Sémantique dénotationnelle

Luigi Santocanale

Laboratoire d'Informatique Fondamentale,
Centre de Mathématiques et Informatique,
39, rue Joliot-Curie - F-13453 Marseille

Plan

1. Sémantique dénotationnelle du langage IML
   - Définition
   - Sémantique dénotationnelle vs. sémantique opérationnelle
2. Treillis complets et le théorème de Tarski
   - Treillis complets
   - Les théorèmes de point fixe
3. Sémantique abstraite : introduction à la théorie des domaines

Plan

À chaque expression/commande du langage on associe une rélation, son interprétation :

$$\| \cdot \|_{\mathcal{A}exp} : \mathcal{A}exp \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{N})$$

$$\| \cdot \|_{\mathcal{B}exp} : \mathcal{B}exp \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \{1, 0\})$$

$$\| \cdot \|_{\mathcal{C}om} : \mathcal{C}om \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{S})$$

Interprétation des expressions arithmétiques

$$\| \hat{n} \| = \{ (\sigma, n) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| X \| = \{ (\sigma, \sigma(X)) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| a_1 + a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 + n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 - a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 - n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 * a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

Interprétation des expressions arithmétiques

$$\| \hat{n} \| = \{ (\sigma, n) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| X \| = \{ (\sigma, \sigma(X)) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| a_1 + a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 + n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 - a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 - n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 * a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

Interprétation des expressions arithmétiques

$$\| \hat{n} \| = \{ (\sigma, n) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| X \| = \{ (\sigma, \sigma(X)) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| a_1 + a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 + n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 - a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 - n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 * a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

Interprétation des expressions arithmétiques

$$\| \hat{n} \| = \{ (\sigma, n) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| X \| = \{ (\sigma, \sigma(X)) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| a_1 + a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 + n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 - a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 - n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 * a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

Interprétation des expressions arithmétiques

$$\| \hat{n} \| = \{ (\sigma, n) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| X \| = \{ (\sigma, \sigma(X)) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| a_1 + a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 + n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, \ (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 - a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 - n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, \ (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

$$\| a_1 * a_2 \| = \{ (\sigma, n_1 n_2) \mid (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|, \ (\sigma, n_2) \in \| a_2 \| \}$$

Interprétation des expressions booléennes

$$\| \mathit{true} \| = \{ (\sigma, 1) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| \mathit{false} \| = \ldots$$

$$\| \mathit{not}\ b \| = \{ (\sigma, 1) \mid (\sigma, 0) \in \| b \| \} \cup \{ (\sigma, 0) \mid (\sigma, 1) \in \| b \| \}$$

$$\| b_1\ \mathit{and}\ b_2 \| = \ldots$$

$$\| b_1\ \mathit{or}\ b_2 \| = \ldots$$

$$\| b_1 \ <= \ b_2 \| = \{ (\sigma, 1) \mid \exists n_1 \leq n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\cup \{ (\sigma, 0) \mid \exists n_1 > n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\| b_1 \ = \ b_2 \| = \ldots$$

Exercice : compléter la définition.

Interprétation des expressions booléennes

$$\| \mathit{true} \| = \{ (\sigma, 1) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| \mathit{false} \| = \ldots$$

$$\| \mathit{not}\ b \| = \{ (\sigma, 1) \mid (\sigma, 0) \in \| b \| \} \cup \{ (\sigma, 0) \mid (\sigma, 1) \in \| b \| \}$$

$$\| b_1\ \mathit{and}\ b_2 \| = \ldots$$

$$\| b_1\ \mathit{or}\ b_2 \| = \ldots$$

$$\| b_1 <= b_2 \| = \{ (\sigma, 1) \mid \exists n_1 \leq n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$
$$\cup \{ (\sigma, 0) \mid \exists n_1 > n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\| b_1 = b_2 \| = \ldots$$

Exercice : compléter la définition.

Interprétation des expressions booléennes

$$\| \mathit{true} \| = \{ (\sigma, 1) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| \mathit{false} \| = \ldots$$

$$\| \mathit{not}\ b \| = \{ (\sigma, 1) \mid (\sigma, 0) \in \| b \| \} \cup \{ (\sigma, 0) \mid (\sigma, 1) \in \| b \| \}$$

$$\| b_1\ \mathit{and}\ b_2 \| = \ldots$$

$$\| b_1\ \mathit{or}\ b_2 \| = \ldots$$

$$\| b_1 \ {<=}\ b_2 \| = \{ (\sigma, 1) \mid \exists n_1 \leq n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\cup \{ (\sigma, 0) \mid \exists n_1 > n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\| b_1 = b_2 \| = \ldots$$

Exercice : compléter la définition.

Interprétation des expressions booléennes

$$\| \, \mathit{true} \, \| = \{ (\sigma, 1) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| \, \mathit{false} \, \| = \ldots$$

$$\| \, \mathit{not}\ b \, \| = \{ (\sigma, 1) \mid (\sigma, 0) \in \| \, b \, \| \} \cup \{ (\sigma, 0) \mid (\sigma, 1) \in \| \, b \, \| \}$$

$$\| \, b_1\ \mathit{and}\ b_2 \, \| = \ldots$$

$$\| \, b_1\ \mathit{or}\ b_2 \, \| = \ldots$$

$$\| \, b_1 \ <= \ b_2 \, \| = \{ (\sigma, 1) \mid \exists n_1 \leq n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| \, b_1 \, \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| \, b_2 \, \| \}$$
$$\cup \{ (\sigma, 0) \mid \exists n_1 > n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| \, b_1 \, \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| \, b_2 \, \| \}$$

$$\| \, b_1 \ = \ b_2 \, \| = \ldots$$

Exercice : compléter la définition.

Interprétation des expressions booléennes

$$\| \mathit{true} \| = \{ (\sigma, 1) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| \mathit{false} \| = \ldots$$

$$\| \mathit{not}\ b \| = \{ (\sigma, 1) \mid (\sigma, 0) \in \| b \| \} \cup \{ (\sigma, 0) \mid (\sigma, 1) \in \| b \| \}$$

$$\| b_1\ \mathit{and}\ b_2 \| = \ldots$$

$$\| b_1\ \mathit{or}\ b_2 \| = \ldots$$

$$\| b_1 \ <= \ b_2 \| = \{ (\sigma, 1) \mid \exists n_1 \leq n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$
$$\cup \{ (\sigma, 0) \mid \exists n_1 > n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\| b_1 \ = \ b_2 \| = \ldots$$

Exercice : compléter la définition.

Interprétation des expressions booléennes

$$\| \mathit{true} \| = \{ (\sigma, 1) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| \mathit{false} \| = \dots$$

$$\| \mathit{not}\ b \| = \{ (\sigma, 1) \mid (\sigma, 0) \in \| b \| \} \cup \{ (\sigma, 0) \mid (\sigma, 1) \in \| b \| \}$$

$$\| b_1\ \mathit{and}\ b_2 \| = \dots$$

$$\| b_1\ \mathit{or}\ b_2 \| = \dots$$

$$\| b_1 <= b_2 \| = \{ (\sigma, 1) \mid \exists n_1 \leq n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\cup \{ (\sigma, 0) \mid \exists n_1 > n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\| b_1 = b_2 \| = \dots$$

Exercice : compléter la définition.

Interprétation des expressions booléennes

$$\| \mathit{true} \| = \{ (\sigma, 1) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| \mathit{false} \| = \dots$$

$$\| \mathit{not}\ b \| = \{ (\sigma, 1) \mid (\sigma, 0) \in \| b \| \} \cup \{ (\sigma, 0) \mid (\sigma, 1) \in \| b \| \}$$

$$\| b_1\ \mathit{and}\ b_2 \| = \dots$$

$$\| b_1\ \mathit{or}\ b_2 \| = \dots$$

$$\| b_1 \ <=\ b_2 \| = \{ (\sigma, 1) \mid \exists n_1 \leq n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$
$$\cup \{ (\sigma, 0) \mid \exists n_1 > n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \| b_1 \| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \| b_2 \| \}$$

$$\| b_1 \ =\ b_2 \| = \dots$$

Exercice : compléter la définition.

Interprétation des expressions booléennes

$$\|\, \mathit{true} \,\| = \{\, (\sigma, 1) \mid \sigma \in \mathcal{S} \,\}$$

$$\|\, \mathit{false} \,\| = \ldots$$

$$\|\, \mathit{not}\ b \,\| = \{\, (\sigma, 1) \mid (\sigma, 0) \in \|\, b \,\| \,\} \cup \{\, (\sigma, 0) \mid (\sigma, 1) \in \|\, b \,\| \,\}$$

$$\|\, b_1\ \mathit{and}\ b_2 \,\| = \ldots$$

$$\|\, b_1\ \mathit{or}\ b_2 \,\| = \ldots$$

$$\|\, b_1\ <=\ b_2 \,\| = \{\, (\sigma, 1) \mid \exists n_1 \leq n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \|\, b_1 \,\| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \|\, b_2 \,\| \,\}$$
$$\cup \{\, (\sigma, 0) \mid \exists n_1 > n_2 \text{ t.c. } (\sigma, n_1) \in \|\, b_1 \,\| \text{ et } (\sigma, n_2) \in \|\, b_2 \,\| \,\}$$

$$\|\, b_1\ =\ b_2 \,\| = \ldots$$

Exercice : compléter la définition.

Interprétation des commandes

$$\| \mathit{skip} \| = \{ (\sigma, \sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

$$\| c_1 ; c_2 \| = \{ (\sigma_1, \sigma_3) \mid \exists \sigma_2 \text{ t.q. } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \| \text{ et } (\sigma_2, \sigma_3) \in \| c_2 \| \}$$

$$\| X := a \| = \{ (\sigma, \sigma[n/X]) \mid (\sigma, n) \in \| a \|_{\mathcal{A}exp} \}$$

$$\| \mathit{if}\ (\ b\ )\ \mathit{then}\ c_1\ \mathit{else}\ c_2 \| = \{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \| \mid (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \} \cup \{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_2 \| \mid (\sigma_1, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \}$$

Interprétation des commandes

$$\| \, skip \, \| = \{ \, (\sigma, \sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \, \}$$

$$\begin{aligned} \| \, c_1 ; c_2 \, \| = \{ \, (\sigma_1, \sigma_3) \mid \exists \sigma_2 \text{ t.q. } & (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_1 \, \| \text{ et} \\ & (\sigma_2, \sigma_3) \in \| \, c_2 \, \| \, \} \end{aligned}$$

$$\| \, X := a \, \| = \{ \, (\sigma, \sigma[n/X]) \mid (\sigma, n) \in \| \, a \, \|_{\mathcal{A}exp} \, \}$$

$$\begin{aligned} & \| \, if \, (\, b \,) \, then \; c_1 \; else \; c_2 \, \| \\ & \quad = \{ \, (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_1 \, \| \mid (\sigma_1, 1) \in \| \, b \, \|_{\mathcal{B}exp} \, \} \\ & \quad \cup \; \{ \, (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_2 \, \| \mid (\sigma_1, 0) \in \| \, b \, \|_{\mathcal{B}exp} \, \} \end{aligned}$$

Interprétation des commandes

$$\| \, skip \, \| = \{ \, (\sigma, \sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \, \}$$

$$\begin{aligned} \| \, c_1 ; c_2 \, \| = \{ \, (\sigma_1, \sigma_3) \mid \exists \sigma_2 \text{ t.q. } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_1 \, \| \text{ et} \\ (\sigma_2, \sigma_3) \in \| \, c_2 \, \| \, \} \end{aligned}$$

$$\| \, X := a \, \| = \{ \, (\sigma, \sigma[n/X]) \mid (\sigma, n) \in \| \, a \, \|_{\mathcal{A}exp} \, \}$$

$$\begin{aligned} &\| \, if \, (\, b \,) \, then \, c_1 \, else \, c_2 \, \| \\ &\quad = \{ \, (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_1 \, \| \mid (\sigma_1, 1) \in \| \, b \, \|_{\mathcal{B}exp} \, \} \\ &\quad \cup \; \{ \, (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_2 \, \| \mid (\sigma_1, 0) \in \| \, b \, \|_{\mathcal{B}exp} \, \} \end{aligned}$$

Interprétation des commandes

$$\| \, skip \, \| = \{ \, (\sigma, \sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \, \}$$

$$\begin{aligned} \| \, c_1 ; c_2 \, \| = \{ \, (\sigma_1, \sigma_3) \mid \exists \sigma_2 \text{ t.q. } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_1 \, \| \text{ et} \\ (\sigma_2, \sigma_3) \in \| \, c_2 \, \| \, \} \end{aligned}$$

$$\| \, X := a \, \| = \{ \, (\sigma, \sigma[n/X]) \mid (\sigma, n) \in \| \, a \, \|_{\mathcal{A}exp} \, \}$$

$$\begin{aligned} & \| \, if \; (\, b \,) \; then \; c_1 \; else \; c_2 \, \| \\ & \qquad = \{ \, (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_1 \, \| \mid (\sigma_1, 1) \in \| \, b \, \|_{\mathcal{B}exp} \, \} \\ & \qquad \cup \;\; \{ \, (\sigma_1, \sigma_2) \in \| \, c_2 \, \| \mid (\sigma_1, 0) \in \| \, b \, \|_{\mathcal{B}exp} \, \} \end{aligned}$$

Interprétation du commande `while ... do ...`

Soit $b \in \mathcal{B}exp$ et $comm \in \mathcal{C}om$.
Posons :

$$
\begin{aligned}
f(R) = \{\, (\sigma,\sigma) \mid (\sigma,0) \in \|\, b \,\|_{\mathcal{B}exp} \,\} \\
\cup \quad \{\, (\sigma_1,\sigma_3) \mid (\sigma,1) \in \|\, b \,\|_{\mathcal{B}exp} \text{ et} \\
\exists \sigma_2 \text{ t.q. } (\sigma_1,\sigma_2) \in \|\, comm \,\| \text{ et } (\sigma_2,\sigma_3) \in R \,\}
\end{aligned}
$$

Observons :

- $f : \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{S})$ est une fonction croissante,
- si $c \in \mathcal{C}om$, alors

$$
f(\|\, c \,\|) = \|\, if\ (\ b\ )\ then\ comm\ ;\ c\ else\ skip \,\| \tag{1}
$$

Interprétation de `while ... do ...` (II)

Définissons

$$\begin{aligned} \| \, \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ \mathit{comm} \, \| &= \mathit{fix}(f) \\ &= \text{plus petit point fixe de } f. \end{aligned}$$

De cette façon :

$$\begin{aligned} &\| \, \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ \mathit{comm} \, \| \\ &\qquad = f(\, \| \, \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ \mathit{comm} \, \| \,) \\ &\qquad = \| \, \mathit{if}\ (\, b\,)\ \mathit{then}\ \mathit{comm}\, ;\ \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ \mathit{comm}\ \mathit{else}\ \mathit{skip} \, \| \end{aligned}$$

à cause de (1).

Interprétation de `while ... do ...` (II)

Définissons

$$\begin{aligned} \| \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ \mathit{comm} \| &= \mathit{fix}(f) \\ &= \text{plus petit point fixe de } f. \end{aligned}$$

De cette façon :

$$\begin{aligned} &\| \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ \mathit{comm} \| \\ &\qquad = f(\, \| \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ \mathit{comm} \| \,) \\ &\qquad = \| \mathit{if}\ (\, b\,)\ \mathit{then}\ \mathit{comm}\, ;\ \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ \mathit{comm}\ \mathit{else}\ \mathit{skip} \| \end{aligned}$$

à cause de (1).

Équivalences

Définition

$$a \equiv_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \| a \|_{\mathcal{A}exp} = \| a' \|_{\mathcal{A}exp}$$

$$b \equiv_{\mathcal{B}exp} b' \text{ ssi } \| b \|_{\mathcal{B}exp} = \| b' \|_{\mathcal{A}exp}$$

$$c \equiv_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \| c \|_{\mathcal{C}om} = \| c' \|_{\mathcal{C}om}$$

Exemple : on vient de montrer que

$$\textit{while } b \textit{ do comm}$$

$$\equiv_{\mathcal{C}om} \textit{if } b \textit{ then comm; while } b \textit{ do comm else skip}$$

Équivalences

Définition

$$a \equiv_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \parallel a \parallel_{\mathcal{A}exp} = \parallel a' \parallel_{\mathcal{A}exp}$$

$$b \equiv_{\mathcal{B}exp} b' \text{ ssi } \parallel b \parallel_{\mathcal{B}exp} = \parallel b' \parallel_{\mathcal{A}exp}$$

$$c \equiv_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \parallel c \parallel_{\mathcal{C}om} = \parallel c' \parallel_{\mathcal{C}om}$$

Exemple : on vient de montrer que

$$\textit{while } b \textit{ do comm}$$

$$\equiv_{\mathcal{C}om} \textit{if } b \textit{ then comm}; \textit{while } b \textit{ do comm else skip}$$

Équivalences

Définition

$$a \equiv_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \| a \|_{\mathcal{A}exp} = \| a' \|_{\mathcal{A}exp}$$

$$b \equiv_{\mathcal{B}exp} b' \text{ ssi } \| b \|_{\mathcal{B}exp} = \| b' \|_{\mathcal{A}exp}$$

$$c \equiv_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \| c \|_{\mathcal{C}om} = \| c' \|_{\mathcal{C}om}$$

Exemple : on vient de montrer que

$$\begin{aligned} &\textit{while } b \textit{ do comm} \\ &\qquad \equiv_{\mathcal{C}om} \textit{if } b \textit{ then comm; while } b \textit{ do comm else skip} \end{aligned}$$

Équivalences

Définition

$$a \equiv_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \| a \|_{\mathcal{A}exp} = \| a' \|_{\mathcal{A}exp}$$

$$b \equiv_{\mathcal{B}exp} b' \text{ ssi } \| b \|_{\mathcal{B}exp} = \| b' \|_{\mathcal{A}exp}$$

$$c \equiv_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \| c \|_{\mathcal{C}om} = \| c' \|_{\mathcal{C}om}$$

Exemple : on vient de montrer que

$$\begin{aligned} & \textit{while } b \textit{ do comm} \\ & \qquad \equiv_{\mathcal{C}om} \textit{if } b \textit{ then comm}; \textit{while } b \textit{ do comm else skip} \end{aligned}$$

Plan

Rapport entre les sémantiques

- sémantique opérationnelle,
- sémantique denotationnelle,
- sémantique axiomatique,
- sémantique ...

Quelle cohérence ?

Proposition

Le sémantique opérationnelle est la même que la sémantique dénotationnelle :

$$c \sim c' \text{ssi } c \equiv c' .$$

Rapport entre les sémantiques

- sémantique opérationnelle,
- sémantique denotationnelle,
- sémantique axiomatique,
- sémantique ...

Quelle cohérence ?

Proposition

Le sémantique opérationnelle est la même que la sémantique dénotationnelle :

$$c \sim c' \text{ssi } c \equiv c' .$$

Rapport entre les sémantiques (II)

Plus précisément :

Proposition

$\forall a \in \mathcal{A}exp$

$$\| a \|_{\mathcal{A}exp} = \{ (\sigma, n) \mid (a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n \}$$

$\forall b \in \mathcal{B}exp$

$$\| b \|_{\mathcal{B}exp} = \{ (\sigma, v) \mid (b, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v \}$$

$\forall c \in \mathcal{C}om$

$$\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \} .$$

Rapport entre les sémantiques (II)

Plus précisément :

Proposition

$\forall a \in \mathcal{A}exp$

$$\| \, a \, \|_{\mathcal{A}exp} = \{ \, (\sigma, n) \mid (a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n \, \}$$

$\forall b \in \mathcal{B}exp$

$$\| \, b \, \|_{\mathcal{B}exp} = \{ \, (\sigma, v) \mid (b, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v \, \}$$

$\forall c \in \mathcal{C}om$

$$\| \, c \, \|_{\mathcal{C}om} = \{ \, (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \, \} \, .$$

Rapport entre les sémantiques (II)

Plus précisément :

Proposition

$$\forall a \in \mathcal{A}exp$$

$$\| a \|_{\mathcal{A}exp} = \{ (\sigma, n) \mid (a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n \}$$

$$\forall b \in \mathcal{B}exp$$

$$\| b \|_{\mathcal{B}exp} = \{ (\sigma, v) \mid (b, \sigma) \to_{\mathcal{B}exp} v \}$$

$$\forall c \in \mathcal{C}om$$

$$\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma' \} .$$

Preuve : $\| a \|_{\mathcal{A}exp} = \{ (\sigma, n) \mid (a, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \}$

Par induction sur la structure de a.

$$\begin{aligned}
(\sigma, n) \in \| \hat{m} \|_{\mathcal{A}exp} & \text{ ssi } m = n \\
& \text{ ssi } (\hat{m}, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma, n) \in \| X \|_{\mathcal{A}exp} & \text{ ssi } \sigma(X) = n \\
& \text{ ssi } (X, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n
\end{aligned}$$

Supposons la proprieté vraie pour a_0, a_1.

$$\begin{aligned}
& (\sigma, n) \in \| a_0 + a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
& \text{ssi } \exists n_0, n_1 \ \ (\sigma, n_0) \in \| a_0 \|_{\mathcal{A}exp}, \ \ (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
& \quad \text{et } n = n_0 + n_1 \\
& \text{ssi } \exists n_0, n_1 \ \ (a_0, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_0, \ \ (a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_1, \\
& \quad \text{et } n = n_0 + n_1 \\
& \text{ssi } (a_0 + a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \,.
\end{aligned}$$

Preuve : $\| a \|_{\mathcal{A}exp} = \{ (\sigma, n) \mid (a, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \}$

Par induction sur la structure de a.

$$
\begin{aligned}
(\sigma, n) \in \| \hat{m} \|_{\mathcal{A}exp} \ &\text{ssi} \ \ m = n \\
&\text{ssi} \ \ (\hat{m}, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma, n) \in \| X \|_{\mathcal{A}exp} \ &\text{ssi} \ \ \sigma(X) = n \\
&\text{ssi} \ \ (X, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n
\end{aligned}
$$

Supposons la proprieté vraie pour a_0, a_1.

$$
\begin{aligned}
&(\sigma, n) \in \| a_0 + a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\quad \text{ssi} \ \exists n_0, n_1 \ \ (\sigma, n_0) \in \| a_0 \|_{\mathcal{A}exp}, \ \ (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\qquad \text{et} \ n = n_0 + n_1 \\
&\quad \text{ssi} \ \exists n_0, n_1 \ \ (a_0, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_0, \ \ (a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_1, \\
&\qquad \text{et} \ n = n_0 + n_1 \\
&\quad \text{ssi} \ (a_0 + a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \,.
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| a \|_{\mathcal{A}exp} = \{ (\sigma, n) \mid (a, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \}$

Par induction sur la structure de a.

$$
\begin{aligned}
(\sigma, n) \in \| \hat{m} \|_{\mathcal{A}exp} \ & \text{ssi} \ \ m = n \\
& \text{ssi} \ \ (\hat{m}, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma, n) \in \| X \|_{\mathcal{A}exp} \ & \text{ssi} \ \ \sigma(X) = n \\
& \text{ssi} \ \ (X, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n
\end{aligned}
$$

Supposons la proprieté vraie pour a_0, a_1.

$$
\begin{aligned}
& (\sigma, n) \in \| a_0 + a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
& \quad \text{ssi} \ \ \exists n_0, n_1 \ \ (\sigma, n_0) \in \| a_0 \|_{\mathcal{A}exp}, \ \ (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
& \qquad \text{et} \ \ n = n_0 + n_1 \\
& \quad \text{ssi} \ \ \exists n_0, n_1 \ \ (a_0, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_0, \ \ (a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_1, \\
& \qquad \text{et} \ \ n = n_0 + n_1 \\
& \quad \text{ssi} \ \ (a_0 + a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \, .
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| a \|_{\mathcal{A}exp} = \{ (\sigma, n) \mid (a, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \}$

Par induction sur la structure de a.

$$
\begin{array}{rll}
(\sigma, n) \in \| \hat{m} \|_{\mathcal{A}exp} & \text{ssi} & m = n \\
& \text{ssi} & (\hat{m}, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \\
(\sigma, n) \in \| X \|_{\mathcal{A}exp} & \text{ssi} & \sigma(X) = n \\
& \text{ssi} & (X, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n
\end{array}
$$

Supposons la proprieté vraie pour a_0, a_1.

$$
\begin{array}{l}
(\sigma, n) \in \| a_0 + a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
\quad \text{ssi} \;\; \exists n_0, n_1 \;\; (\sigma, n_0) \in \| a_0 \|_{\mathcal{A}exp}, \;\; (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
\quad \qquad \text{et} \;\; n = n_0 + n_1 \\
\quad \text{ssi} \;\; \exists n_0, n_1 \;\; (a_0, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_0, \;\; (a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_1, \\
\quad \qquad \text{et} \;\; n = n_0 + n_1 \\
\quad \text{ssi} \;\; (a_0 + a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n \, .
\end{array}
$$

Suite preuve

On raisonne de façon semblable pour $a_0 - a_1$ et $a_0 * a_1$:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma, n) \in \| a_0 - a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\quad \text{ssi } \exists n_0, n_1 \; (\sigma, n_0) \in \| a_0 \|_{\mathcal{A}exp}, \; (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\qquad \text{et } n = n_0 - n_1 \\
&\quad \text{ssi } \exists n_0, n_1 \; (a_0, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n_0, \; (a_1, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n_1, \\
&\qquad \text{et } n = n_0 - n_1 \\
&\quad \text{ssi } (a_0 - a_1, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n \,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exercice :
montrer le résultat analogue

$$\| b \|_{\mathcal{B}exp} = \{ (\sigma, v) \mid (b, \sigma) \to_{\mathcal{B}exp} v \}$$

pour les expression Booléennes.

Suite preuve

On raisonne de façon semblable pour $a_0 - a_1$ et $a_0 * a_1$:

$$\begin{aligned}
&(\sigma, n) \in \| a_0 - a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\qquad \text{ssi } \exists n_0, n_1 \ (\sigma, n_0) \in \| a_0 \|_{\mathcal{A}exp}, \ (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\qquad\qquad \text{et } n = n_0 - n_1 \\
&\qquad \text{ssi } \exists n_0, n_1 \ (a_0, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_0, \ (a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n_1, \\
&\qquad\qquad \text{et } n = n_0 - n_1 \\
&\qquad \text{ssi } (a_0 - a_1, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{A}exp} n\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice :
montrer le résultat analogue

$$\| b \|_{\mathcal{B}exp} = \{ (\sigma, v) \mid (b, \sigma) \longrightarrow_{\mathcal{B}exp} v \}$$

pour les expression Booléennes.

Suite preuve

On raisonne de façon semblable pour $a_0 - a_1$ et $a_0 * a_1$:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma, n) \in \| a_0 * a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\qquad \text{ssi } \exists n_0, n_1 \;\; (\sigma, n_0) \in \| a_0 \|_{\mathcal{A}exp}, \;\; (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\qquad\qquad \text{et } n = n_0 n_1 \\
&\qquad \text{ssi } \exists n_0, n_1 \;\; (a_0, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n_0, \;\; (a_1, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n_1, \\
&\qquad\qquad \text{et } n = n_0 n_1 \\
&\qquad \text{ssi } (a_0 * a_1, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n \,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exercice :
montrer le résultat analogue

$$\| b \|_{\mathcal{B}exp} = \{ (\sigma, v) \mid (b, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v \}$$

pour les expression Booléennes.

Suite preuve

On raisonne de façon semblable pour $a_0 - a_1$ et $a_0 * a_1$:

$$
\begin{aligned}
(\sigma, n) \in \| a_0 * a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
\text{ssi} \;\; & \exists n_0, n_1 \;\; (\sigma, n_0) \in \| a_0 \|_{\mathcal{A}exp}, \;\; (\sigma, n_1) \in \| a_1 \|_{\mathcal{A}exp} \\
& \quad \text{et } n = n_0 n_1 \\
\text{ssi} \;\; & \exists n_0, n_1 \;\; (a_0, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n_0, \;\; (a_1, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n_1, \\
& \quad \text{et } n = n_0 n_1 \\
\text{ssi} \;\; & (a_0 * a_1, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exercice :
montrer le résultat analogue

$$\| b \|_{\mathcal{B}exp} = \{ (\sigma, v) \mid (b, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} v \}$$

pour les expression Booléennes.

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Par induction sur la structure de c.

$$\begin{aligned}
(\sigma, \sigma') \in \| skip \|_{\mathcal{C}om} \quad & \text{ssi} \quad \sigma = \sigma' \\
& \text{ssi} \quad (skip, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma, \sigma') \in \| X := a \|_{\mathcal{C}om} \quad & \text{ssi} \quad \sigma' = \sigma[n/X] \text{ et } (\sigma, n) \in \| a \|_{\mathcal{A}exp} \\
& \text{ssi} \quad \sigma' = \sigma[n/X] \text{ et } (a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n \\
& \text{ssi} \quad (X, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'
\end{aligned}$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Par induction sur la structure de c.

$$
\begin{aligned}
(\sigma, \sigma') \in \| \mathit{skip} \|_{\mathcal{C}om} \ &\text{ssi}\ \ \sigma = \sigma' \\
&\text{ssi}\ \ (\mathit{skip}, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma, \sigma') \in \| X := a \|_{\mathcal{C}om} \ &\text{ssi}\ \ \sigma' = \sigma[n/X] \text{ et } (\sigma, n) \in \| a \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\text{ssi}\ \ \sigma' = \sigma[n/X] \text{ et } (a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n \\
&\text{ssi}\ \ (X, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma'
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Par induction sur la structure de c.

$$
\begin{aligned}
(\sigma, \sigma') \in \| skip \|_{\mathcal{C}om} \ &\text{ssi} \ \sigma = \sigma' \\
&\text{ssi} \ (skip, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma, \sigma') \in \| X := a \|_{\mathcal{C}om} \ &\text{ssi} \ \sigma' = \sigma[n/X] \text{ et } (\sigma, n) \in \| a \|_{\mathcal{A}exp} \\
&\text{ssi} \ \sigma' = \sigma[n/X] \text{ et } (a, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{A}exp} n \\
&\text{ssi} \ (X, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_0, \sigma_2) \in \| c_0 ; c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\qquad \text{ssi } \exists \sigma_1 \ (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \ \text{ et } \ (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\qquad \text{ssi } \exists \sigma_1 \ (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \ \text{ et } \ (c_1, \sigma_1) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
&\qquad \text{ssi } (c_0 ; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_0, \sigma_1) \in \| \mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\qquad \text{ssi } (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
&\qquad\qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\qquad \text{ssi } (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
&\qquad\qquad (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
&\qquad \text{ssi } (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0, \sigma_2) &\in \| c_0 ; c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
\text{ssi } & \exists \sigma_1 \; (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \;\text{ et }\; (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
\text{ssi } & \exists \sigma_1 \; (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \;\text{ et }\; (c_1, \sigma_1) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
\text{ssi } & (c_0 ; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0, \sigma_1) &\in \| \mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
\text{ssi } & (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
& \qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
\text{ssi } & (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
& \qquad (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
\text{ssi } & (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
& (\sigma_0, \sigma_2) \in \| c_0 ; c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \qquad \text{ssi } \exists \sigma_1 \, (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \qquad \text{ssi } \exists \sigma_1 \, (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ et } (c_1, \sigma_1) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
& \qquad \text{ssi } (c_0 ; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (\sigma_0, \sigma_1) \in \| \mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \qquad \text{ssi } (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
& \qquad\qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \qquad \text{ssi } (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
& \qquad\qquad (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
& \qquad \text{ssi } (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
& (\sigma_0, \sigma_2) \in \| c_0 ; c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \qquad \text{ssi } \exists \sigma_1 \ (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \qquad \text{ssi } \exists \sigma_1 \ (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ et } (c_1, \sigma_1) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
& \qquad \text{ssi } (c_0 ; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (\sigma_0, \sigma_1) \in \| \mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \qquad \text{ssi } (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
& \qquad\qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \qquad \text{ssi } (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
& \qquad\qquad (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
& \qquad \text{ssi } (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_0, \sigma_2) \in \| c_0 ; c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\qquad \text{ssi } \exists \sigma_1 \; (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\qquad \text{ssi } \exists \sigma_1 \; (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ et } (c_1, \sigma_1) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
&\qquad \text{ssi } (c_0 ; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_0, \sigma_1) \in \| \mathit{if} \; b \; \mathit{then} \; c_0 \; \mathit{else} \; c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\qquad \text{ssi } (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
&\qquad\qquad\qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\qquad \text{ssi } (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
&\qquad\qquad\qquad (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
&\qquad \text{ssi } (\mathit{if} \; b \; \mathit{then} \; c_0 \; \mathit{else} \; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0, \sigma_2) \in \| c_0; c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\text{ssi } \exists \sigma_1\ (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\text{ssi } \exists \sigma_1\ (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ et } (c_1, \sigma_1) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
&\text{ssi } (c_0; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0, \sigma_1) \in \| \mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\text{ssi } (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
&\qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\text{ssi } (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
&\qquad (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
&\text{ssi } (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1.
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0, \sigma_2) \in \| c_0; c_1 \|_{\mathcal{C}om} & \\
&\text{ssi } \exists \sigma_1 \ (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\text{ssi } \exists \sigma_1 \ (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ et } (c_1, \sigma_1) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
&\text{ssi } (c_0; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0, \sigma_1) \in \| \mathit{if} \ b \ \mathit{then} \ c_0 \ \mathit{else} \ c_1 \|_{\mathcal{C}om} & \\
&\text{ssi } (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
&\qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\text{ssi } (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
&\qquad (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
&\text{ssi } (\mathit{if} \ b \ \mathit{then} \ c_0 \ \mathit{else} \ c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_0, \sigma_2) \in \| c_0 ; c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\quad \text{ssi } \exists \sigma_1 \ (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\quad \text{ssi } \exists \sigma_1 \ (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ et } (c_1, \sigma_1) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
&\quad \text{ssi } (c_0 ; c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_0, \sigma_1) \in \| \mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\quad \text{ssi } (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
&\qquad\qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
&\quad \text{ssi } (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
&\qquad\qquad (b, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
&\quad \text{ssi } (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma_0) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma_1
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Hypothèse d'induction : la propriété est vrai pour c, c_0, c_1.

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0, \sigma_2) \in \| c_0 ; c_1 \|_{\mathcal{C}om} & \\
& \text{ssi } \exists \sigma_1\ (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \text{ssi } \exists \sigma_1\ (c_0, \sigma_0) \to_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ et } (c_1, \sigma_1) \to_{\mathcal{C}om} \sigma_2 \\
& \text{ssi } (c_0 ; c_1, \sigma_0) \to_{\mathcal{C}om} \sigma_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0, \sigma_1) \in \| \mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1 \|_{\mathcal{C}om} & \\
& \text{ssi } (\sigma_0, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_0 \|_{\mathcal{C}om} \text{ ou} \\
& \qquad (\sigma_0, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_0, \sigma_1) \in \| c_1 \|_{\mathcal{C}om} \\
& \text{ssi } (b, \sigma_0) \to_{\mathcal{B}exp} 1 \text{ et } (c_0, \sigma_0) \to_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \text{ ou} \\
& \qquad (b, \sigma_0) \to_{\mathcal{B}exp} 0 \text{ et } (c_1, \sigma_0) \to_{\mathcal{C}om} \sigma_1 \\
& \text{ssi } (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c_0\ \mathit{else}\ c_1, \sigma_0) \to_{\mathcal{C}om} \sigma_1 .
\end{aligned}
$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Rappel :

$$\| \, while\ b\ do\ c \, \|_{\mathcal{C}om} = fix(f)$$

où

$$\begin{aligned} f(X) = \{ (\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \} \\ \cup \quad \{ (\sigma_1, \sigma_3) \mid (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et} \\ \exists \sigma_2 \text{ t.q. } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_2, \sigma_3) \in X \} \end{aligned}$$

On a

$$f(X) = f_R(X)$$

où R est le système de règles suivant :

$$\begin{cases} \emptyset / (\sigma, \sigma) & (\sigma, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \\ (\sigma_2, \sigma_3) / (\sigma_1, \sigma_3) & (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om} \end{cases}$$

et donc $fix(f) = I_R$.

Preuve : $\parallel c \parallel_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Rappel :

$$\parallel \textit{while } b \textit{ do } c \parallel_{\mathcal{C}om} = \mathit{fix}(f)$$

où

$$\begin{aligned} f(X) = \{ (\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \parallel b \parallel_{\mathcal{B}exp} \} \\ \cup \quad \{ (\sigma_1, \sigma_3) \mid (\sigma_1, 1) \in \parallel b \parallel_{\mathcal{B}exp} \text{ et} \\ \exists \sigma_2 \text{ t.q. } (\sigma_1, \sigma_2) \in \parallel c \parallel_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_2, \sigma_3) \in X \} \end{aligned}$$

On a

$$f(X) = f_R(X)$$

où R est le système de règles suivant :

$$\begin{cases} \emptyset / (\sigma, \sigma) & (\sigma, 0) \in \parallel b \parallel_{\mathcal{B}exp} \\ (\sigma_2, \sigma_3) / (\sigma_1, \sigma_3) & (\sigma_1, 1) \in \parallel b \parallel_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \parallel c \parallel_{\mathcal{C}om} \end{cases}$$

et donc $\mathit{fix}(f) = I_R$.

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Rappel :

$$\| \textit{while } b \textit{ do } c \|_{\mathcal{C}om} = \textit{fix}(f)$$

où

$$\begin{aligned} f(X) = \{ (\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \} \\ \cup \quad \{ (\sigma_1, \sigma_3) \mid (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } \\ \exists \sigma_2 \text{ t.q. } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om} \text{ et } (\sigma_2, \sigma_3) \in X \} \end{aligned}$$

On a

$$f(X) = f_R(X)$$

où R est le système de règles suivant :

$$\begin{cases} \emptyset / (\sigma, \sigma) & (\sigma, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \\ (\sigma_2, \sigma_3)/(\sigma_1, \sigma_3) & (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om} \end{cases}$$

et donc $\textit{fix}(f) = I_R$.

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Considérons maintenant l'ensemble

$$A = \{ (\sigma_1, \sigma_3) \mid (while\ b\ do\ c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3 \}$$

Obtenu à l'aide du système de règles :

$$\dfrac{\dfrac{(\sigma_1, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}}{(b, \sigma_1) \rightarrow 0}}{(while\ b\ do\ c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_1}$$

$$\dfrac{\dfrac{(\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}}{(b, \sigma_1) \rightarrow 1} \quad \dfrac{(\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om}}{(c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_2} \quad (while\ b\ do\ c, \sigma_2) \rightarrow \sigma_3}{(while\ b\ do\ c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3}$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Considérons maintenant l'ensemble

$$A = \{ (\sigma_1, \sigma_3) \mid (\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3 \}$$

Obtenu à l'aide du système de règles :

$$\dfrac{\dfrac{(\sigma_1, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}}{(b, \sigma_1) \rightarrow 0}}{(\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_1}$$

$$\dfrac{\dfrac{(\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}}{(b, \sigma_1) \rightarrow 1} \quad \dfrac{(\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om}}{(c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_2} \quad (\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma_2) \rightarrow \sigma_3}{(\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3}$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Considérons maintenant l'ensemble

$$A = \{ (\sigma_1, \sigma_3) \mid (\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3 \}$$

Obtenu à l'aide du système de règles :

$$\frac{\dfrac{(\sigma_1, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}}{(b, \sigma_1) \rightarrow 0}}{(\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_1}$$

$$\frac{\dfrac{(\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}}{(b, \sigma_1) \rightarrow 1} \quad \dfrac{(\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om}}{(c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_2} \quad (\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma_2) \rightarrow \sigma_3}{(\textit{while } b \textit{ do } c, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3}$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Formulation concise des mêmes règles :

$$\frac{}{(\ldots, \sigma_1) \to \sigma_3} \; (\sigma_1, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}$$

$$\frac{(\ldots, \sigma_2) \to \sigma_3}{(\ldots, \sigma_1) \to \sigma_3} \; (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om}$$

c.-à-d. :

Pour montrer que $(\sigma_1, \sigma_3) \in A$
il faut avoir un arbre de dérivation étiquette par les règles de R.

On a donc :

$$A = I_R = fix(f) = \| \textit{while } b \textit{ do } c \|_{\mathcal{C}om} .$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Formulation concise des mêmes règles :

$$\frac{}{(\ldots, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3} \ (\sigma_1, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}$$

$$\frac{(\ldots, \sigma_2) \rightarrow \sigma_3}{(\ldots, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3} \ (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om}$$

c.-à-d. :

Pour montrer que $(\sigma_1, \sigma_3) \in A$
il faut avoir un arbre de dérivation étiquette par les règles de R.

On a donc :

$$A = I_R = fix(f) = \| \textit{while } b \textit{ do } c \|_{\mathcal{C}om} .$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \to_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Formulation concise des mêmes règles :

$$\frac{}{(\ldots, \sigma_1) \to \sigma_3} \; (\sigma_1, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}$$

$$\frac{(\ldots, \sigma_2) \to \sigma_3}{(\ldots, \sigma_1) \to \sigma_3} \; (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om}$$

c.-à-d. :

Pour montrer que $(\sigma_1, \sigma_3) \in A$
il faut avoir un arbre de dérivation étiquette par les règles de R.

On a donc :

$$A = I_R = fix(f) = \| \textit{while } b \textit{ do } c \|_{\mathcal{C}om} \, .$$

Preuve : $\| c \|_{\mathcal{C}om} = \{ (\sigma, \sigma') \mid (c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \}$

Formulation concise des mêmes règles :

$$\frac{}{(\ldots, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3} \; (\sigma_1, 0) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp}$$

$$\frac{(\ldots, \sigma_2) \rightarrow \sigma_3}{(\ldots, \sigma_1) \rightarrow \sigma_3} \; (\sigma_1, 1) \in \| b \|_{\mathcal{B}exp} \text{ et } (\sigma_1, \sigma_2) \in \| c \|_{\mathcal{C}om}$$

c.-à-d. :

Pour montrer que $(\sigma_1, \sigma_3) \in A$
il faut avoir un arbre de dérivation étiquette par les règles de R.

On a donc :

$$A = I_R = \mathit{fix}(f) = \| \mathit{while}\ b\ \mathit{do}\ c \|_{\mathcal{C}om} .$$

□

Plan

1. Sémantique dénotationnelle du langage IML
   - Définition
   - Sémantique dénotationnelle vs. sémantique opérationnelle
2. Treillis complets et le théorème de Tarski
   - Treillis complets
   - Les théorèmes de point fixe
3. Sémantique abstraite : introduction à la théorie des domaines

Ensembles ordonnés

Définition

Un ensemble ordonné est un couple $(P, \leq)$ t.q.$\leq \subseteq P \times P$ est :

- réflexive : $x \leq x$, $\forall x \in P$,
- transitive : $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$, $\forall x, y, z \in P$,
- antisymétrique : $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$, $\forall x, y, \in P$

Définition

Soit $X \subseteq P$ et $p \in P$. p est un *plus petit majorant* de X s'il satisfait

$$\forall x \in X \; x \leq y \quad \text{ssi} \quad p \leq y$$

On écrit alors $p = \bigvee X$. p est un *plus grand minorant* ssi ... alors $p = \bigwedge X$.

Ensembles ordonnés

Définition

Un ensemble ordonné est un couple $(P, \leq)$ t.q.$\leq \subseteq P \times P$ est :

- réflexive : $x \leq x$, $\forall x \in P$,
- transitive : $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$, $\forall x, y, z \in P$,
- antisymétrique : $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$, $\forall x, y, \in P$

Définition

Soit $X \subseteq P$ et $p \in P$. p est un *plus petit majorant* de X s'il satisfait

$$\forall x \in X \; x \leq y \quad \text{ssi} \qquad p \leq y$$

On écrit alors $p = \bigvee X$. p est un *plus grand minorant* ssi ... alors $p = \bigwedge X$.

Ensembles ordonnés

Définition

Un ensemble ordonné est un couple $(P, \leq)$ t.q.$\leq \subseteq P \times P$ est :

- réflexive : $x \leq x$, $\forall x \in P$,
- transitive : $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$, $\forall x, y, z \in P$,
- antisymétrique : $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$, $\forall x, y, \in P$

Définition

Soit $X \subseteq P$ et $p \in P$. p est un *plus petit majorant* de X s'il satisfait

$$\forall x \in X\; x \leq y \quad \text{ssi} \qquad p \leq y$$

On écrit alors $p = \bigvee X$. p est un *plus grand minorant* ssi ... alors $p = \bigwedge X$.

Treillis complets

Remarque : un plus petit (grand) majorant (minorant) est unique.

Définition

Un ensemble ordonné $(P, \leq)$ est un treillis complet ssi pour tout sousensemble $X \subseteq P$ il existe $\bigvee X$.

Lemma

Un treillis complet est aussi « co-complet » :
$\bigwedge X$ existe pour tout $X \subseteq P$.

Preuve : il suffit d'observer que

$$\bigwedge X = \bigvee \{ y \mid \forall x \in X \; x \leq y \} .$$

Treillis complets

Remarque : un plus petit (grand) majorant (minorant) est unique.

Définition

Un ensemble ordonné $(P, \leq)$ est un treillis complet ssi pour tout sousensemble $X \subseteq P$ il existe $\bigvee X$.

Lemma

Un treillis complet est aussi « co-complet » : $\bigwedge X$ existe pour tout $X \subseteq P$.

Preuve : il suffit d'observer que

$$\bigwedge X = \bigvee \{ y \mid \forall x \in X \; x \leq y \} .$$

Treillis complets

Remarque : un plus petit (grand) majorant (minorant) est unique.

Définition

Un ensemble ordonné $(P, \leq)$ est un treillis complet ssi pour tout sousensemble $X \subseteq P$ il existe $\bigvee X$.

Lemma

Un treillis complet est aussi « co-complet » :
$\bigwedge X$ existe pour tout $X \subseteq P$.

Preuve : il suffit d'observer que

$$\bigwedge X = \bigvee \{ y \mid \forall x \in X \; x \leq y \} .$$

Treillis complets

Remarque : un plus petit (grand) majorant (minorant) est unique.

Définition

Un ensemble ordonné $(P, \leq)$ est un treillis complet ssi pour tout sousensemble $X \subseteq P$ il existe $\bigvee X$.

Lemma

Un treillis complet est aussi « co-complet » :
$\bigwedge X$ existe pour tout $X \subseteq P$.

Preuve : il suffit d'observer que

$$\bigwedge X = \bigvee \{\, y \mid \forall x \in X \; x \leq y \,\}\,.$$

Plan

Théorème de Tarski

Théorème de Tarski

Soit $(P, \leq)$ un treillis complet. Alors toute fonction monotone $f : P \longrightarrow P$ possède un point fixe.

Théorème de Davis

Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute fonction monotone $f : P \longrightarrow P$ possède un point fixe. Alors $(P, \leq)$ est un treillis complet.

Théorème de Tarski

Théorème de Tarski

Soit $(P, \leq)$ un treillis complet. Alors toute fonction monotone $f : P \longrightarrow P$ possède un point fixe.

Théorème de Davis

Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute fonction monotone $f : P \longrightarrow P$ possède un point fixe. Alors $(P, \leq)$ est un treillis complet.

Preuve du théorème de Tarski

Posons

$$\text{Préf}_f = \{\, x \mid f(x) \leq x \,\}$$

Le plus petit point préfixe $\mu.f$:

$$\mu.f \in \text{Préf}_f$$

$$x \in \text{Préf}_f \text{ implique } \mu.f \leq x\,.$$

Preuve du théorème de Tarski

Posons

$$\text{Préf}_f = \{\, x \mid f(x) \leq x \,\}$$

Le plus petit point préfixe $\mu.f$:

$$\mu.f \in \text{Préf}_f$$

$$x \in \text{Préf}_f \text{ implique } \mu.f \leq x\,.$$

Preuve du théorème de Tarski

Lemma

$\mu.f$, s'il existe, est bien un point fixe et donc il est le plus petit point fixe.

Car

$$f(\mu.f) \leq \mu.f \qquad \text{implique}$$
$$f(f(\mu.f)) \leq f(\mu.f) \qquad \text{c.-à-d.}$$
$$f(\mu.f) \in \text{Préf}_f \qquad \text{implique}$$
$$\mu.f \leq f(\mu.f)$$

Preuve du théorème de Tarski

Lemma

$\mu.f$, s'il existe, est bien un point fixe et donc il est le plus petit point fixe.

Car

$$\begin{aligned} f(\mu.f) &\leq \mu.f && \text{implique} \\ f(f(\mu.f)) &\leq f(\mu.f) && \text{c.-à-d.} \\ f(\mu.f) &\in \text{Préf}_f && \text{implique} \\ \mu.f &\leq f(\mu.f) \end{aligned}$$

Preuve du théorème de Tarski

Lemma

Dans un treillis complet, l'élement

$$\bigwedge \text{Préf}_f$$

est le plus petit point prefixe de f, et donc le plus petit point fixe de f.

Car si $x \in \text{Préf}_f$ alors $\bigwedge \text{Préf}_f \leq x$, par conséquent :

$$\begin{aligned} f(\bigwedge \text{Préf}_f) &\leq f(x) && f \text{ croissante} \\ &\leq x && x \in \text{Préf}_f \end{aligned}$$

On obtient $f(\bigwedge \text{Préf}_f) \leq \bigwedge \text{Préf}_f$.

Preuve du théorème de Tarski

Lemma

Dans un treillis complet, l'élement

$$\bigwedge \text{Préf}_f$$

est le plus petit point prefixe de f, et donc le plus petit point fixe de f.

Car si $x \in \text{Préf}_f$ alors $\bigwedge \text{Préf}_f \leq x$, par conséquent :

$$\begin{aligned} f(\bigwedge \text{Préf}_f) &\leq f(x) && f \text{ croissante} \\ &\leq x && x \in \text{Préf}_f \end{aligned}$$

On obtient $f(\bigwedge \text{Préf}_f) \leq \bigwedge \text{Préf}_f$.

Théorème de Tarski-Knaster, Park

Soit $(P, \leq)$ un treillis complet et $f : P \longrightarrow P$ une fonction monotone.

Posons

$$\bot = \bigvee \emptyset \qquad \text{Remarque : } \bot \leq y \text{ pour tout } y \in P$$

$$f^0(\bot) = \bot$$

$$f^{\alpha+1}(\bot) = f(f^\alpha(\bot))$$

$$f^\alpha(\bot) = \bigvee_{\beta<\alpha} f^\beta(\bot) \qquad \alpha \text{ ordinal limite.}$$

On a

$$\bigwedge Pref_f = f^\alpha(\bot) \qquad \text{pour quelque ordinal } \alpha$$

Théorème de Tarski-Knaster, Park

Soit $(P, \leq)$ un treillis complet et $f : P \longrightarrow P$ une fonction monotone.

Posons

$$\perp = \bigvee \emptyset \qquad \text{Remarque : } \perp \leq y \text{ pour tout } y \in P$$

$$f^0(\perp) = \perp$$

$$f^{\alpha+1}(\perp) = f(f^{\alpha}(\perp))$$

$$f^{\alpha}(\perp) = \bigvee_{\beta<\alpha} f^{\beta}(\perp) \qquad \alpha \text{ ordinal limite.}$$

On a

$$\bigwedge Pref_f = f^{\alpha}(\perp) \qquad \text{pour quelque ordinal } \alpha$$

Théorème de Tarski-Knaster, Park

Soit $(P, \leq)$ un treillis complet et $f : P \longrightarrow P$ une fonction monotone.

Posons

$$\bot = \bigvee \emptyset \qquad \text{Remarque : } \bot \leq y \text{ pour tout } y \in P$$

$$f^0(\bot) = \bot$$

$$f^{\alpha+1}(\bot) = f(f^\alpha(\bot))$$

$$f^\alpha(\bot) = \bigvee_{\beta<\alpha} f^\beta(\bot) \qquad \alpha \text{ ordinal limite.}$$

On a

$$\bigwedge Pref_f = f^\alpha(\bot) \qquad \text{pour quelque ordinal } \alpha$$

Théorème de Tarski-Knaster, Park

Soit $(P, \leq)$ un treillis complet et $f : P \longrightarrow P$ une fonction monotone.

Posons

$$\begin{aligned} \bot &= \bigvee \emptyset && \text{Remarque : } \bot \leq y \text{ pour tout } y \in P \\ f^0(\bot) &= \bot \\ f^{\alpha+1}(\bot) &= f(f^{\alpha}(\bot)) \\ f^{\alpha}(\bot) &= \bigvee_{\beta<\alpha} f^{\beta}(\bot) && \alpha \text{ ordinal limite.} \end{aligned}$$

On a

$$\bigwedge Pref_f = f^{\alpha}(\bot) \qquad \text{pour quelque ordinal } \alpha$$

Théorème de Tarski-Knaster, Park

Soit $(P, \leq)$ un treillis complet et $f : P \longrightarrow P$ une fonction monotone.

Posons

$$\begin{aligned} \bot &= \bigvee \emptyset && \text{Remarque : } \bot \leq y \text{ pour tout } y \in P \\ f^0(\bot) &= \bot \\ f^{\alpha+1}(\bot) &= f(f^\alpha(\bot)) \\ f^\alpha(\bot) &= \bigvee_{\beta<\alpha} f^\beta(\bot) && \alpha \text{ ordinal limite.} \end{aligned}$$

On a

$$\bigwedge Pref_f = f^\alpha(\bot) \qquad \text{pour quelque ordinal } \alpha$$

CPOs

Définition

Un CPO est un ensemble ordonné $(P, \leq)$ tel que

- $\perp \in P$,
- toute chaîne dénombrable ascendante

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots x_n \leq \ldots$$

possède un p.p.borne supérieure $\bigvee\{ x_i \mid i \geq 0 \}$.

Exemple :
Soit $A \rightharpoonup B$ l'ensemble des fonctions partielles de A vers B.
On pose $f \leq g$ ssi $f(a)$ est défini implique $g(a)$ est défini aussi.

CPOs

Définition

Un CPO est un ensemble ordonné $(P, \leq)$ tel que

- $\bot \in P$,
- toute chaîne dénombrable ascendante

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots x_n \leq \ldots$$

  possède un p.p.borne supérieure $\bigvee\{\, x_i \mid i \geq 0 \,\}$.

Exemple :
Soit $A \rightarrow B$ l'ensemble des fonctions partielles de A vers B.
On pose $f \leq g$ ssi $f(a)$ est défini implique $g(a)$ est défini aussi.

Schéma d'interprétation : les types

La sémantique d'un type est un CPO.

Exemples :

$\| \mathit{nat} \|$ est le CPO :

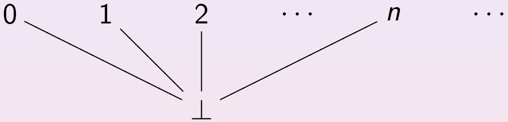
$\| \mathit{bool} \|$ est le CPO :

Schéma d'interprétation : les types

La sémantique d'un type est un CPO.

Exemples :

$\| \mathit{nat} \|$ est le CPO :



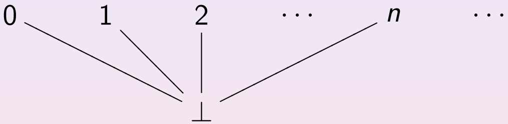
$\| \mathit{bool} \|$ est le CPO :

Schéma d'interprétation : les types

La sémantique d'un type est un CPO.

Exemples :

$\| \, nat \, \|$ est le CPO :



$\| \, bool \, \|$ est le CPO :

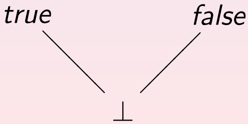


Schéma d'interprétation : les expressions

La sémantique d'une expression

```
e : t1 -> t2
```

est une fonction continue

$$\| \texttt{e} \| : \| \texttt{t1} \| \longrightarrow \| \texttt{t2} \|$$

Définition

Soient P_0, P_1 des CPOs. Une fonction monotone est *continue* ssi pour toute chaîne

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots x_n \leq \ldots$$

on a

$$f(\bigvee \{ x_i \} \mid i \geq 0) = \bigvee \{ f(x_i) \mid i \geq 0 \} .$$

Schéma d'interprétation : les expressions

La sémantique d'une expression

```
e : t1 -> t2
```

est une fonction continue

$$\| \texttt{e} \| : \| \texttt{t1} \| \longrightarrow \| \texttt{t2} \|$$

Définition

Soient P_0, P_1 des CPOs. Une fonction monotone est *continue* ssi pour toute chaîne

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots x_n \leq \ldots$$

on a

$$f(\bigvee\{\, x_i \,\} \mid i \geq 0) = \bigvee\{\, f(x_i) \mid i \geq 0 \,\}\,.$$

Fonctions continues ?

On s'intéresse aux fonctions continues :

- G est l'interprétation d'un commande,
- $G(x)$ est le résultat des calculs avec en entrée x,
- si x est un objet infini (ex: fonction, liste infinie), alors $x = \bigvee x_i$, avec les x_i approximations finies de x.

La relation de continuité

$$G(\bigvee_{i \geq 0} x_i) = \bigvee_{i \geq 0} G(x_i)$$

s'interprète selon le principe suivant :

On peut approcher le résultat de G sur une entrée infinie x en calculant le résultat de G sur les approximations finies de x.

Fonctions continues ?

On s'intéresse aux fonctions continues :

- G est l'interprétation d'un commande,
- $G(x)$ est le résultat des calculs avec en entrée x,
- si x est un objet infini (ex: fonction, liste infinie), alors $x = \bigvee x_i$, avec les x_i approximations finies de x.

La relation de continuité

$$G(\bigvee_{i \geq 0} x_i) = \bigvee_{i \geq 0} G(x_i)$$

s'interprète selon le principe suivant :

On peut approcher le résultat de G sur une entrée infinie x
en calculant le résultat de G sur les approximations finies de x.

Un exemple

Comparer les fonctions G et H suivantes :

$$Gf = \texttt{fun n -> f(n + 1)}$$

$$Hf = \begin{cases} \texttt{fun n -> 0} & \text{si } \texttt{f(n) = 0} \text{ pour tout } n, \\ \texttt{fun n -> 0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction G n'est pas continue.
On ne peut pas définir la fonction G en OCaml.

Quelques résultats

Proposition

Soient P_0, P_1 deux CPOs, alors l'espace $P_1^{P_0}$ des fonctions continues de P_0 vers P_1 est lui-même un CPO.

De façon que :

$$\| \texttt{t1 -> t2} \| = \| \texttt{t2} \|^{\| \texttt{t1} \|}$$

Proposition

Si P est un CPO, alors $\bigvee_{n \geq 0} f^n(\bot)$ est le plus petit point fixe de f.

De façon que :

$$\| \texttt{let rec expr(x)} \| = \mathit{fix}(\| \texttt{expr(x)} \|) .$$

Quelques résultats

Proposition

Soient P_0, P_1 deux CPOs, alors l'espace $P_1^{P_0}$ des fonctions continues de P_0 vers P_1 est lui-même un CPO.

De façon que :

$$\| \texttt{t1 -> t2} \| = \| \texttt{t2} \|^{\| \texttt{t1} \|}$$

Proposition

Si P est un CPO, alors $\bigvee_{n \geq 0} f^n(\perp)$ est le plus petit point fixe de f.

De façon que :

$$\| \texttt{let rec expr(x)} \| = \mathit{fix}(\| \texttt{expr(x)} \|).$$