $\langle a, b \rangle$ ou 3×3

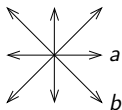


distance de chanfrein $d_{\mathcal{M}}$: distance mesurée sur le graphe pondéré induit par \mathcal{M} .

Distance de chanfrein [Montanari 68, Borgfors 84, 86]

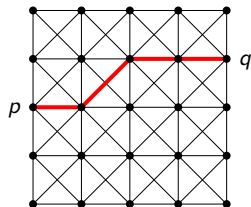
Masque de chanfrein $\mathcal{M} = \{\vec{v}_i, w_i\}$: ensemble de pondérations

- vecteurs $\vec{v}_i \in \mathbb{Z}_*^n$;
- poids $w_i \in \mathbb{N}_*$.



b	a	b
a	O	a
b	a	b

masque $\langle a, b \rangle$ ou 3×3

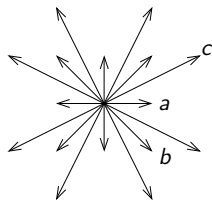


distance de chanfrein $d_{\mathcal{M}}$: distance mesurée sur le graphe pondéré induit par \mathcal{M} .

Distance de chanfrein [Montanari 68, Borgfors 84, 86]

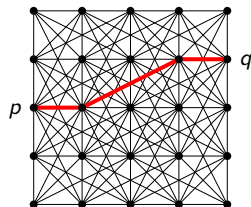
Masque de chanfrein $\mathcal{M} = \{\vec{v}_i, w_i\}$: ensemble de pondérations

- vecteurs $\vec{v}_i \in \mathbb{Z}_*^n$;
- poids $w_i \in \mathbb{N}_*$.



	c		c	
c	b	a	b	c
	a	O	a	
c	b	a	b	c
	c		c	

masque $\langle a, b, c \rangle$ ou 5×5



distance de chanfrein $d_{\mathcal{M}}$: distance mesurée sur le graphe pondéré induit par \mathcal{M} .

Normes de chanfrein

- homogénéité ;
- propriétés géométriques des boules ;
- propriétés arithmétiques pour le calcul des distances.

Boule rationnelle d'un masque de chanfrein

$$B_{\mathcal{M}} = \text{conv} \left\{ O + \frac{\vec{v}_i}{w_i} : (\vec{v}_i, w_i) \in \mathcal{M} \right\}.$$

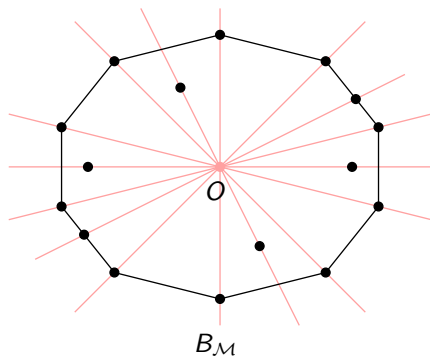
		14				
15		7	6	7	11	15
		6	0	6		
15	11	7	6	7		15
				14		

 \mathcal{M}

Boule rationnelle d'un masque de chanfrein

$$B_{\mathcal{M}} = \text{conv} \left\{ O + \frac{\vec{v}_i}{w_i} : (\vec{v}_i, w_i) \in \mathcal{M} \right\}.$$

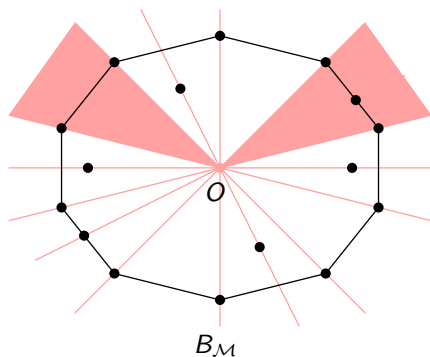
		14				
15		7	6	7	11	15
		6	O	6		
15	11	7	6	7		15
				14		

 \mathcal{M} 

Boule rationnelle d'un masque de chanfrein

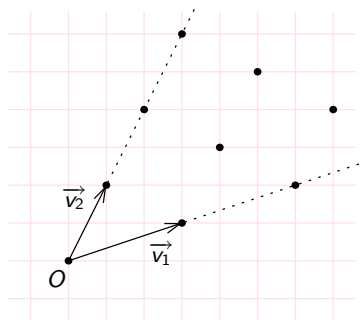
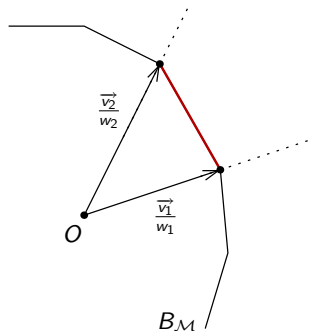
$$B_{\mathcal{M}} = \text{conv} \left\{ O + \frac{\vec{v}_i}{w_i} : (\vec{v}_i, w_i) \in \mathcal{M} \right\}.$$

		14				
15		7	6	7	11	15
		6	O	6		
15	11	7	6	7		15
				14		

 \mathcal{M} 

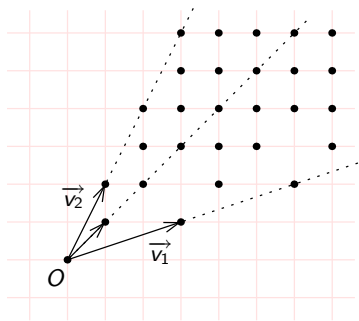
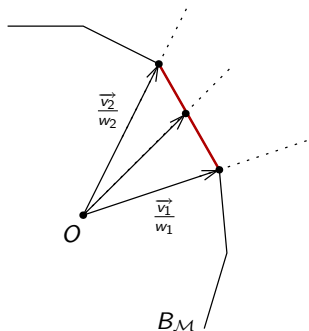
Condition de norme [Rémy, Thiel]

\mathcal{M} induit une norme \Leftrightarrow chaque cône d'influence de $B_{\mathcal{M}}$ possède une décomposition (dans \mathcal{M}) en sous-cônes unimodulaires.



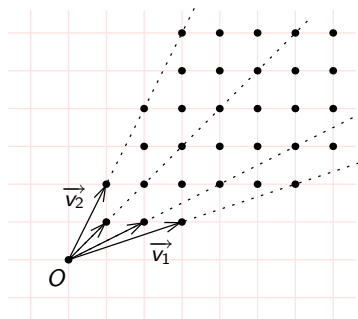
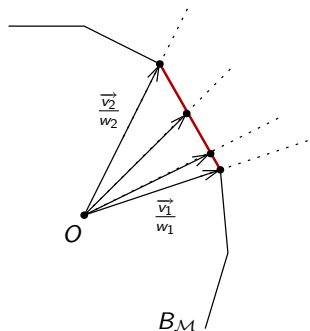
Condition de norme [Rémy, Thiel]

\mathcal{M} induit une norme \Leftrightarrow chaque cône d'influence de $B_{\mathcal{M}}$ possède une décomposition (dans \mathcal{M}) en sous-cônes unimodulaires.



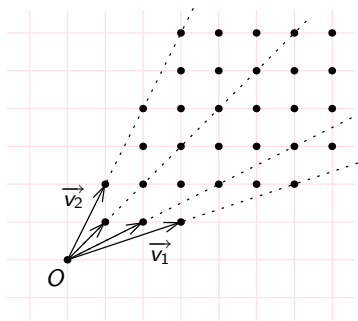
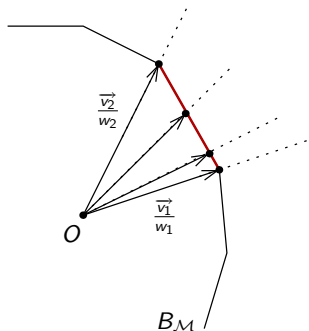
Condition de norme [Rémy, Thiel]

\mathcal{M} induit une norme \Leftrightarrow chaque cône d'influence de $B_{\mathcal{M}}$ possède une décomposition (dans \mathcal{M}) en sous-cônes unimodulaires.

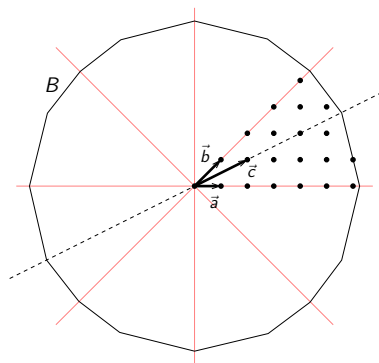


Réciproque

\mathcal{M} induit une norme \Rightarrow chaque cône d'influence de $B_{\mathcal{M}}$ possède une décomposition (dans \mathcal{M}) en sous-cônes unimodulaires.



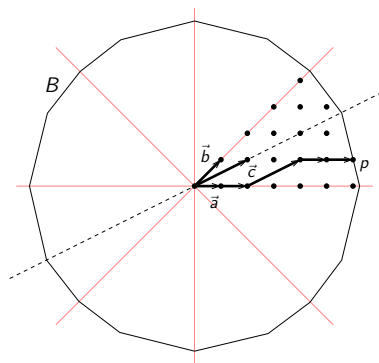
Entier représentable

$$t \in \mathbb{N} \text{ est } (a_1, \dots, a_k)\text{-représentable} \Leftrightarrow t \in a_1\mathbb{N} + \dots + a_k\mathbb{N}.$$


$$a = 8 \ ; \ b = 11 \ ; \ c = 18$$

								88
							77	84
B						66	73	80
					55	62	69	76
				44	51	58	65	72
			33	40	47	54	62	70
		22	29	36	44	52	60	68
	11	18	26	34	42	50	58	66
O	8	16	24	32	40	48	56	64

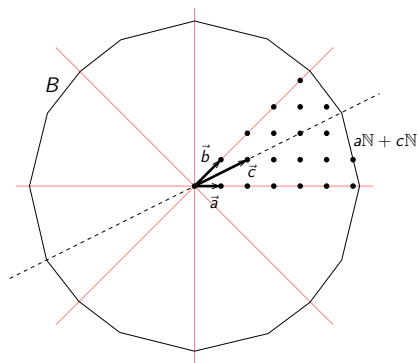
Entier représentable

$$t \in \mathbb{N} \text{ est } (a_1, \dots, a_k)\text{-représentable} \Leftrightarrow t \in a_1\mathbb{N} + \dots + a_k\mathbb{N}.$$


$$a = 8 \ ; \ b = 11 \ ; \ c = 18$$

							88
						77	84
B					66	73	80
				55	62	69	76
			44	51	58	65	72
		33	40	47	54	62	70
		22	29	36	44	52	60
	11	18	26	34	42	50	58
O	8	16	24	32	40	48	56

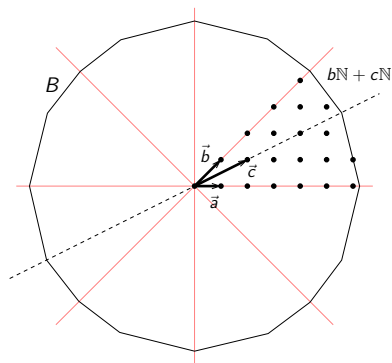
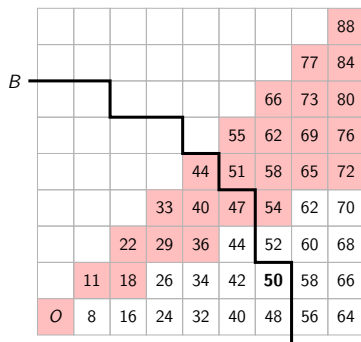
Entier représentable

$$t \in \mathbb{N} \text{ est } (a_1, \dots, a_k)\text{-représentable} \Leftrightarrow t \in a_1\mathbb{N} + \dots + a_k\mathbb{N}.$$


$$a = 8 ; b = 11 ; c = 18$$

							88	
						77	84	
B					66	73	80	
				55	62	69	76	
			44	51	58	65	72	
		33	40	47	54	62	70	
		22	29	36	44	52	60	68
	11	18	26	34	42	50	58	66
O	8	16	24	32	40	48	56	64

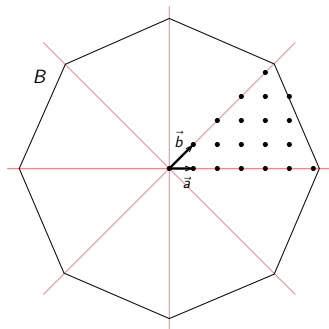
Entier représentable

$$t \in \mathbb{N} \text{ est } (a_1, \dots, a_k)\text{-représentable} \Leftrightarrow t \in a_1\mathbb{N} + \dots + a_k\mathbb{N}.$$

 $a = 8 ; b = 11 ; c = 18$


Conditions de norme pour un masque $\langle a, b \rangle$:

- $a \leq b$;
- $b \leq 2a$.

b	a	b
a	O	a
b	a	b



Vecteurs \vec{a} et \vec{b}

$$R_{app}(\vec{a}) = a \quad \text{et} \quad R_{app}(\vec{b}) = b.$$

$2b$	$a+b$	$2a$	$a+b$	$2b$
$a+b$	b	a	b	$a+b$
$2a$	a	O	a	$2a$
$a+b$	b	a	b	$a+b$
$2b$	$a+b$	$2a$	$a+b$	$2b$

 B_a

$2b$	$a+b$	$2a$	$a+b$	$2b$
$a+b$	b	a	b	$a+b$
$2a$	a	O	a	$2a$
$a+b$	b	a	b	$a+b$
$2b$	$a+b$	$2a$	$a+b$	$2b$

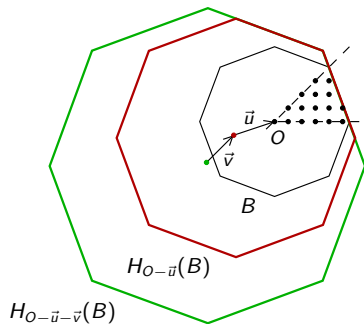
 B_b

Relations de domination

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in G(\mathbb{Z}^2)$, on a $\vec{u} \succ \vec{u} + \vec{v}$.

Conséquence

$$\mathcal{T} = \{\vec{a}, \vec{b}\}.$$

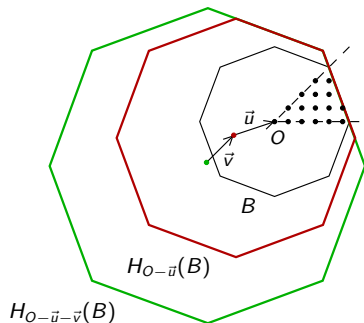


Relations de domination

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in G(\mathbb{Z}^2)$, on a $\vec{u} \succ \vec{u} + \vec{v}$.

Conséquence

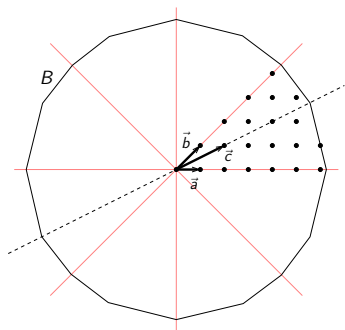
$$\mathcal{T} = \{\vec{a}, \vec{b}\}.$$



Conditions de norme pour un masque $\langle a, b, c \rangle$:

- $2a \leq c$;
- $3b \leq 2c$;
- $c < a + b$.

	c		c	
c	b	a	b	c
	a	O	a	
c	b	a	b	c
	c		c	



Vecteurs \vec{a} et \vec{b}

$$R_{app}(\vec{a}) = a \quad \text{et} \quad R_{app}(\vec{b}) = b.$$

$2b$	c	$2a$	c	$2b$
c	b	a	b	c
$2a$	a	O	a	$2a$
c	b	a	b	c
$2b$	c	$2a$	c	$2b$

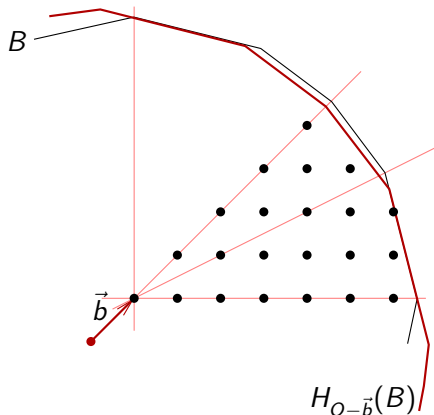
 B_a

$2b$	c	$2a$	c	$2b$
c	b	a	b	c
$2a$	a	O	a	$2a$
c	b	a	b	c
$2b$	c	$2a$	c	$2b$

 B_b

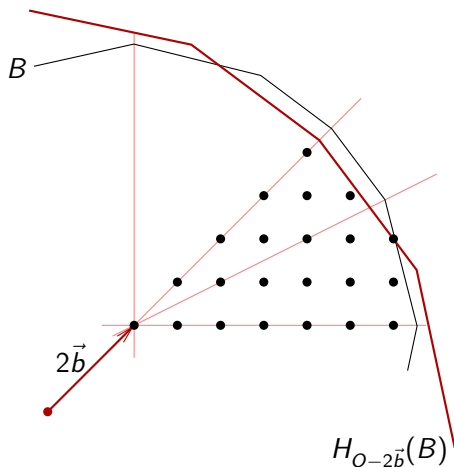
Domination selon $\vec{a}\mathbb{N}$ et $\vec{b}\mathbb{N}$

Pour tout entier $k \geq 2$, $\vec{a} \succ k\vec{a}$ et $\vec{b} \succ k\vec{b}$.



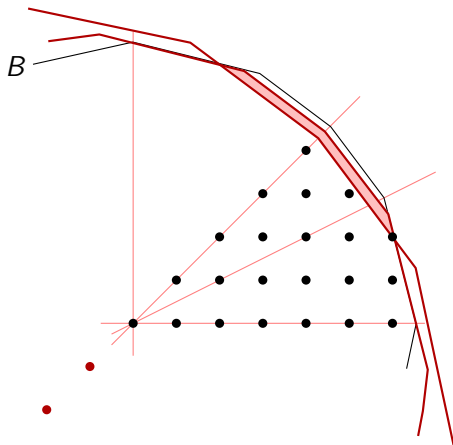
Domination selon $\vec{a}\mathbb{N}$ et $\vec{b}\mathbb{N}$

Pour tout entier $k \geq 2$, $\vec{a} \succ k\vec{a}$ et $\vec{b} \succ k\vec{b}$.



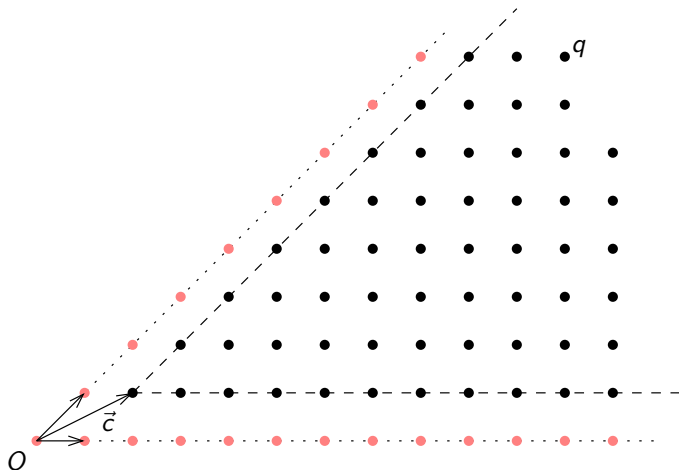
Domination selon $\vec{a}\mathbb{N}$ et $\vec{b}\mathbb{N}$

Pour tout entier $k \geq 2$, $\vec{a} \succ k\vec{a}$ et $\vec{b} \succ k\vec{b}$.



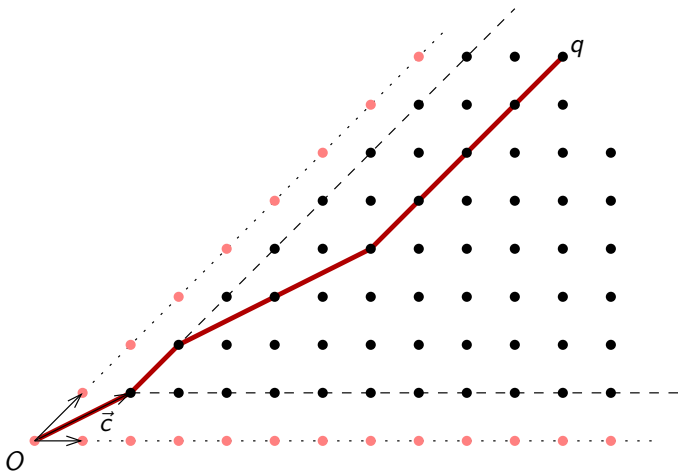
Domination par « ajout » de \vec{c}

Pour tout $\vec{v} \in G(\mathbb{Z}^2)$, $\vec{v} \succ \vec{v} + \vec{c}$.



Domination par « ajout » de \vec{c}

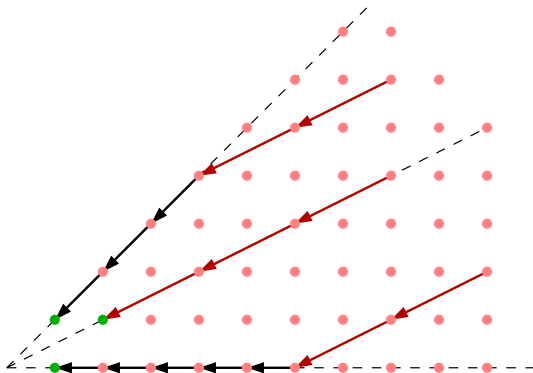
Pour tout $\vec{v} \in G(\mathbb{Z}^2)$, $\vec{v} \succ \vec{v} + \vec{c}$.



Transitivité des relations de domination

- $\vec{a} \succ k\vec{a}$ et $\vec{b} \succ k\vec{b}$;
- $\vec{v} \succ \vec{v} + \vec{c}$.

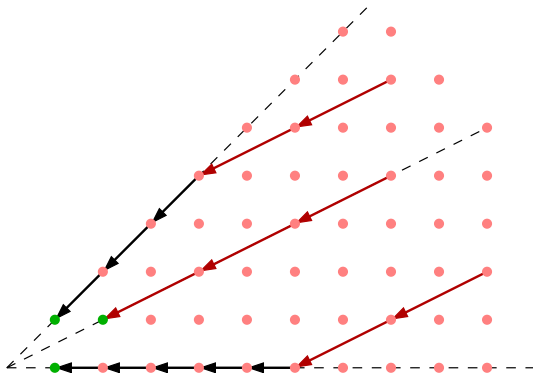
$$\Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}.$$



Transitivité des relations de domination

- $\vec{a} \succ k\vec{a}$ et $\vec{b} \succ k\vec{b}$;
- $\vec{v} \succ \vec{v} + \vec{c}$.

$$\Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}.$$



Un critère d'apparition de \vec{c}

$$\vec{c} \in \mathcal{T} \quad \Leftrightarrow \quad \text{pgcd}(a, c) + \text{pgcd}(b, c) \leq 2(a + b - c).$$

Nombre de Frobenius

$g(a_1, \dots, a_k)$: le plus grand entier non (a_1, \dots, a_k) -représentable.

Théorème de Sylvester (1884)

$$g(x, y) = xy - x - y.$$

Exemple : money exchange

$$(3\mathbb{N} + 5\mathbb{N}) = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}.$$

$$g(3, 5) = 7.$$

Borne pour $R_{app}(\vec{c})$

$$R_{app}(\vec{c}) \leq \max\{g(a, c), g(b, c)\} < bc.$$

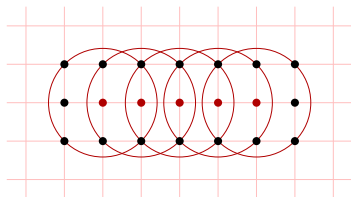
Calcul de $R_{app}(\vec{c})$

Algorithme de calcul de $R_{app}(\vec{c})$ en $\mathcal{O}(bc)$.

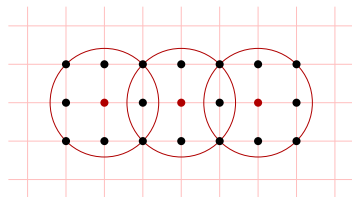
- 1 Les voisinages de test minimum $\mathcal{T}(R)$
- 2 Outils proposés
- 3 Distance euclidienne
- 4 Normes de chanfrein
- 5 Couverture minimum par des boules euclidiennes**
 - État de l'art
 - NP-difficulté
- 6 Conclusion et perspectives

Problème de couverture minimum d'une forme

Étant donné une forme \mathcal{S} et une famille \mathcal{F} de formes, trouver une sous-famille de \mathcal{F} de cardinalité minimum dont l'union est \mathcal{S} .



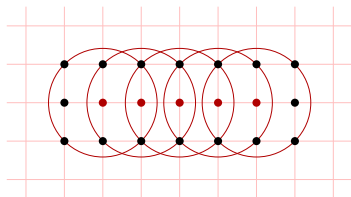
axe médian



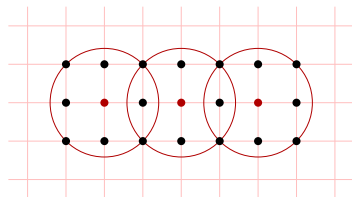
une couverture minimum

Problème de couverture minimum d'une forme

Étant donné une forme \mathcal{S} et une famille \mathcal{F} de formes, trouver une sous-famille de \mathcal{F} de cardinalité minimum dont l'union est \mathcal{S} .



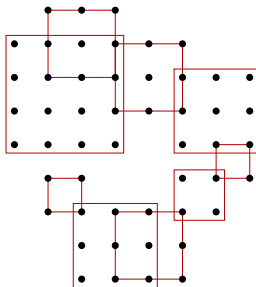
axe médian



une couverture minimum

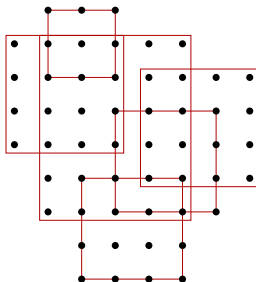
couvrir avec des carrés

NP-difficile [Aupperle *et al.* 88]



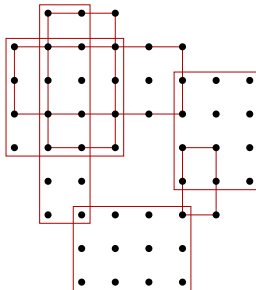
couvrir avec des carrés

Algorithme linéaire [Bar-Yehuda et Ben-Chanoh 96]



couvrir avec des rectangles

NP-difficile [Culberson et Reckhow 94]

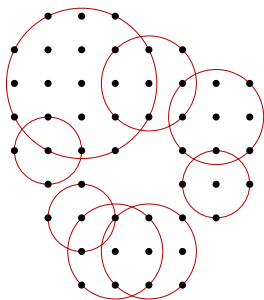


Problème de couverture minimum pour d_e

Étant donné une forme \mathcal{S} , trouver un ensemble de boules euclidiennes dont l'union est \mathcal{S} , de cardinalité minimum.

Ce problème est NP-difficile.

Preuve par réduction de Planar-4 3-SAT.

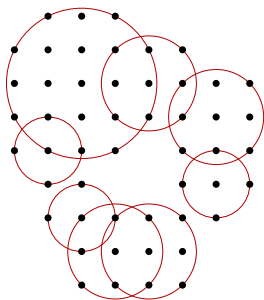


Problème de couverture minimum pour d_e

Étant donné une forme \mathcal{S} , trouver un ensemble de boules euclidiennes dont l'union est \mathcal{S} , de cardinalité minimum.

Ce problème est NP-difficile.

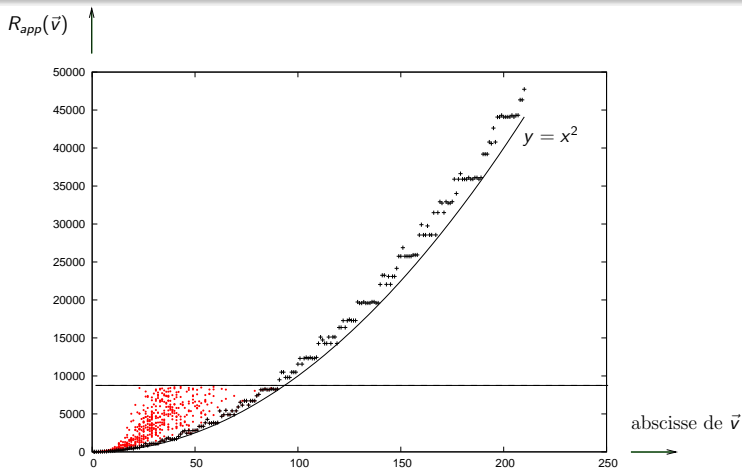
Preuve par réduction de Planar-4 3-SAT.



- 1 Les voisinages de test minimum $\mathcal{T}(R)$
- 2 Outils proposés
- 3 Distance euclidienne
- 4 Normes de chanfrein
- 5 Couverture minimum par des boules euclidiennes
- 6 Conclusion et perspectives**

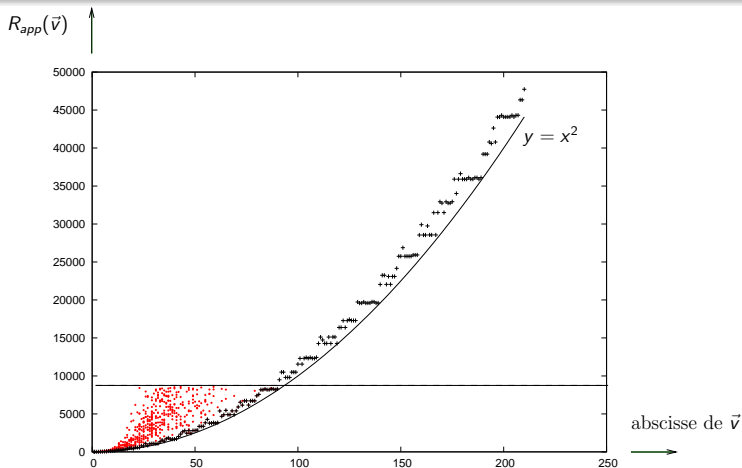
Rayons d'apparition euclidiens

- Borne sur les rayons d'apparition : $R_{app}(\vec{v}) \geq v_1^2$?
- Observation : $\vec{v} \in \mathcal{T}(R) \Rightarrow \text{pred}(\vec{v})$ ou $\text{succ}(\vec{v}) \in \mathcal{T}(R)$;
- relations de \vec{v} -domination en dimension ≥ 3 .



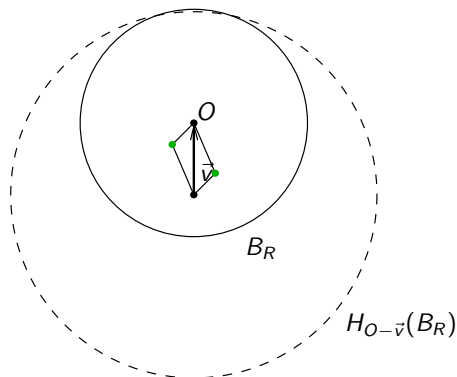
Rayons d'apparition euclidiens

- Borne sur les rayons d'apparition : $R_{app}(\vec{v}) \geq v_1^2$?
- Observation : $\vec{v} \in \mathcal{T}(R) \Rightarrow \text{pred}(\vec{v})$ ou $\text{succ}(\vec{v}) \in \mathcal{T}(R)$;
- relations de \vec{v} -domination en dimension ≥ 3 .



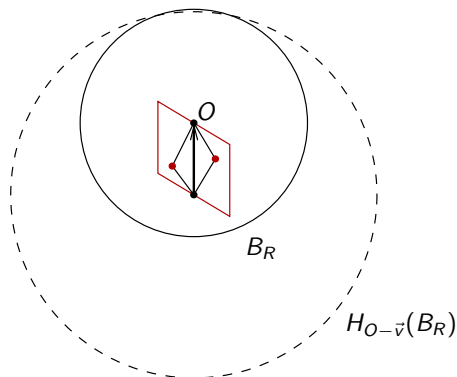
Rayons d'apparition euclidiens

- Borne sur les rayons d'apparition : $R_{app}(\vec{v}) \geq v_1^2$?
- Observation : $\vec{v} \in \mathcal{T}(R) \Rightarrow \text{pred}(\vec{v})$ ou $\text{succ}(\vec{v}) \in \mathcal{T}(R)$;
- relations de \vec{v} -domination en dimension ≥ 3 .



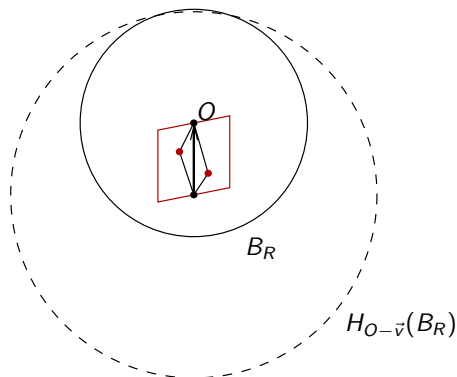
Rayons d'apparition euclidiens

- Borne sur les rayons d'apparition : $R_{app}(\vec{v}) \geq v_1^2$?
- Observation : $\vec{v} \in \mathcal{T}(R) \Rightarrow \text{pred}(\vec{v})$ ou $\text{succ}(\vec{v}) \in \mathcal{T}(R)$;
- relations de \vec{v} -domination en dimension ≥ 3 .



Rayons d'apparition euclidiens

- Borne sur les rayons d'apparition : $R_{app}(\vec{v}) \geq v_1^2$?
- Observation : $\vec{v} \in \mathcal{T}(R) \Rightarrow \text{pred}(\vec{v})$ ou $\text{succ}(\vec{v}) \in \mathcal{T}(R)$;
- relations de \vec{v} -domination en dimension ≥ 3 .



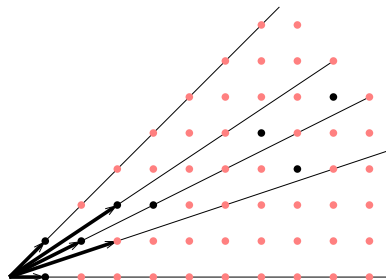
Calcul de $\mathcal{T}(R)$ pour masques de normes $\geq 7 \times 7$

- Relations de domination ;
- Critères arithmétiques pour l'apparition de vecteurs ?

Masque 7×7

	e	d		d	e	
e		c		c		e
d	c	b	a	b	c	d
		a	O	a		
d	c	b	a	b	c	d
e		c		c		e
	e	d		d	e	

Exemple de voisinage de test



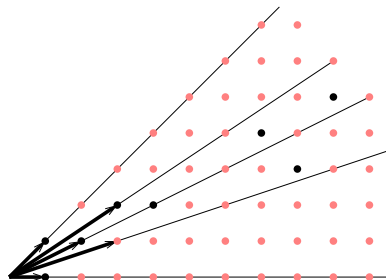
Calcul de $\mathcal{T}(R)$ pour masques de normes $\geq 7 \times 7$

- Relations de domination ;
- Critères arithmétiques pour l'apparition de vecteurs ?

Masque 7×7

	e	d		d	e	
e		c		c		e
d	c	b	a	b	c	d
		a	O	a		
d	c	b	a	b	c	d
e		c		c		e
	e	d		d	e	

Exemple de voisinage de test



Cas général des distances de chanfrein

Calcul de $\mathcal{T}(R)$ pour les non-normes

⇒ étude des propriétés des boules pour les non-normes.

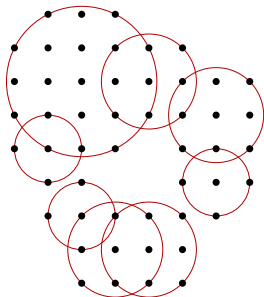
Cas général des distances de chanfrein

Calcul de $\mathcal{T}(R)$ pour les non-normes

⇒ étude des propriétés des boules pour les non-normes.

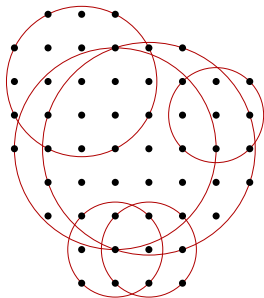
Couverture minimum

- Algorithme d'approximation ;
- cas sans trou.



Couverture minimum

- Algorithme d'approximation ;
- cas sans trou.



Distance euclidienne

- Borne sur les rayons d'apparition ;
- relations de \vec{v} -domination en dimension ≥ 3 .

Normes de chanfrein

$\mathcal{T}(R)$ pour masques 7×7 et en dimension 3 :

- relations de domination ;
- critères arithmétiques pour l'apparition de vecteurs.

Distances de chanfrein

- Calcul de $\mathcal{T}(R)$;
- propriétés des boules de non-norme.

Couverture minimum pour d_e

- Algorithme d'approximation ;
- algorithme polynomial dans le cas sans trou ?