M2 IMD - MCSD 2023-24 ①

VOUS AVEZ VU (ÉTIENNE MOUTOT) :

- DES JEUX DE TUILES APÉRIODIQUES, ET L'INDÉCIDABILITÉ DU DOMINO PROBLEM.
  PREUVE ♥ AVEC COOK-LEVIN ET POINT FIXE KLEENE.
- UN DM ?
- DES AC AVEC DES PROBLÈMES INDÉCIDABLES ?
- SUR DES CONFIGURATIONS FINIES : DES PROBLÈMES DÉCIDABLES MAIS DIFFICILES :
  DÉCIDER SI UN MOTIF FINI PEUT-ÊTRE PAVÉ EST NP-COMPLET (ENTRÉE : τ ET TAILLE $n \times n$ UNAIRE).

RÉSEAUX D'AUTOMATES

$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

SYSTÈMES DYNAMIQUES FINIS TRÈS GÉNÉRAUX D'ENTITÉS EN INTERACTION.

Q : COMMENT PEUT-ON GÉNÉRALISER / ASSOUPLIR LES AC ?

- RÈGLE NON-HOMOGÈNE SPATIALEMENT
- MODE DE MISE À JOUR.
- VOISINAGE NON-HOMOGÈNE : GRAPHE DE COMMUNICATION PLUTÔT QUE $\mathbb{Z}^d$ ET RAYON r.

DEF : UN R.A. DÉTERMINISTE DE TAILLE $n \in \mathbb{N}_+$ EST DÉFINI PAR UNE FONCTION GLOBALE $f : X \to X$ SUR L'ESPACE DES CONFIGURATIONS $X = \prod_{i \in [n]} A_i$ OÙ $A_i = \{0, 1, \dots, q_i - 1\}$ EST L'ALPHABET DE L'AUTOMATE i.

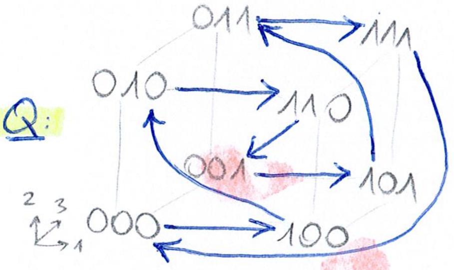
DE FAÇON ÉQUIVALENTE, f PEUT ÊTRE DÉFINI PAR n FONCTIONS LOCALES $(f_i : X \to A_i)_{i \in [n]}$ TELLES QUE $\forall x \in X : f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

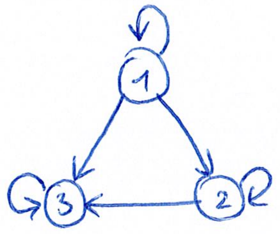
PAR DÉFAUT, LA DYNAMIQUE SUIT LE MODE DE MISE À JOUR PARALLÈLE OÙ TOUS LES AUTOMATES APPLIQUENT LEUR FONCTION LOCALE DE FAÇON SYNCHRONE.

EXEMPLE : $n = 3$, BOOLÉEN $(q_i = 2)$.

$$f_1(x) = x_1 \oplus 1$$
$$f_2(x) = x_2 \oplus x_1$$
$$f_3(x) = x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2)$$

Q :





FONCTIONS LOCALES — FONCTION GLOBALE — GRAPHE D'INTERACTION

Q : $\neq$ GRAPHE DE COMM. ?

DEF : LE GRAPHE DE COMMUNICATION G_f^c D'UN R.A. f A POUR SOMMETS $V = [n]$, ET UN ARC DE i À j <u>SSI</u> i APPARAÎT DANS LA DEF DE f_j.
LE GRAPHE D'INTERACTION EST G_f AVEC UN ARC DE i À j <u>SSI</u> i INFLUENCE EFFECTIVEMENT j C'EST-À-DIRE $\exists x \in X : f_j(x) \neq f_j(x + e_i)$ OÙ e_i EST LE $i^{\text{ème}}$ VECTEUR DE BASE ET $+$ MODULO q_i.

MODES DE MISE À JOUR.

UN VASTE PAYSAGE, DONT DES ÉLÉMENTS IMPORTANTS SONT :

NOTATION : POUR $f : X \to X$ ET $B \subseteq [n]$ ON NOTE $f_B : X \to X$ TELLE QUE $\forall i \in [n] : f_B(x)_i = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } i \in B \\ x_i & \text{sinon.} \end{cases}$

ET POUR $\mu = (B_1, \dots, B_p)$ UNE SÉQUENCE DE BLOCS $B_i \subseteq [n]$, ON NOTE $f_\mu = f_{B_p} \circ \dots \circ f_{B_1} : X \to X$.

DÉTERMINISTES $X \to X$:

- PARALLÈLE : $([n])$
- SÉQUENTIEL : PERMUTATION $\pi : [n] \to [n]$ ET $(\{\pi(i)\})_{i \in [n]}$.
- BLOC SÉQUENTIEL : PARTITION ORDONNÉE $(B_1, \dots, B_p)$: $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$ ET $\bigcup_{j \in [p]} B_j = [n]$.
- PÉRIODIQUES μ.

NON-DÉTERMINISTES $X \to \mathcal{P}(X)$:

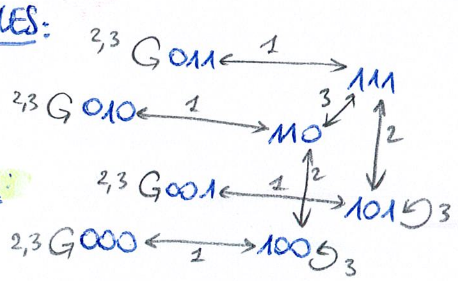
- ASYNCHRONE PARFAIT α :

$$f_\alpha(x) = \{ f_{\{i\}}(x) \mid i \in [n] \}.$$

- ASYNCHRONE GÉNÉRAL $\hat{\alpha}$: $f_{\hat{\alpha}}(x) = \{ f_B(x) \mid B \subseteq [n] \}$.
- NON-DÉTERMINISTE : RELATIONS LOCALES $(\mathcal{R}_i \subseteq X \times A_i)_{i \in [n]}$ OU $(\mathcal{R}_i : X \to \mathcal{P}(A_i))_{i \in [n]}$
ET RELATION GLOBALE $y \in \mathcal{R}(x) \Leftrightarrow \forall i \in [n] : y_i \in \mathcal{R}_i(x)$.

EXEMPLES :

Q :



ASYNC. PARFAIT
(+ GENERAL)

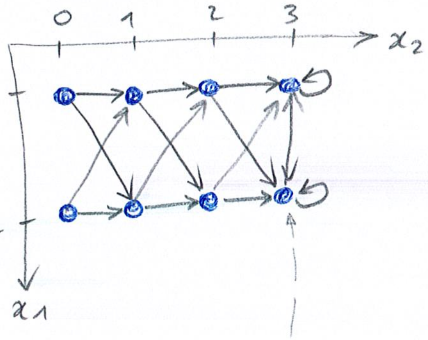
$A_1 = \{0, 1\}$
$A_2 = \{0, 1, 2, 3\}$.

$\mathcal{R}_1(x) = \{0, 1\}$

$\mathcal{R}_2(x) = \begin{cases} \{3\} & \text{si } x_2 = 3 \\ \{x_2 + 1\} & \text{sinon.} \end{cases}$

NON-DET.

Q :



DÉFINITIONS :

- POINT FIXE $x \in X$ T.Q. $f(x) = x$.
NON-DET : $x \in f(x)$, ET POINT FIXE FORT $f(x) = \{x\}$.
- CYCLE LIMITE $(x^0, \dots, x^{\ell-1})$ T.Q. $f(x^i) = x^{i+1 \bmod \ell}$ ET $\forall i \neq j : x^i \neq x^j$.
ℓ EST LA PÉRIODE.
- ATTRACTEUR = COMPOSANTE FORTEMENT CONNEXE TERMINALE (BASSIN $\neq \emptyset$).

THÉORÈME : TOUT GRAPHE ORIENTÉ EST LA DYNAMIQUE D'UN R.A.

PREUVE : DÉTERMINISTE OU NON-DÉTERMINISTE : SUR 1 AUTOMATE (PAS DE PB DE $|X| = \prod_{i \in [n]} |A_i|$ NI DE NON-DET PRODUIT DES CHOIX LOCAUX). □

REMARQUE : DET = DEGRÉ SORTANT 1. CHAQUE COMPOSANTE CONNEXE EST 1 CYCLE-LIMITE + DES ARBRES

THM [BRIDOUX ET AL 2023+] : $\forall f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n : \exists g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ ET $w \in [n]^*$: $f = g_w$. FAUX POUR ALPHABET DE TAILLE ≥ 3.

PLAN : (I). HISTOIRE ET APPLICATIONS

(II). UNIVERSALITÉ (VIA AC 1D) ⇒ COMPLEXE À PRÉDIRE.

(III). RELATIONS STRUCTURELLES ENTRE G_f ET f_μ.

(IV). COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE DES R.A.

(I). HISTOIRE ET APPLICATIONS

- RÉSEAUX DE NEURONNES : McCULLOCH ET PITTS 1943 (VOIR)

  RÉSULTAT : UN RÉSEAU DE NEURONNES FINI (RA BOOLÉEN À SEUIL) PEUT CALCULER N'IMPORTE QUEL FONCTION LOGIQUE.

  \+ THÈSE DE CHURCH-TURING.

FONCTION BOOLÉENNE À SEUIL : $\forall i \in [n] : f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j \in [n]} w_{ji} \cdot x_j > \theta_i \\ 0 & \text{SINON} \end{cases}$
(PARFOIS $\{-1, 1\}$)

$$= \underset{\substack{\text{HEAVISIDE} \\ 1 \text{ si } > 0 \\ 0 \text{ si } \leq 0}}{\mathbf{H}} \left(\sum_{j \in [n]} w_{ji} \cdot x_j - \theta_i \right).$$

AVEC $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MATRICE } n \times n}}{w_{ji}} \in \mathbb{R}$ ET $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{VECTEUR } n}}{\theta_i} \in \mathbb{R}$.

- APPLICATION À LA RÉGULATION GÉNÉTIQUE.

  KAUFFMAN $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{GÈNE RÉG. PARALLÈLE}}}{(1969)}$ ET THOMAS $(\underset{\substack{\nearrow \\ \text{ASYNC.}}}{1973}, \underset{\substack{\uparrow \\ +/- \text{ FEEDBACK CYCLES}}}{1981})$:

AUTOMATE ⟶ GÈNE

0 ⟶ INEXPRIMÉ

1 ⟶ EXPRIMÉ.

POINT FIXE ⟶ TYPE CELLULAIRE.

EXEMPLE FAMEUX : ARABIDOPSIS THALIANA : MENDOZA, ALVAREZ-BUYLLA, 1998 (VOIR)

$n = 12$ GÈNES. 6 POINTS FIXES = 6 TYPES DE CELLULES.

Q: FIG 2 (+1 AUTOMATE POUR AP3-PI)

EQ (1)

MATRICE W, θ.

FIG 4 : VÉRIFIER LES 6 "ATTRACTORS" = POINTS FIXES.

THÉORÈME [GOLES, MARTINEZ, 1990] : SOIT Δ UN ENSEMBLE FINI ET $h : \Delta \to \Delta$.
IL EXISTE UN RABS f ET $\phi : \Delta \to \{0,1\}^n$ INJECTIVE : $\phi \circ h = f \circ \phi$.

PREUVE : $n = |\Delta|$

$\phi : j \to \underset{\nwarrow \text{ VECTEUR DE BASE}}{e_j}$

$W_{ij} \rightarrow w_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } h(j) = i \\ 0 & \text{SINON} \end{cases}$

$\theta_i = \frac{1}{2}$.

$$f(\phi(j)) = \mathbf{H}\Big(\overbrace{W \cdot e_j - \theta}^{+\frac{1}{2} \text{ SUR } \overset{i = h(j)}{\vee},\ -\frac{1}{2} \text{ SINON}} \Big) = e_{h(j)} = \phi(h(j)).$$

$\square$

⚠ TAILLE DE L'ESPACE DES CONFIG : $n \rightsquigarrow 2^n$.

(II). UNIVERSALITÉ ⇒ COMPLEXE À PRÉDIRE.

R.A. : f : $\prod_{i\in[n]} A_i \longrightarrow \prod_{i\in[n]} A_i$. ← ⚠ EN GÉNÉRAL : FINI.

A.C. : F : $Q^{\mathbb{Z}^d} \longrightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$

M.T. : M : $\Gamma^{\mathbb{Z}} \times Q \times \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma^{\mathbb{Z}} \times Q \times \mathbb{Z}$.

DEF : SOIENT A,B DES INSTANCES DE MODÈLES DE CALCUL.
B SIMULE A, NOTÉ $A \preccurlyeq B$,
LORSQU'IL EXISTE UNE FONCTION INJECTIVE $\phi : X_A \to X_B$ TELLE QUE $\phi \circ A = B \circ \phi$.
UN MODÈLE DE CALCUL EST TURING-UNIVERSEL S'IL SIMULE UNE MTU.

THÉORÈME [SMITH 1971] : POUR TOUTE MT $M = (Q, \Gamma, \underset{}{\overset{Q\times\Gamma \to Q\times\Gamma\times\{\leftarrow,\to\}\text{ PARTIELLE.}}{\delta}})$
IL EXISTE UN AC. $F = (\mathbb{Z}^{d=1}, \mathcal{N}, Q', \overset{Q'^{\mathcal{N}} \to Q'}{f})$
TEL QUE $M \preccurlyeq F$. (AVEC $|\mathcal{N}| = 6$ ET $|Q'| = \max(|Q|, |\Gamma|)+1$).

PREUVE : AVEC $\mathcal{N} = (-1,0,1)$ ET $|Q'| = (|Q|+1).|\Gamma|$.

Q : ÉCRIRE LA PREUVE FORMELLE (DONNER f ET ϕ...).

SOIT $* \notin Q$. ALORS $Q' = (Q \cup \{*\}) \times |\Gamma|$.

SOIT $\phi : \Gamma^{\mathbb{Z}} \times Q \times \mathbb{Z} \to Q'^{\mathbb{Z}}$

$$((s_i)_{i\in\mathbb{Z}}, q, z) \longmapsto i \mapsto \begin{cases} (q, s_i) & \text{si } i = z \\ (*, s_i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

SOIT $\mathcal{N} = (-1,0,1)$

ET $f : Q'^{\mathcal{N}} \to Q'$

$$(*,a)(*,b)(*,c) \longmapsto (*,b)$$

$$(q,a)(*,b)(*,c) \longmapsto \begin{cases} (q',b) & \text{si } \delta(q,a) = (q',a',\rightarrow) \\ (*,b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(*,a)(q,b)(*,c) \longmapsto (*,b') \quad \text{si } \delta(q,b) = (q', b', \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\text{ou}}}) \quad (\text{SINON ARRÊT})$$

$$(*,a)(*,b)(q,c) \longmapsto \begin{cases} (q',b) & \text{si } \delta(q,a) = (q',a',\leftarrow) \\ (*,b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

À PARTIR DES DÉFINITIONS D'UNE ÉTAPE DE CALCUL DE M ET F, ON A DIRECTEMENT $\phi \circ M = F \circ \phi$. □

COROLLAIRE : IL EXISTE DES AC UNIVERSELS.

Q : AVEZ-VOUS JOUÉ AU JEU DE LA VIE AVEC ETIENNE ? (GOLLY).

- GOL [CONWAY ET AL 1982, RENDEL 2000 MTU DANS GOLLY, LOIZEAU 2016 8-BIT COMPUTER
  - P60 GUN
  - 90° REFLECTOR
  - GLIDER DUPLICATOR
  - GLIDER EATER.]
- ECA 110 [COOK 2004]
  ECA 54 ?

	111	110	101	100	011	010	001	000
110 =	0	1	1	0	1	1	1	0
54 =	0	0	1	1	0	1	1	0

THÉORÈME DE GANDY [1980] : SI LES HYPOTHÈSES PHYSIQUES SUIVANTES SONT VRAIES :

1. LES LOIS DE LA PHYSIQUE SONT UNIFORMES (INVARIANTES) DANS L'ESPACE
2. ______________________ LE TEMPS
3. LA VITESSE DE PROPAGATION DE L'INFORMATION EST BORNÉE
4. LA DENSITÉ D'INFORMATION EST BORNÉE
5. IL Y A UN ÉTAT QUIESCENT

ALORS NOUS VIVONS DANS UN A.C. (TOUTE FONCTION CALCULABLE PAR UNE MACHINE PHYSIQUE EST CALCULABLE PAR UNE M.T.).

THÉORÈME DE RICE [1953] : TOUTE QUESTION NON-TRIVIALE SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PROGRAMMES (TEMPS NON BORNÉ) EST INDÉCIDABLE (PAR UN PROGRAMME).

UN AC FINI (ESPACE : CONFIG. PÉRIODIQUES) OU UNE M.T. FINIE (ESPACE : M.T. LINÉAIREMENT BORNÉES) EST UN CAS PARTICULIER DE R.A. (FINI LUI AUSSI).

AUTREMENT DIT : LES R.A. SIMULENT FACILEMENT LES AC ET LES M.T. . Q : NON ? EXERCICE.

Φ EST FACILE À CALCULER (LOGSPACE) DONC PEUT AGIR COMME UNE RÉDUCTION.

THÉORÈME : [PERIFEL BOUQUIN TOP DE COMPLEXITÉ, 2014] DÉCIDER SI $(\langle M\rangle, x, t)$ EST TEL QUE M ACCEPTE L'ENTRÉE x EN $\leq t$ ÉTAPES EST COMPLET POUR

	M DÉTERMINISTE	M NON-DÉTERMINISTE
t UNAIRE (1^t)	P	NP
t BINAIRE	EXP	NEXP

COROLLAIRE : DÉCIDER SI $(\langle (f_i)_{i\in[n]}\rangle, x, t)$ EST TEL QUE $f(x)$ CONVERGE EN $\leq t$ ÉTAPES VERS UN POINT FIXE ($\equiv$ ARRÊT) EST COMPLET POUR ...

ENCODAGE ? (IV).

III RELATIONS STRUCTURELLES

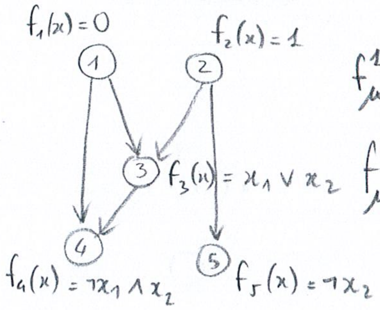
ENTRE G_f ET f_μ : $\text{Prop.}(G_f) \overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{Prop}'(f_\mu)$

LES CYCLES DE G_f SONT LES MOTEURS DE LA COMPLEXITÉ COMPORTEMENTALE DE f_μ.

Loi 1 { **THÉORÈME** [ROBERT, 1986] : SOIT f_μ UN R.A. DÉTERMINISTE ÉQUITABLE DONT LE GRAPHE D'INTERACTION G_f EST ACYCLIC. ALORS f_μ^n EST CONSTANTE. (IL EXISTE UN UNIQUE ATTRACTEUR POINT-FIXE).

PREUVE : SUR UN EXEMPLE : TRI TOPOLOGIQUE, PAR INDUCTION DEPUIS LES SOURCES DU DAG G_f, LES AUTOMATES SONT CONSTANTS (CAR ÉQUITABLE).

Q : UN EXEMPLE DE PROFONDEUR 2 OU 3.



$f_\mu^1(x) = y$ $y_1=0$ $y_2=1$

$f_\mu^2(x) = y$ $y_3=1$

$f_\mu^3(x) = y$ $y_4=1$ $y_5=0$

□

SIGNES DU GRAPHE D'INTÉRACTION ET CYCLES. (BOOLÉEN)

⚠ NON EXCLUSIF

- (i,j) EST POSITIF LORSQU'$\exists x \in \{0,1\}^n$: $x_i=0$ ET $f_j(x)=0<1=f_j(x+e_i)$.
- (i,j) —— NÉGATIF —————— $x_i=1$ ——————

SIGNES SIMPLES
||
MONOTONE

- UN CYCLE DE G_f EST POSITIF S'IL CONTIENT UN NOMBRE PAIR D'ARCS NÉGATIFS, ET NÉGATIF SINON (IMPAIR).

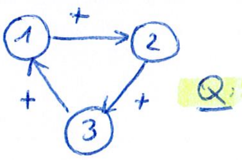
Q : EXEMPLE (PAGE 7)

INTUITION : POSITIF = PAIR = L'INFORMATION REVIENT À L'IDENTIQUE (– FLIP LE BIT)
= BON POUR LES POINTS FIXES.

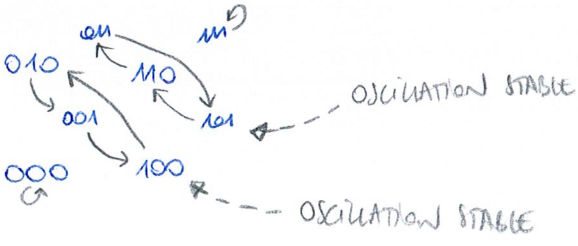
Loi 2 { **THÉORÈME** [THOMAS, 1981 ; RICHARD, COMET, 2007 ; NOUAL, SENÉ 2012].
CONJECTURE ASYNCHRONE TOUT MAJ.
SI f_μ ADMET AU MOINS DEUX CONFIGURATIONS STABLES/ POINTS FIXES (MULTISTATIONNARITÉ) ALORS G_f CONTIENT UN CYCLE POSITIF.

ASYNCHRONE **THÉORÈME** [THOMAS, 1981 ; RICHARD 2010]
SI f_α ADMET UNE OSCILLATION STABLE / ATTRACTEUR DE TAILLE AU MOINS DEUX ALORS G_f CONTIENT UN CYCLE NÉGATIF.

FAUX EN PARALLÈLE :

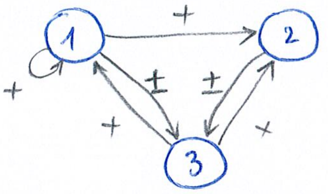


Q :



INFLUENCE DES MODES DE MISE À JOUR.

EXEMPLE :



$f_1(x) = x_1 \vee x_3$

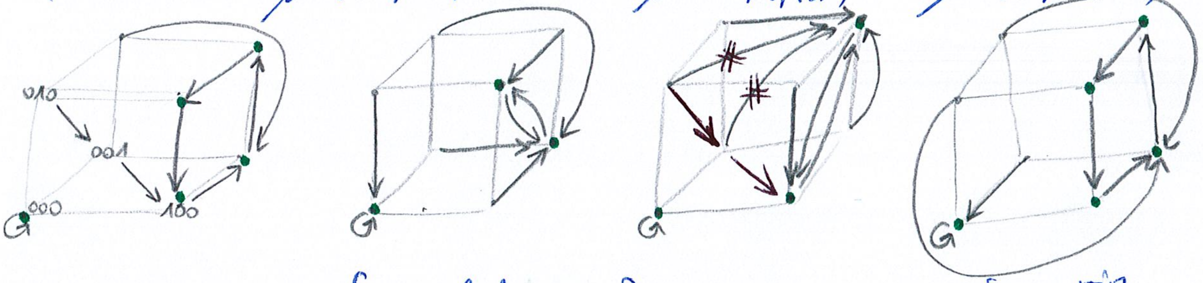
$f_2(x) = x_1 \wedge x_3$

$f_3(x) = x_1 \oplus x_2$

Q : SIGNES ?

BLOC-SÉQUENTIELS : $\mu = (\{1,2,3\})$ $\mu = (\{2\},\{1\},\{3\})$ $\mu = (\{1,3\},\{2\})$ $\mu = (\{2,3\},\{1\})$

Q :



THÉORÈME [ROBERT 1986] SOIT f UN R.A. . POUR TOUT μ BLOC SÉQUENTIEL,

$f_\mu(x) = x \iff f(x) = x$ C'EST-À-DIRE f_μ AURA TOUJOURS LES MÊMES POINTS FIXES (QUE LE PARALLÈLE)

PREUVE :

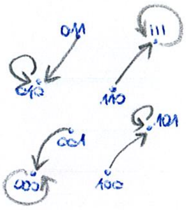
$$f(x)=x \Rightarrow \forall i \in [n] : f_i(x) = x_i \xRightarrow[\text{DE } \mu]{\text{INDUCTION SUR LA TAILLE}} f_\mu(x) = x$$

$$f(x) \neq x \Rightarrow \exists i \in [n] : f_i(x) \neq x_i \xRightarrow[\text{LE PREMIER TEL } i \text{ DANS } \mu]{} f_\mu(x) \neq x . \qquad \square$$

(PARTITION : UNE SEULE MISE À JOUR PAR AUTOMATE).

FAUX AU DELÀ DE BLOC-SÉQUENTIEL :

- LE CYCLE NÉGATIF DE TAILLE n A 0 POINT FIXE EN BLOC-SEQ, MAIS POUR $\mu = (\underbrace{[n],[n],\ldots,[n]}_{2n})$ IL A 2^n POINTS FIXES.
- LE CYCLE POSITIF DE TAILLE 3 AVEC $\mu = (\{2,3\},\{1,3\},\{1,2\})$. Q :



ON PEUT AVOIR DE NOUVEAUX POINTS FIXES, MAIS LES POINTS FIXES PARALLÈLE (BLOC-SEQ) RESTENT.

THÉORÈME [RIIS 2017 ; ARACENA 2008 ; ARACENA, RICHARD, SALINAS 2017].

SOIT MAXPF(G) LE NOMBRE MAXIMUM DE POINTS-FIXES DE f TELLE QUE $G_f = G$.

$$\nu(G)+1 \leqslant \text{maxPF}(G) \leqslant 2^{\tau(G)} \quad (\text{NON SIGNÉ})$$

$$2^{\nu^*(G)} \leqslant \text{maxPF}(G) \leqslant 2^{\tau^+(G)} \quad (\text{SIGNÉ SIMPLE})$$

RÉSEAUX MONOTONES.

AVEC $\tau(G)$ LE TRANSVERSAL NUMBER (MIN FVS), $\tau^+(G)$ LE MIN FVS+ (CYCLES POSITIFS), $\nu(G)$ LE PACKING NUMBER (MAX CYCLES DISJOINTS), $\nu^*(G)$ SPECIAL PACKING NUMBER.

VRAI POUR TOUT BLOC-SÉQ ET AUSSI EN ASYNCHRONE.

PREUVE DE $\max PF(G) \leqslant 2^{\tau^+(G)}$ [ARACENA 2008].

SOIENT f UN BAN T.Q. $G_f = G$

ET $V \subseteq [n]$ UN FVS+.

ON MONTRE QUE $g : \{x \mid f(x) = x\} \longrightarrow \{0,1\}^V$

$x \longmapsto x_V$ EST INJECTIVE.

SOIENT $x \neq y$ DEUX POINTS FIXES DE f.

ON MONTRE QUE x ET y DIFFÈRENT SUR TOUT UN CYCLE POSITIF, DONC $g(x) \neq g(y)$.

SOIT $i \in [n]$ AVEC $x_i = 0 < 1 = y_i$.

IDÉE : CE PASSAGE DE $f_i(x) = 0$ À $f_i(y) = 1$ DOIT AVOIR UNE EXPLICATION.

PAR L'ABSURDE, SUPPOSONS QUE $\forall j \in N^+(i) : x_j \geqslant y_j$

ET $\forall j \in N^-(i) : x_j \leqslant y_j$

ALORS, PUISQUE G EST SIMPLE, $x_i = f_i(x) \leqslant f_i(y) = y_i$ {CAR SINON ON AJOUTE UN SIGNE INEXISTANT DANS G.

DONC IL EXISTE

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} j \xrightarrow{\ +\ } & i & \text{OU} & j \xrightarrow{\ -\ } & i \\ x_j = 0 & x_i = 0 & & x_j = 1 & x_i = 0 \\ y_j = 1 & y_i = 1 & & y_j = 0 & y_i = 1 \end{array}}_{j \,\to\, i \text{ AVEC FLIP} \,\Leftrightarrow\, \text{NÉGATIF}}.$$

PAR INDUCTION, ON RETOMBERA SUR UN AUTOMATE DÉJÀ VISITÉ.

POUR LUI ATTRIBUER LES MÊMES VALEURS BOOLÉENNES,

IL FAUDRA AVOIR FAIT UN NOMBRE PAIR DE FLIPS $\Leftrightarrow$ CYCLE POSITIF. □

(BORNE ATTEINTE)

IV. COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE (MAJ PARALLÈLE)

GRAPHE D'INTÉRACTION ET MAXPF.

SUR n AUTOMATES, IL Y A 2^{n2^n} RÉSEAUX D'AUTOMATES BOOLÉENS ET 4^{n^2} G.I. SIGNÉS.

$\{\emptyset, +, -, \pm\}$ ↓

(RMK : $\circ \xrightarrow{\pm} \circ$ IMPOSSIBLE)

POUR UN SOMMET DE DEGRÉ ENTRANT d DONT LES ARCS ENTRANT SONT SIGNÉS SIMPLEMENT,
IL Y A

d	0	1	2	3	4	5	6
#	2	1	2	9	114	6894	7785062

FONCTIONS LOCALES (MONOTONES) CORRESPONDANTES.

THÉORÈME [BRIDOUX, DURBEC, P, RICHARD 2019, 2022].

ÉTANT DONNÉ G SIGNÉ, DÉCIDER SI

- MAXPF$(G) \geq k$ FIXÉ EST DANS P POUR $k=1$ ↙ ALGO NON-TRIVIAL POUR L'EXISTENCE DE CYCLE POSITIF. (EXISTENCE DE CYCLE NÉGATIF DANS NL).
  NP-COMPLET POUR $k \geq 2$.
- ~~MAX~~MINPF$(G) < k$ FIXÉ EST NEXPTIME-COMPLET POUR TOUT k.

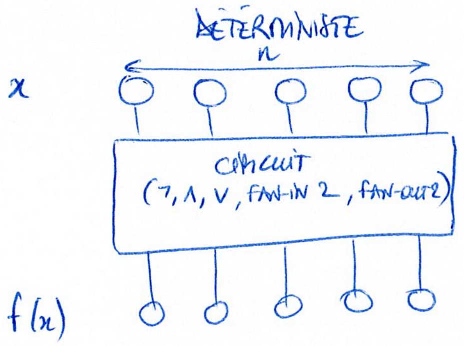
SUR L'INFORMATION CONTENUE DANS LE GRAPHE D'INTERACTION NON SIGNÉ :

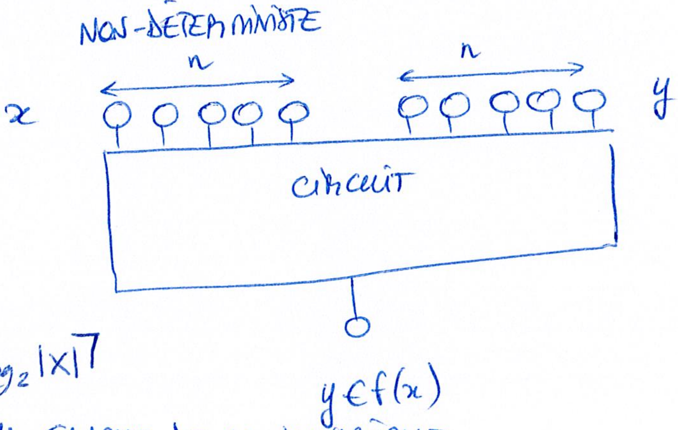
THÉORÈME [PICARD, RICHARD, 2020]. SOIT K_n LE GRAPHE COMPLET.
À ISOMORPHISME PRÈS (RENOMMAGE DES CONFIGURATIONS), TOUTE DYNAMIQUE $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ PEUT ÊTRE OBTENUE AVEC $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ TELLE QUE $g \sim f$ ET $G_g = K_n$, SAUF :

- L'IDENTITÉ $(\forall x : f(x) = x)$ DONT LE G.I. A UNIQUEMENT n BOUCLES,
- LA CONSTANTE $(\exists y : \forall x : f(x) = y)$ DONT LE G.I. N'A AUCUN ARC.

QUESTIONS SUR LA DYNAMIQUE, AVEC f EN ENTRÉE.

FONCTIONS LOCALES ENCODÉES PAR DES CIRCUITS BOOLÉENS.





CAS NON BOOLÉEN : $n \rightsquigarrow \lceil \log_2 |X| \rceil$

REPRÉSENTATION SUCCINCTE DU GRAPHE DE LA DYNAMIQUE.

THÉORÈME [ALON 1985] :

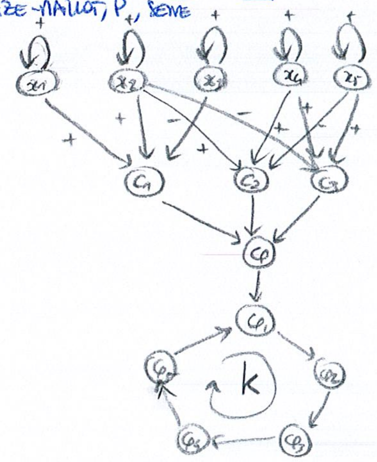
ÉTANT DONNÉ UN R.A.B. f DE TAILLE n, DÉCIDER SI $\exists x \in \{0,1\}^n : f(x) = x$ EST NP-COMPLET.

PREUVE : "WE OMIT THE DETAILS".

COROLLAIRE : MÊME AVEC LA RESTRICTION (PROMESSE) $\Delta(G_f) \leq 2$.
COMPTER LES POINTS FIXES EST #P-COMPLET.

THÉORÈME [BRIDOUX+21] : $\exists$ UN CYCLE LIMITE DE TAILLE k FIXÉE EST NP-COMPLET.
GAZE-MAILLOT, P., SENE

PREUVE :



$C\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$
$\wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$
$\wedge (\neg x_2 \vee x_4 \vee x_5)$

$\Delta(G_f) \leq 2$ TOUJOURS POSSIBLE

EXERCICE : MONTRER QUE L'EXISTENCE D'UNE PRÉIMAGE (ENTRÉE : f, x) EST NP-COMPLET.
($f_i(x) = C\varphi(x)$ POUR TOUT $i \in [n]$, ALORS $f^{-1}(1^n) =$ MODÈLES DE $C\varphi$.)

THÉORÈME : DÉCIDER SI f EST L'IDENTITÉ EST coNP-COMPLET.
———————— CONSTANTE ————————.

PREUVE : DEPUIS UNSAT : $f_i(x) = x_i \oplus C\varphi(x)$ ET $f_i(x) = C\varphi(x)$.

THÉORÈME : ———————— BIJECTIVE ————————.

THÉORÈMES : L'ATTEIGNABILITÉ (ENTRÉE : f, x, y) ET LA NILPOTENCE ($|\Omega_f| = 1$)
SONT PSPACE-COMPLETS.

LOGIQUE DE GRAPHES : F.O. AVEC SIGNATURE $\{=, \to\}$

- $\exists x : x \to x$ NP-c
- $\forall x : \neg(x \to x)$ coNP-c
- $\exists x^1, \dots, x^k : x^1 \to x^2 \wedge x^2 \to x^3 \wedge \dots \wedge x^k \to x^1$ NP-c
- $\forall x, x', y, y' : (x \to y \wedge x' \to y' \wedge y = y') \Rightarrow (x = x')$. coNP.
- $\exists x : \forall y : y \to x$: coNP.
- $\exists x, y : x \to y$ ⚠ $O(1)$.

φ EST NON-TRIVIALE LORSQU'ELLE A UNE INFINITÉ DE R.A. MODÈLES
ET UNE INFINITÉ DE R.A. CONTRE-MODÈLES.

THÉORÈME [GAMARD, GUILLON, P, THEYSSIER, 2021]. SI φ EST NON-TRIVIAL (FIXÉE) ALORS DÉCIDER SI LE GRAPHE DE LA DYNAMIQUE DE f EST UN MODÈLE DE φ EST NP-DIFFICILE OU CONP-DIFFICILE.

NB : LA PREUVE REQUIERT DES ALPHABETS ARBITRAIRES CAR n AUTOMATES BOOLÉENS $\Rightarrow |V| = 2^n$.
ALIÉNOR GOUBAULT--LARRECQ $\Rightarrow$ BOOLÉEN.

CALCULER G_f

ENSUITE → **THÉORÈME** : ÉTANT DONNÉS f ET G, DÉCIDER SI $G_f = G$ EST DP-COMPLET.

D'ABORD → **INTUITION** : $(i,j) \in G_f \Leftrightarrow \exists x : f_j(x + e_i) \neq f_j(x)$.

- DÉCIDER L'EXISTENCE D'UN ARC EST NP-COMPLET
  ($n+1$ AUTOMATES ET $f_j(x) = \varphi($ $)$)
- DÉCIDER L'ABSENCE D'UN ARC EST CONP-COMPLET
- DÉCIDER LES DÉPENDANCES EFFECTIVES EST NP-DUR ET CONP-DUR ...

$$DP = \{ L_1 \cap L_2 \mid L_1 \in NP \text{ ET } L_2 \in coNP \}.$$

REDUCTION DEPUIS SAT-UNSAT (ENTRÉE : φ ET φ').