TD 03 – Propriétés de clôture des langages (semi-)décidables

Exercice 1. *Propriétés de clôture ?*

Démontrer ou réfuter chacune des propriétés de clôture suivantes.
Indication : 5 sont correctes et 4 sont incorrectes.

1. Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est décidable si et seulement si L et $\Sigma^* \setminus L$ sont semi-décidables.
2. La famille des langages décidables est close par intersection et union.
3. La famille des langages semi-décidables est close par intersection et union.
4. La famille des langages non décidables est close par intersection et union.
5. La famille des langages non semi-décidables est close par intersection et union.
6. La famille des langages décidables est close par complémentation.
7. La famille des langages semi-décidables est close par complémentation.
8. La famille des langages non décidables est close par complémentation.
9. La famille des langages non semi-décidables est close par complémentation.

Exercice 2. *M' simule M*

Soit $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 0 \mod 3\}$.

1. Donner une machine de Turing M avec alphabet d'entrée $\Sigma = \{a, b\}$, telle que $L(M) = L_3$.
2. Est-ce que M permet de démontrer que L_3 est semi-décidable ? décidable ?
3. Construire une machine de Turing M' avec alphabet d'entrée Σ qui, pour toute entrée $w \in \Sigma^*$, simule M sur l'entrée aaw.
4. Quel est le langage reconnu par M' ?
5. À partir de M, construire si possible une machine $\overline{M}$ telle que $L(\overline{M}) = \Sigma^* \setminus L_3$.

Soient $\Sigma' = \{a, c\}$ et $w \in \Sigma'^*$, on note $\varphi(w)$ le mot obtenu à partir de w en remplaçant tous les c par des b. Formellement, $\varphi : \Sigma'^* \to \Sigma^*$ est l'homomorphisme défini inductivement par $\varphi(\epsilon) = \epsilon$ et $\varphi(a) = a$ et $\varphi(c) = b$ et, pour tous $w, x \in \Sigma'^*$ tels que $|wx| > 1$, $\varphi(wx) = \varphi(w)\varphi(x)$.

6. Construire une machine de Turing M'' avec alphabet d'entrée Σ' qui, pour toute entrée $w \in \Sigma'^*$, simule M sur l'entrée $\phi(w)$.

Exercice 3. *$\langle M \rangle$*

Donner le code $\langle M \rangle$ de la machine de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$, d'ensemble d'états $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabets $\Sigma = \{0, 1\}$ et $\Gamma = \{0, 1, B\}$, et dont la fonction de transition est donnée par :

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 1, R)$	$-$	$-$
q_1	$-$	$(q_1, 0, R)$	(q_F, B, L)

Exercice 4. *L'arrêt*

Indiquer si chacun des énoncés qui suit est vrai ou faux, en justifiant.

1. $\nexists M_{halt}, \forall M, \forall w : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.
2. $\forall M, \forall w, \nexists M_{halt} : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.

Exercice 5. *M_3 simule M_1 puis M_2*

Soit $L_{\texttt{pal}}$ l'ensemble des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$ (mots qui se lisent identiquement de gauche à droite, et de droite à gauche ; par exemple $abba$ et $abaabbabaabbbaababbaaba$).

Soit $L'_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 2 \mod 3\}$.

1. Donner une machine de Turing M_1 avec alphabet d'entrée Σ, telle que $L(M_1) = L_{\texttt{pal}}$.
2. Donner une machine de Turing M_2 avec alphabet d'entrée Σ, telle que $L(M_2) = L'_3$.
3. Construire une machine de Turing M_3 avec alphabet d'entrée Σ qui, pour toute entrée $w \in \Sigma^*$, simule M_1 sur l'entrée w, puis simule M_2 sur l'entrée w, et accepte si et seulement si les deux calculs simulés acceptent, c'est-à-dire si et seulement si $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$.