TD 01 – Cardinalité et machines de Turing

Rappel : soient A et B deux ensembles, une fonction $f : A \to B$ est
- — injective ssi $\forall\, a, a' \in A : f(a) = f(a') \implies a = a'$ (ou la contraposée),
- — surjective ssi $\forall\, b \in B : \exists\, a \in A : b = f(a)$,
- — bijective ssi elle est à la fois injective et surjective.

Utile : Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : soient A et B deux ensembles, si il existe une fonction injective de A vers B (intuitivement $|A| \leq |B|$), et une fonction injective de B vers A (intuitivement $|B| \leq |A|$), alors il existe une bijection entre A et B (intuitivement $|A| = |B|$).

Exercice 1. *Ensembles infinis dénombrables*

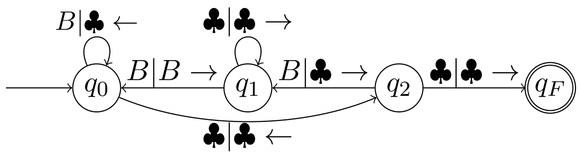
1. Donner cinq éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0, 1, a\}$.
2. Donner une bijection de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dans $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$.
3. Donner une bijection de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dans $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
4. Donner une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
5. En déduire que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$?
6. Donner un bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
7. Pour un alphabet fini Σ fixé, donner une bijection de Σ^* dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2. *Ensembles infinis indénombrables*

1. Donner une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$) dans $[0, 1]$.
2. Donner une bijection de l'ensemble des langages sur un alphabet fini Σ dans $[0, 1]$.
3. Donner une fonction injective de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Donner une fonction injective de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$. Que dit alors le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein ?

Définition. Une **machine de Turing** déterministe est définie par $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$, où :
- — Q est un ensemble fini d'**états**,
- — Γ est un **alphabet de ruban** fini,
- — $\Sigma \subset \Gamma$ est l'**alphabet d'entrée**,
- — $\delta : (Q \setminus \{q_F\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ est la **fonction de transition**,
- — $q_0 \in Q$ est l'**état initial**,
- — $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ est le **symbole blanc**,
- — $q_F \in Q$ est l'**état final**.

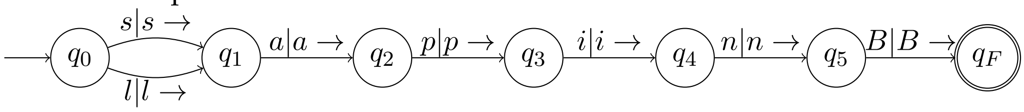
Exemple. $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_F\}$, $\Gamma = \{B, \clubsuit\}$, $\Sigma = \{\clubsuit\}$.



Calcul sur le mot d'entrée $\clubsuit\clubsuit\clubsuit$:

B	B	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	B	B	B	q_0	$t=0$
B	B	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	B	B	B	q_2	$t=1$
B	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	B	B	B	q_1	$t=2$
									$t=3$
									$t=4$
									$t=5$
									$t=6$
									$t=7$
									$t=8$
									$t=9$
									$t=10$

Exercice 3.
Soit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$ la machine de Turing où
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_F\}$,
- $\Sigma = \{a, i, l, n, p, s\}$, $\Gamma = \{a, i, l, n, p, s, B\}$,
- δ est donnée par



1. Quel est le langage $L(M)$ reconnu par cette machine de Turing, c'est-à-dire l'ensemble des mots de Σ^* pour lesquels la machine atteind son état final ?

Exercice 4. *États d'une MT = mémoire finie*
Objectif : voir que l'on peut sauvegarder des informations (en quantité finie) dans les états.
Soit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$ la machine de Turing où
- $Q = \{q_0, q_a, q_b, q'_a, q'_b, q_F\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, B\}$,
- δ est donnée par

$$\begin{array}{ll}
(q_0, a) \mapsto (q_a, a, \rightarrow) & (q_0, b) \mapsto (q_b, b, \rightarrow) \\
(q_a, a) \mapsto (q_a, a, \rightarrow) & (q_b, a) \mapsto (q_b, a, \rightarrow) \\
(q_a, b) \mapsto (q_a, b, \rightarrow) & (q_b, b) \mapsto (q_b, b, \rightarrow) \\
(q_a, B) \mapsto (q'_a, B, \leftarrow) & (q_b, B) \mapsto (q'_b, B, \leftarrow) \\
(q'_a, a) \mapsto (q_F, a, \rightarrow) & (q'_b, b) \mapsto (q_F, b, \rightarrow)
\end{array}$$

1. Dessiner cette machine sous la forme d'un automate.
2. Quel est le langage $L(M)$ reconnu par cette machine de Turing, c'est-à-dire l'ensemble des mots de Σ^* pour lesquels la machine atteind son état final ?
3. Est-ce que le calul de cette machine de Turing s'arrête à partir de toute entrée dans Σ^* ?

Exercice 5. *MT*
Pour chacun des langages suivants, donner une machine de Turing déterministe qui le reconnaît, et qui de plus s'arrête sur toute entrée (argumenter brièvement).

1. $L = \{wbac \mid w \in \Sigma^*\}$ avec $\Sigma = \{a, b, c\}$.
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 0 \mod 3\}$ avec $\Sigma = \{a\}$.
3. $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.