TD 05 – Révisions

Exercice 1. *Définitions*

1. Rappeler les sept éléments qui constituent une machine de Turing.
2. Pour une machine de Turing M, que signifie $L(M)$?
3. Pour une machine de Turing M et un mot w, que signifie $M(w) \uparrow$?
4. Qu'est-ce qu'un langage non décidable ?
5. Qu'est-ce qu'un langage non semi-décidable ?
6. Donner la définition de $L_1 \leq_m^T L_2$ avec $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ et $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$.
7. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux, en justifiant.
   (a) La famille des langages décidables est close par complémentation.
   (b) La famille des langages semi-décidables est close par complémentation.

Exercice 2. *Machines de Turing*

Donner l'automate d'une machine de Turing qui <u>décide</u> chacun des langages suivants.

1. $L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \exists w' \in \{b\}^* : w = aaw'cc$ et $|w'| \equiv 1 \mod 2\}$
2. $L_2 = \{w \in \{a\}^* \mid \exists k \in \mathbb{N} : |w| = 2^k\}$
3. $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w_1w_2 \dots w_k$ et $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k-2 : w_iw_{i+1}w_{i+2} \neq aab\}$

Exercice 3. *Réductions*

<u>Rappels :</u>

— $L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid w \in L(M)\}$.
— $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid w \notin L(M)\}$.
— $L_{halt\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête sur l'entrée $\epsilon\}$, avec ϵ le mot vide.
— $L_{\overline{halt\epsilon}} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \uparrow\}$, avec ϵ le mot vide.

1. Pour chacun de ces quatre langages, indiquer s'il est :
   ☐ décidable ☐ non décidable ☐ semi-décidable ☐ non semi-décidable
2. Soit $L_1 = \{\langle M \rangle \mid M(aab) \uparrow\}$, démontrer que $L_{\overline{halt\epsilon}} \leq_m^T L_1$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit $L_2 = \{\langle M \rangle \# w \mid waaab \in L(M)\}$, démontrer que $L_u \leq_m^T L_2$. Que peut-on en déduire ?
4. Soit $L_3 = \{\langle M \rangle \# w \mid aw \in L(M)$ et $bw \notin L(M)\}$. Conjecturez-vous que le langage L_3 est décidable ou non ? semi-décidable ou non ? Proposer une réduction pour le démontrer.

Exercice 4. *Exercice 2 du DM*

<u>Rappel :</u> le langage $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid w \notin L(M)\}$ n'est pas semi-décidable.

1. Est-ce que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L^- = \{\langle M \rangle \mid aaa \notin L(M)$ et $aab \notin L(M)\}$?
   Si oui, proposer une telle réduction. Justifier.
2. Est-ce que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L^+ = \{\langle M \rangle \mid bab \in L(M)$ et $bba \in L(M)\}$?
   Si oui, proposer une telle réduction. Justifier.