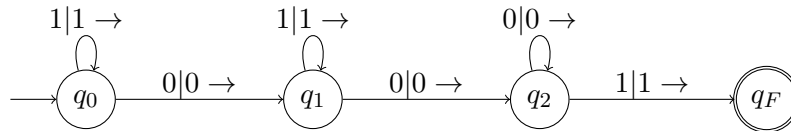


TD 03 – Propriétés de clôture des langages (semi-)décidables

Exercice 1.

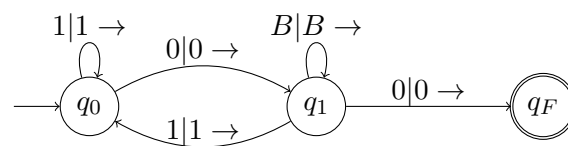
Complémentaire

Soit la machine de Turing M_1 suivante sur l'alphabet d'entrée $\Sigma = \{0, 1\}$.



1. Cette machine de Turing s'arrête-elle sur toute entrée?
2. Construire une machine de Turing M'_1 telles que $L(M'_1) = \Sigma^* \setminus L(M_1)$.

Soit la machine de Turing M_2 suivante sur l'alphabet d'entrée $\Sigma = \{0, 1\}$.

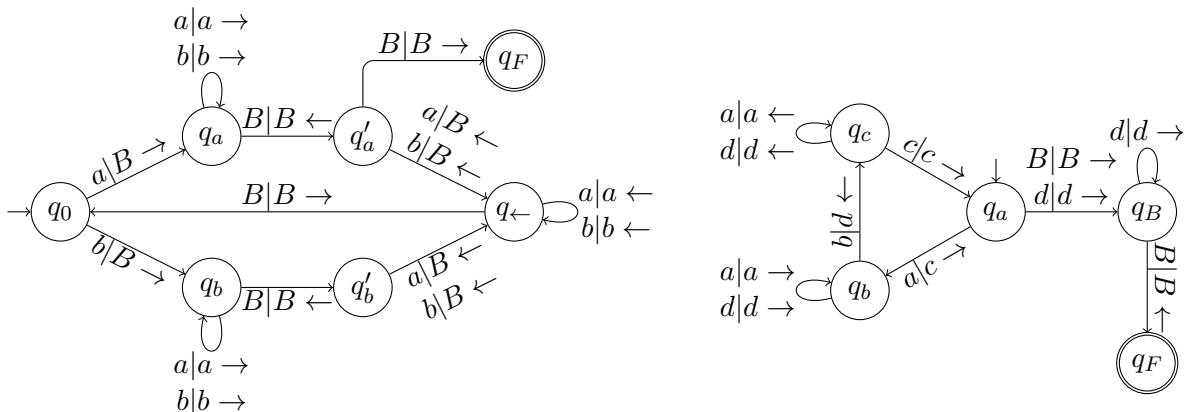


3. Construire une machine de Turing M'_2 telles que $L(M'_2) = \Sigma^* \setminus L(M_2)$.
4. Plus généralement, que penser d'une procédure pour effectuer cette transformation? (de M à M' telle que $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$)

Exercice 2.

Simulation séquentielle et parallèle de deux MT

Soient M_1 (à gauche) et M_2 (à droite) les machines de Turing suivantes sur $\Sigma = \{a, b\}$.



Soient $L_1 = \{uav \mid u, v \in \Sigma^* \text{ et } |u| = |v|\}$ et $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Étudier la machine M_1 , et décrire en une ou deux phrases son fonctionnement (mouvements de la tête, modifications du ruban, ...), pour argumenter que $L(M_1) = L_1$.
2. Étudier la machine M_2 , et décrire en une ou deux phrases son fonctionnement (mouvements de la tête, modifications du ruban, ...), pour argumenter que $L(M_2) = L_2$.
3. Étudier le diagramme espace-temps de machine de Turing en Figure 1 (sur 2 pages). Que réalise cette machine?
4. Étudier le diagramme espace-temps de machine de Turing en Figure 2 (sur 4 pages). Que réalise cette machine?

Exercice 3.*Propriétés de clôture?*

Démontrer ou réfuter chacune des propriétés de clôture suivantes.

Indication : 5 sont correctes et 4 sont incorrectes.

1. Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est décidable si et seulement si L et $\Sigma^* \setminus L$ sont semi-décidables.
2. La famille des langages décidables est close par intersection et union.
3. La famille des langages semi-décidables est close par intersection et union.
4. La famille des langages non décidables est close par intersection et union.
5. La famille des langages non semi-décidables est close par intersection et union.
6. La famille des langages décidables est close par complémentation.
7. La famille des langages semi-décidables est close par complémentation.
8. La famille des langages non décidables est close par complémentation.
9. La famille des langages non semi-décidables est close par complémentation.

Exercice 4. $\langle M \rangle$

Donner le code $\langle M \rangle$ de la machine de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$, d'ensemble d'états $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabets $\Sigma = \{0, 1\}$ et $\Gamma = \{0, 1, B\}$, et dont la fonction de transition est donnée par :

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 1, R)$	-	-
q_1	-	$(q_1, 0, R)$	(q_F, B, L)

Exercice 5.*L'arrêt*

Indiquer si chacun des énoncés qui suit est vrai ou faux, en justifiant.

1. $\nexists M_{halt}, \forall M, \forall w : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.
2. $\forall M, \forall w, \exists M_{halt} : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.

Exercice 6.*MT : conventions**Objectif* : voir que l'on peut utiliser d'autres conventions.

1. Peut-on décider exactement les mêmes langages si la tête de lecture est initialement placée sur la case la plus à droite du mot d'entrée? (Justifier)
2. Peut-on décider exactement les mêmes langages si l'on autorise des transitions pour lesquelles la tête de lecture/écriture ne bouge pas (ni L ni R)? (Justifier)
3. Peut-on décider exactement les mêmes langages si l'on ajoute la restriction $\Sigma = \{0, 1\}$? Et si en plus $\Gamma = \{0, 1, B\}$? (Justifier)

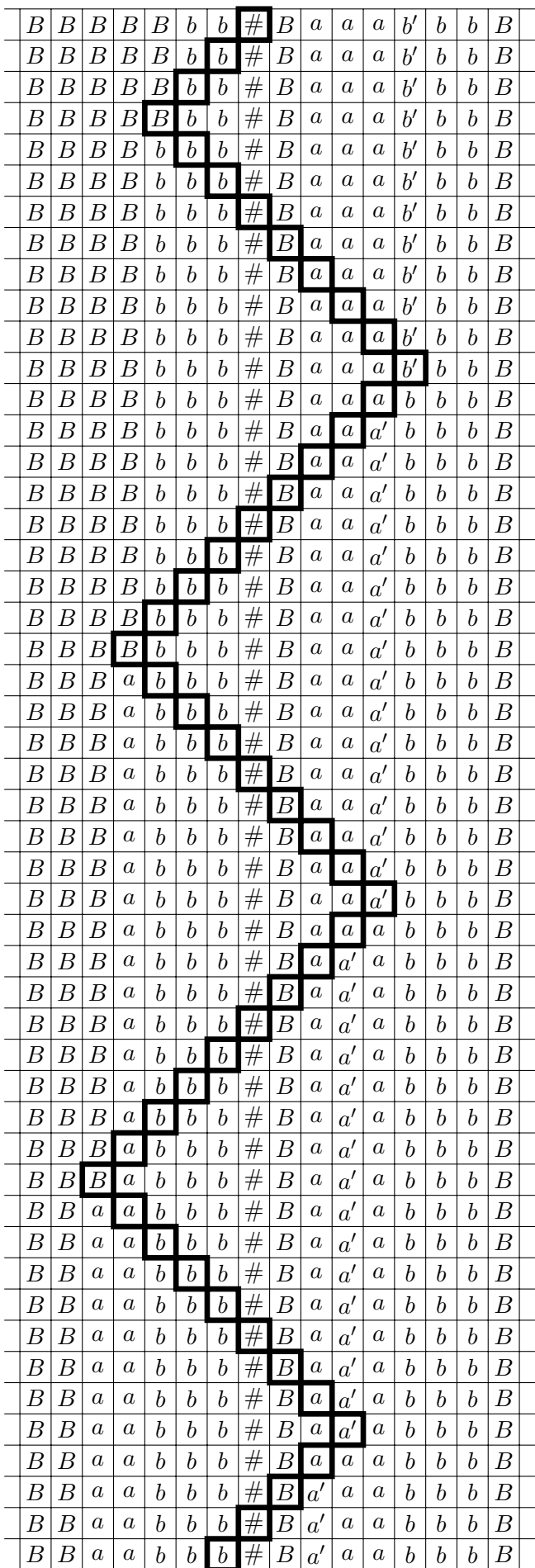
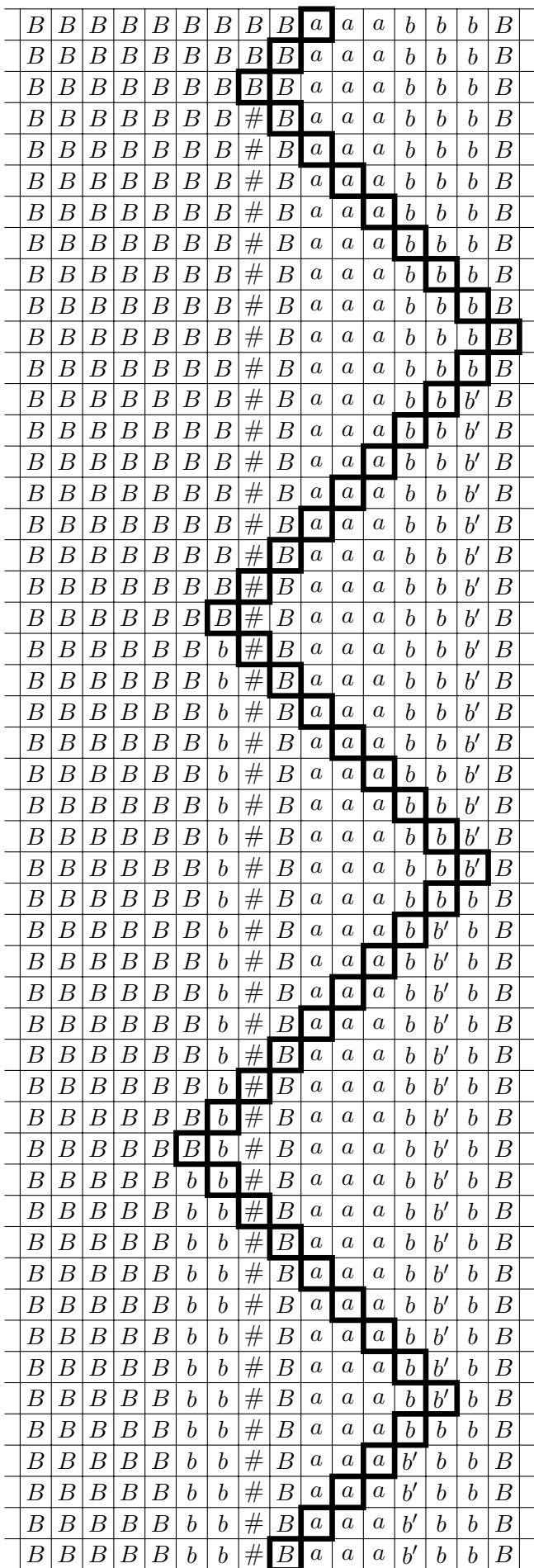


FIGURE 1 – Diagramme espace-temps de machine de Turing (temps vers le bas). Partie 1/2

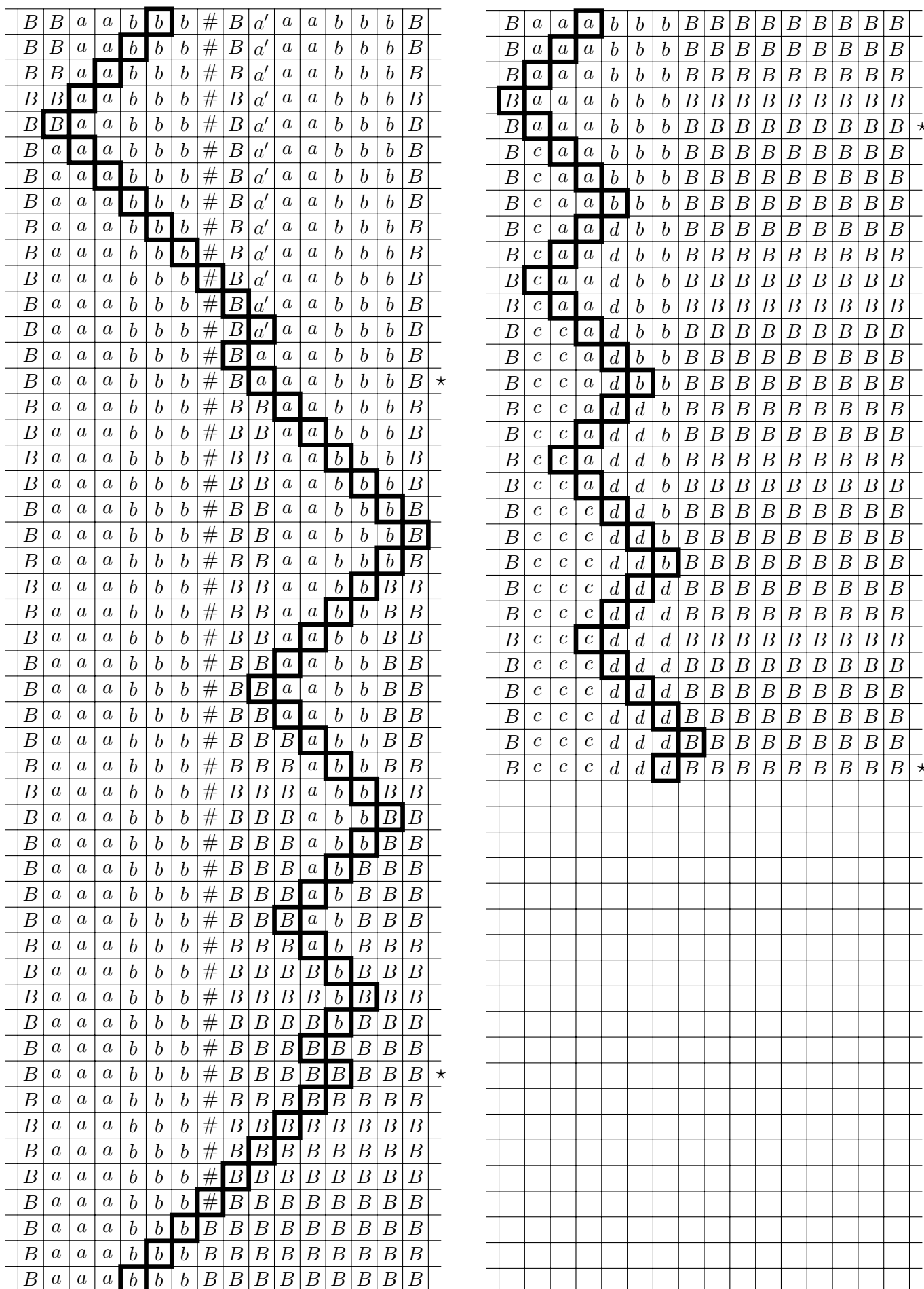


FIGURE 1 – Diagramme espace-temps de machine de Turing (temps vers le bas). Partie 2/2

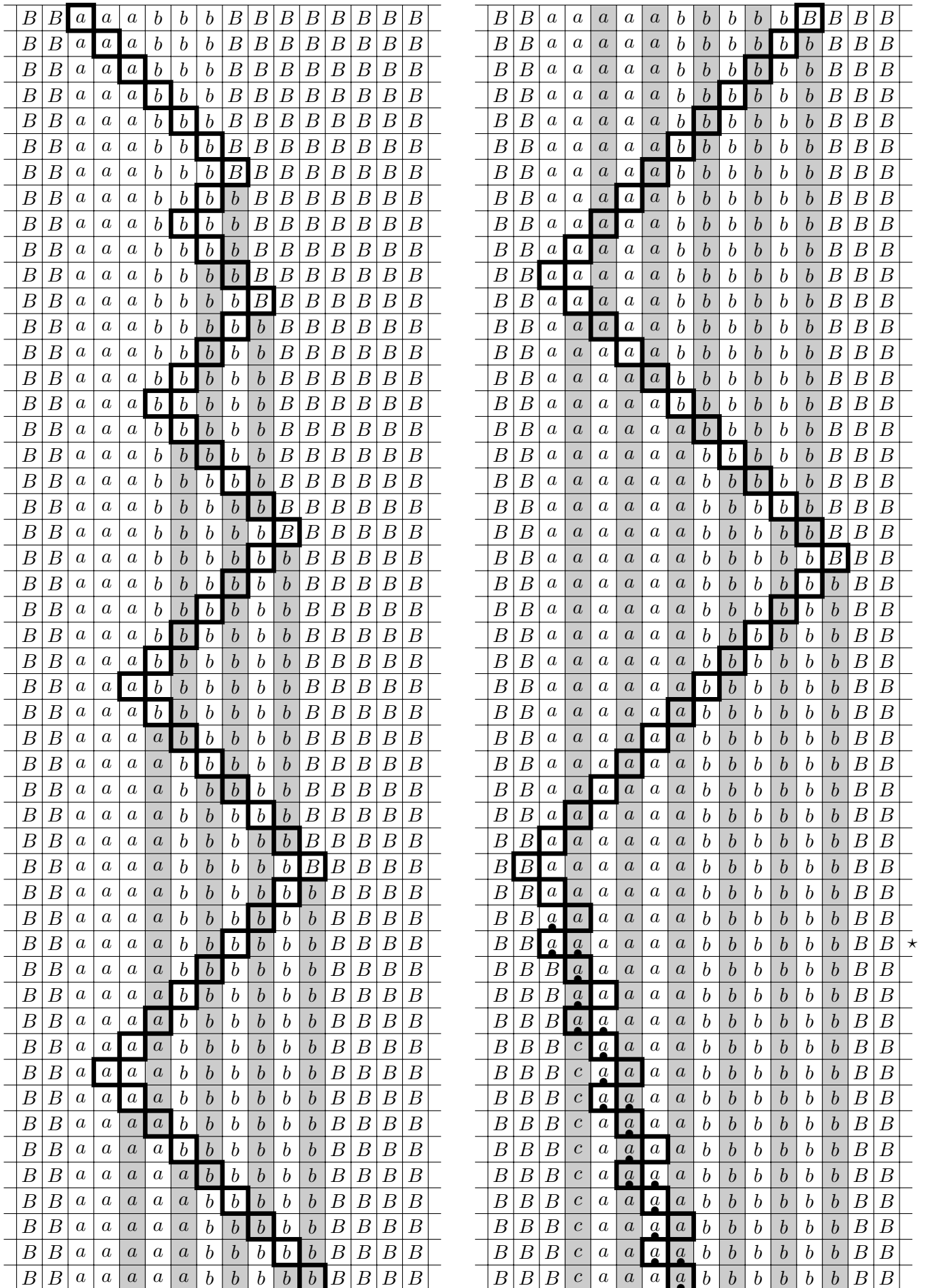


FIGURE 2 – Diagramme espace-temps de machine de Turing (temps vers le bas). Partie 1/4

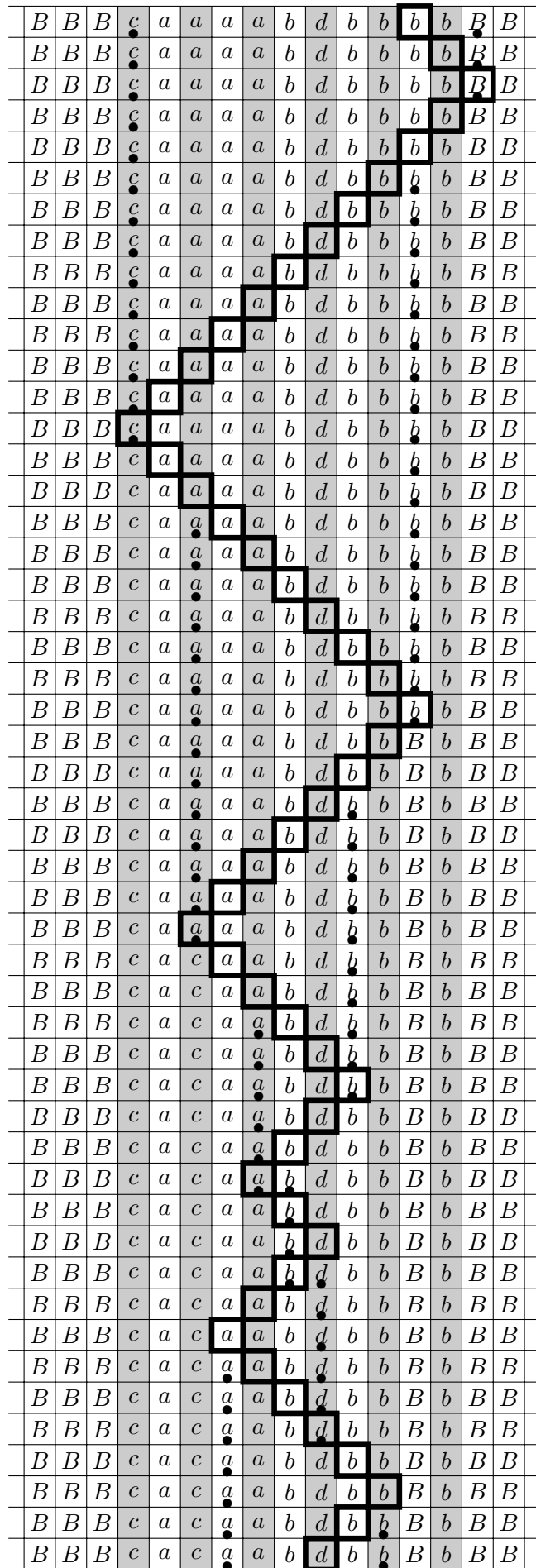
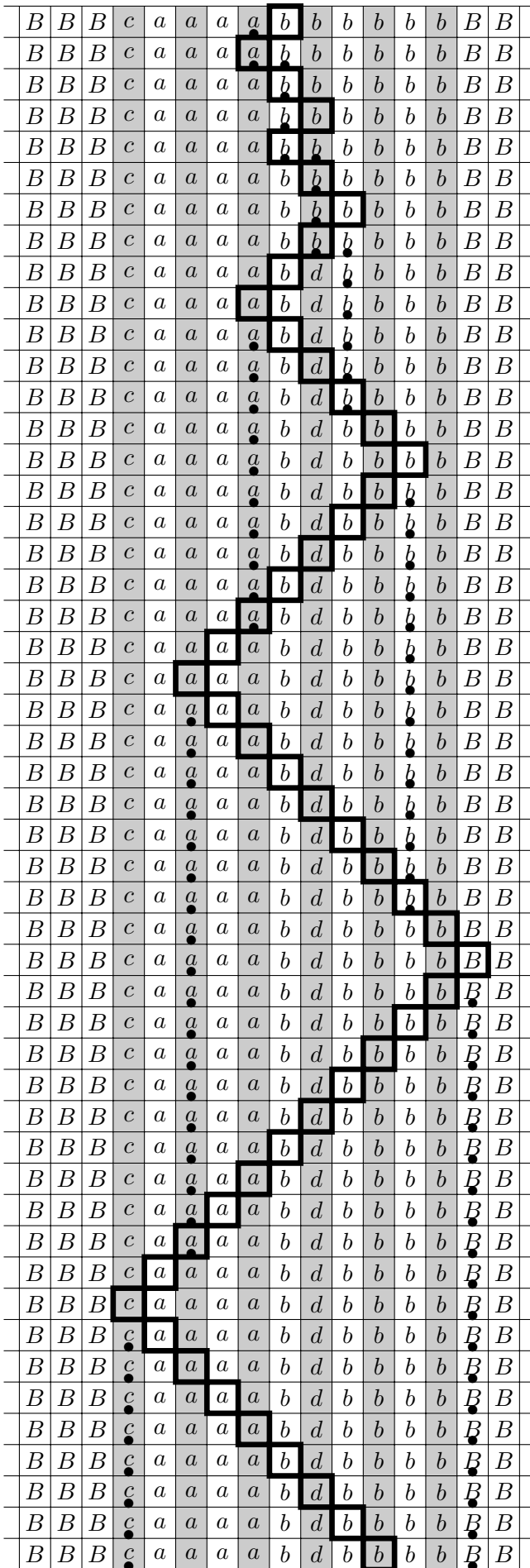


FIGURE 2 – Diagramme espace-temps de machine de Turing (temps vers le bas). Partie 2/4

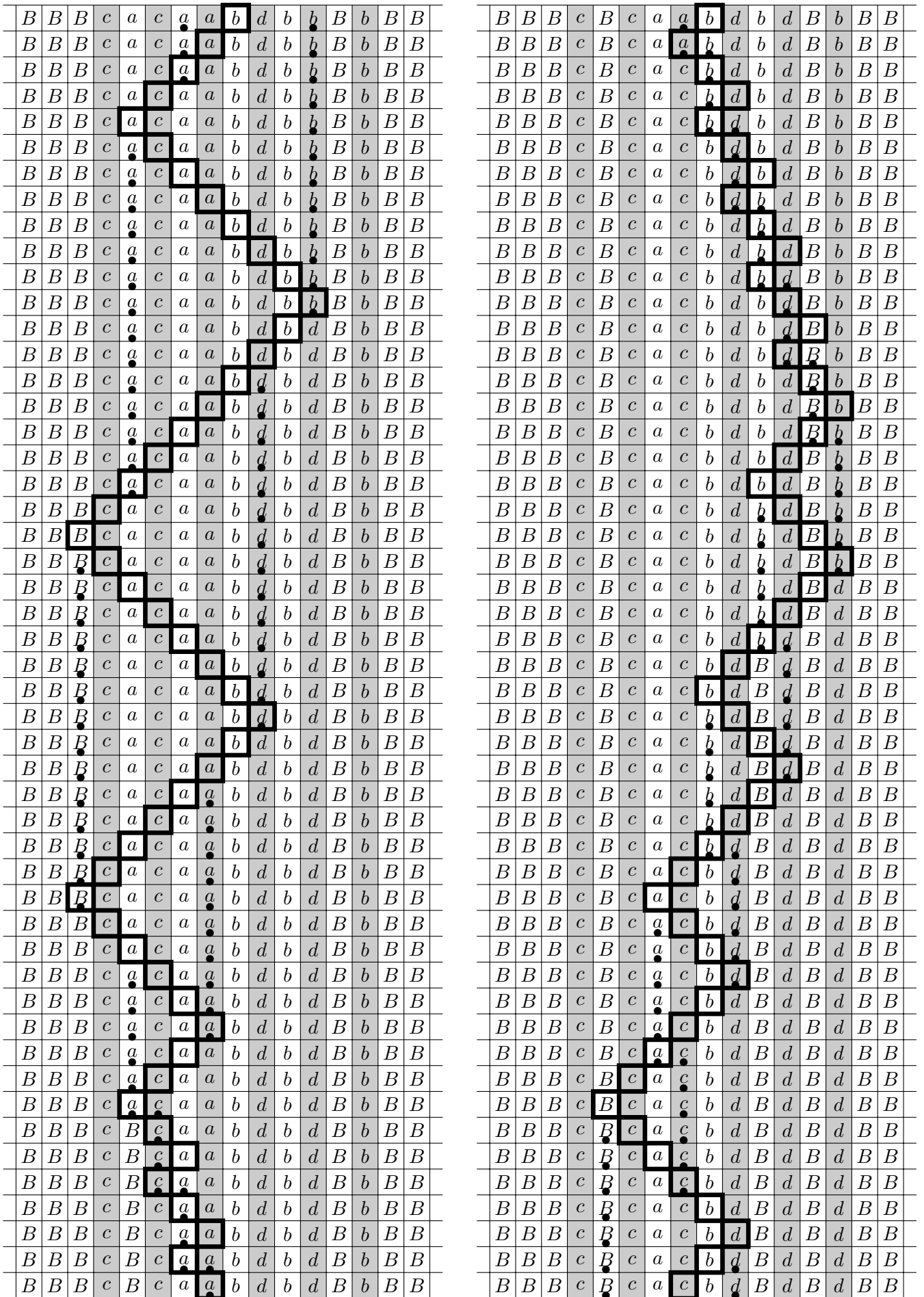


FIGURE 2 – Diagramme espace-temps de machine de Turing (temps vers le bas). Partie 3/4

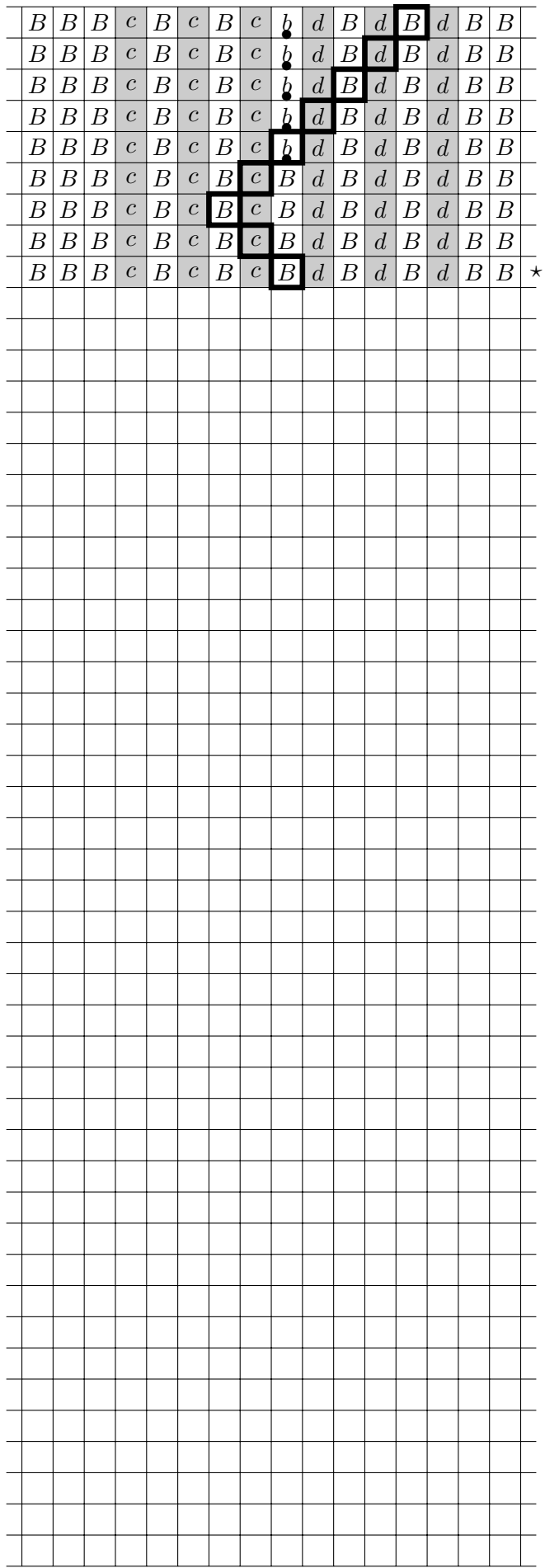
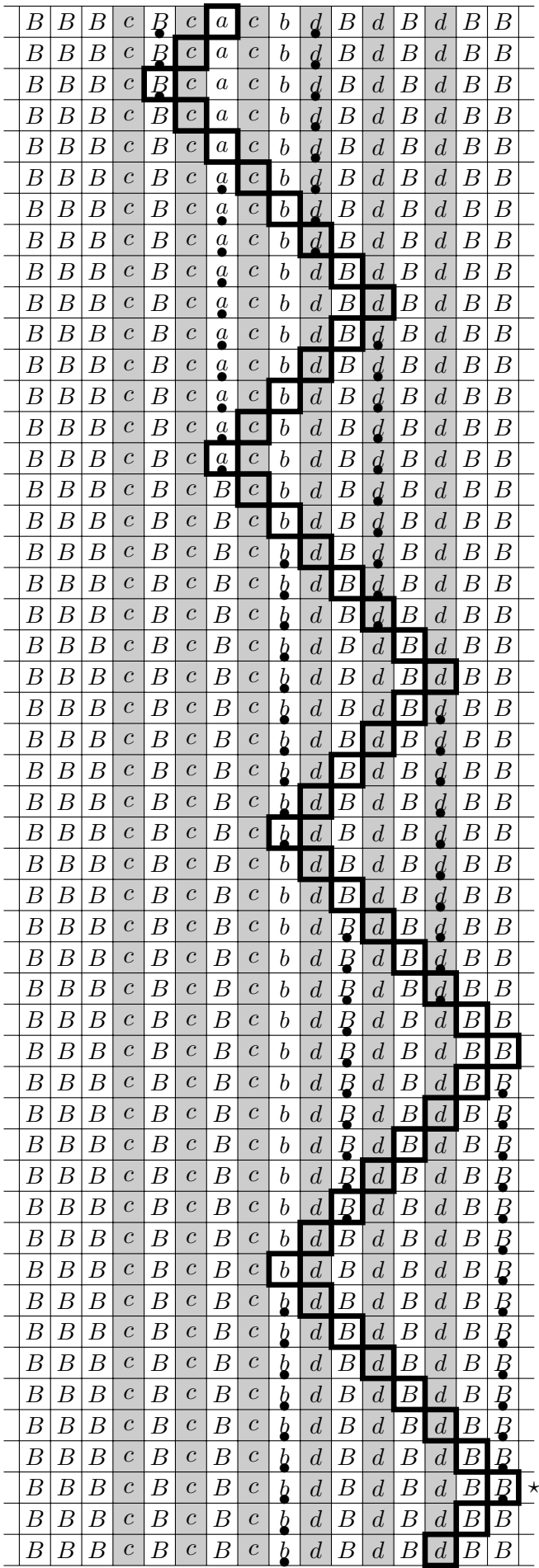


FIGURE 2 – Diagramme espace-temps de machine de Turing (temps vers le bas). Partie 4/4