TD 05 – Théorème de Rice – Pavages

Exercice 1. *Théorème de Rice*

Utiliser le théorème de Rice pour étudier la décidabilité des propriétés suivantes.

1. $P_1 = \{a^*, ba^*, b + a^*\}$.
2. $P_2 = \{L \mid aa \in L$, et $\forall k \neq 2 : a^k \notin L\}$.
3. $P_3 = \{L \mid ab \notin L$, ou $\exists k : ab^k \in L\}$.
4. $P_4 = \{\{\langle M \rangle \mid M$ n'accepte pas $\langle M \rangle\}\}$.
5. $P_5 = \{\{\langle M \rangle \mid M$ accepte $\langle M \rangle\}\}$.
6. Plus généralement, si L est semi-décidable, que peut-on dire de la propriété $P = \{L\}$?

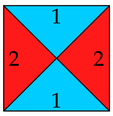
Exercice 2. *Des puzzles... indécidables !*

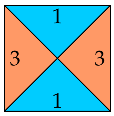
Dans cet exercice nous allons démontrer que le problème suivant est indécidable :

PAVABILITÉ-DÉPART (pavabilité du plan avec tuile de départ)
Entrée : un jeu de tuiles T, et une tuile de départ $t_0 \in T$.
Question : existe-t-il un T-pavage τ avec $\tau(0,0) = t_0$?

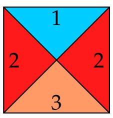
Une *tuile* t est un carré de taille 1×1 dont chacun des quatre côtés comporte une couleur représentée par un entier ; c'est-à-dire $t = (t_n, t_e, t_s, t_o) \in \mathbb{N}^4$ donne les couleurs sur les côtés nord t_n, est t_e, sud t_s et ouest t_o. Un *jeu de tuiles* T est un ensemble fini de tuiles (qui utilisent donc un nombre fini de couleurs). Un T-pavage $\tau : \mathbb{Z}^2 \to T$ associe à chaque case de l'espace en deux dimensions $\mathbb{Z}^2$, une tuile de T, de façon à ce que deux tuiles adjacentes aient la même couleur sur leur côté en commun (par exemple si $\tau(0,0) = t$ et $\tau(1,0) = t'$ avec $t = (t_n, t_e, t_s, t_o)$ et $t' = (t'_n, t'_e, t'_s, t'_o)$ alors on doit avoir $t_e = t'_o$).
Important : d'après la définition on a autant de copies que l'on veut de chaque tuile, mais on ne peut pas tourner les tuiles.

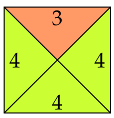
1. Quels U-pavages peut-on former avec le jeu de tuiles $U = \{u_0, u_1\}$, où :

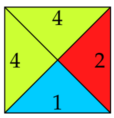
$u_0 =$ 

et $u_1 =$ 

2. L'instance U, u_0 est-elle positive ou négative ?
3. Soit $V = \{v_0, v_1, v_2\}$ un jeu de tuiles, avec

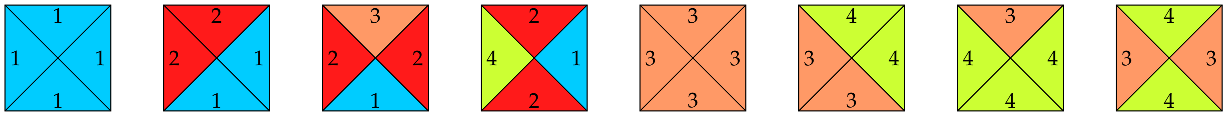
$v_0 =$ 

, $v_1 =$ 

et $v_2 =$ 

L'instance V, v_0 est-elle positive ou négative ?
4. Pourquoi est-ce important que l'on ne puisse pas tourner les tuiles ?
5. Reformuler ce problème de décision comme un langage. *(Indication : il faut donner un encodage des jeux de tuiles comme des mots sur un alphabet de votre choix).*

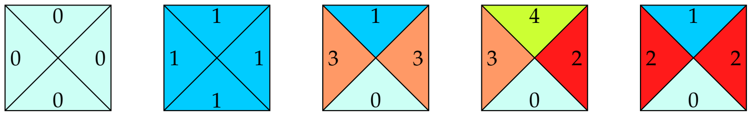
6. Soit $W = \{w_0, w_1, \ldots, w_7\}$ le jeu de tuiles suivant :



w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7

Essayer d'assembler des tuiles de W en partant de w_1, et tâcher de comprendre ce que « fait » ce jeu de tuiles. L'instance W, w_1 est-elle positive ou négative ?

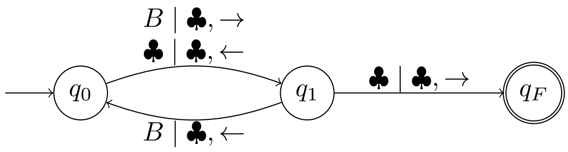
7. Soit $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ le jeu de tuiles suivant :



s_0 s_1 s_2 s_3 s_4

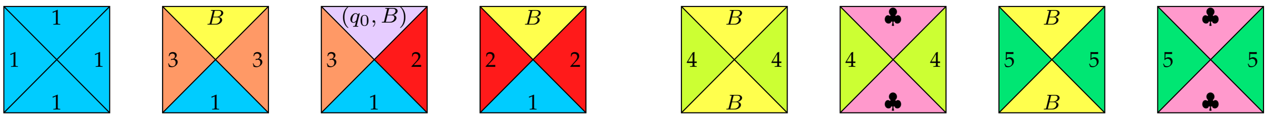
Ajouter des tuiles à S, de façon à ce que le S-pavage τ obtenu à partir de la tuile de départ s_3 soit unique et vérifie : $\forall x, y \in \mathbb{N} : \tau(x,y) = (4, \_, \_, \_) \Leftrightarrow x = y$.

8. Soit M_{bb2} la machine de Turing à trois états $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabet de ruban $\Gamma = \{B, \clubsuit\}$, et dont le graphe de transition est le suivant :

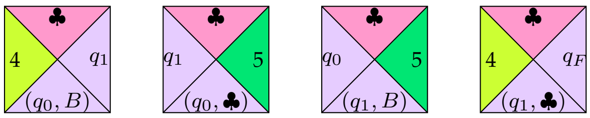


Le calcul de M_{bb2} sur l'entrée vide s'arrête-t-il ?

9. On considère maintenant le jeu de tuiles T composé des 23 tuiles suivantes :

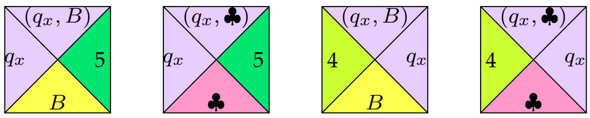


t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7



t_8 t_9 t_{10} t_{11}

Pour chaque $x \in \{0, 1, F\}$:



t_{12}, t_{13}, t_{14} t_{15}, t_{16}, t_{17} t_{18}, t_{19}, t_{20} t_{21}, t_{22}, t_{23}

Remarque : B, $\clubsuit$, (q_0, B), $(q_1, \clubsuit)$, *etc* sont des couleurs dans ce jeu de tuiles. Les couleurs utilisées sont en quantité finie, nous pouvons les convertir en entiers naturels.

L'instance T, t_2 du problème PAVABILITÉ-DÉPART est-elle positive ou négative ?

10. En remarquant la similitude entre le calcul de M_{bb2} et l'assemblage d'un pavage par les tuiles de T à partir de t_2, généraliser : étant donnée une machine de Turing arbitraire M, expliquer comment construire un jeu de tuiles T_M qui lui corresponde.

11. En déduire une réduction de $L_{\overline{halte_\epsilon}} = \{\langle M \rangle \mid M$ ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée $\epsilon\}$ à PAVABILITÉ-DÉPART, et conclure.