

TD – Pavages

Exercice 1.

Des puzzles... indécidables!

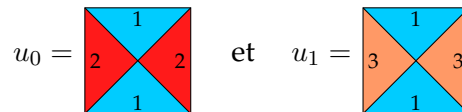
Dans cet exercice nous allons démontrer que le problème suivant est indécidable :

PAVABILITÉ-DÉPART (pavabilité du plan avec tuile de départ)
 Entrée : un jeu de tuiles T , et une tuile de départ $t_0 \in T$.
 Question : existe-t-il un T -pavage τ avec $\tau(0, 0) = t_0$?

Une *tuile* t est un carré de taille 1×1 dont chacun des quatre côtés comporte une couleur représentée par un entier ; c'est-à-dire $t = (t_n, t_e, t_s, t_o) \in \mathbb{N}^4$ donne les couleurs sur les côtés nord t_n , est t_e , sud t_s et ouest t_o . Un *jeu de tuiles* T est un ensemble fini de tuiles (qui utilisent donc un nombre fini de couleurs). Un T -pavage $\tau : \mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ associe à chaque case de l'espace en deux dimensions \mathbb{Z}^2 , une tuile de T , de façon à ce que deux tuiles adjacentes aient la même couleur sur leur côté en commun (par exemple si $\tau(0, 0) = t$ et $\tau(1, 0) = t'$ avec $t = (t_n, t_e, t_s, t_o)$ et $t' = (t'_n, t'_e, t'_s, t'_o)$ alors on doit avoir $t_e = t'_o$).

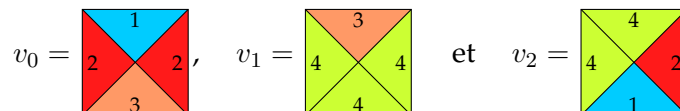
Important : d'après la définition on a autant de copies que l'on veut de chaque tuile, mais on ne peut pas tourner les tuiles.

1. Quels U -pavages peut-on former avec le jeu de tuiles $U = \{u_0, u_1\}$, où :



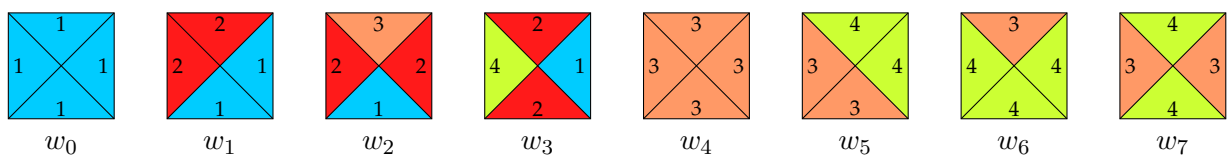
2. L'instance U, u_0 est-elle positive ou négative ?

3. Soit $V = \{v_0, v_1, v_2\}$ un jeu de tuiles, avec



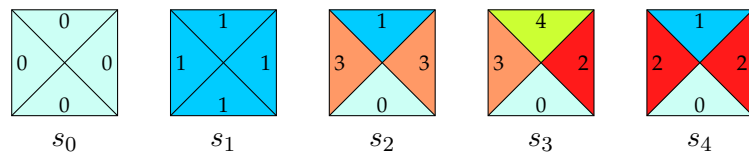
L'instance V, v_0 est-elle positive ou négative ?

4. Pourquoi est-ce important que l'on ne puisse pas tourner les tuiles ?
5. Reformuler ce problème de décision comme un langage. (Indication : il faut donner un encodage des jeux de tuiles comme des mots sur un alphabet de votre choix).
6. Soit $W = \{w_0, w_1, \dots, w_7\}$ le jeu de tuiles suivant :



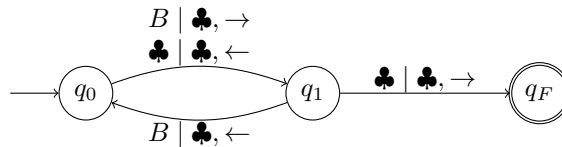
Essayer d'assembler des tuiles de W en partant de w_1 , et tâcher de comprendre ce que « fait » ce jeu de tuiles. L'instance W, w_1 est-elle positive ou négative ?

7. Soit $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ le jeu de tuiles suivant :



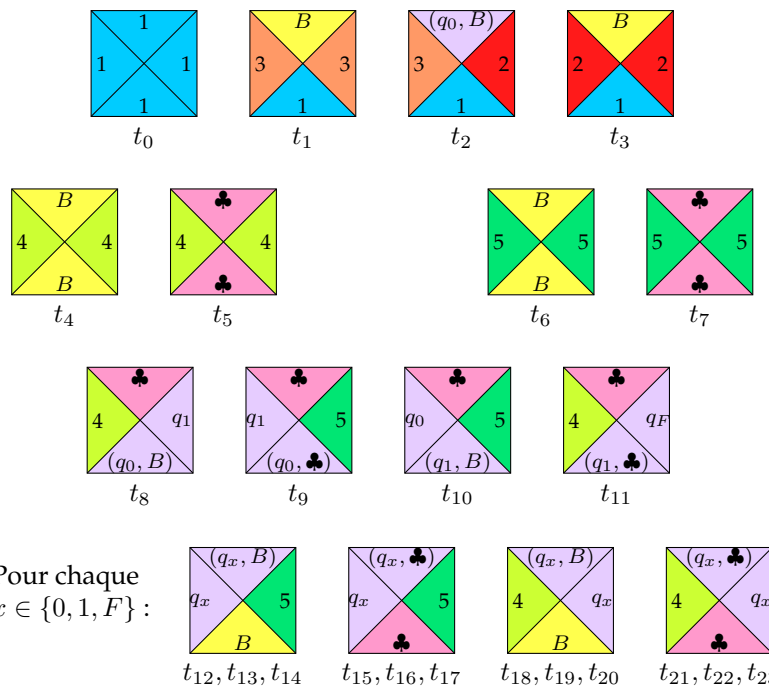
Ajouter des tuiles à S , de façon à ce que le S -pavage τ obtenu à partir de la tuile de départ s_3 soit unique et vérifie : $\tau(x, y) = s_3 \Leftrightarrow x = y$.

8. Soit M_{bb2} la machine de Turing à trois états $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabet de ruban $\Gamma = \{B, \clubsuit\}$, et dont le graphe de transition est le suivant :



Le calcul de M_{bb2} sur l'entrée vide s'arrête-t-il ?

9. On considère maintenant le jeu de tuiles T composé des 23 tuiles suivantes :



Remarque : $B, \clubsuit, (q_0, B), (q_1, \clubsuit), etc$ sont des couleurs dans ce jeu de tuiles. Les couleurs utilisées sont en quantité finie, nous pouvons les convertir en entiers naturels.

L'instance T, t_2 du problème PAVABILITÉ-DÉPART est-elle positive ou négative ?

10. En remarquant la similitude entre le calcul de M_{bb2} et l'assemblage d'un pavage par les tuiles de T à partir de t_2 , généraliser : étant donnée une machine de Turing arbitraire M , expliquer comment construire un jeu de tuiles T_M qui lui corresponde.

11. En déduire une réduction de $L_{\overline{\text{halte}}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée } \epsilon\}$ à PAVABILITÉ-DÉPART, et conclure.