### Sémantique

#### Luigi Santocanale

Laboratoire d'Informatique Fondamentale, Centre de Mathématiques et Informatique, 39, rue Joliot-Curie - F-13453 Marseille

#### Plan

1 Le langage IML

2 Sémantique opérationnelle

3 Applications de la sémantique opérationnelle

## Ensembles syntaxiques

 $\mathcal{N}\mathit{const}$  : les constantes numériques :

$$\mathcal{N} \textit{const} := \hat{0}, \dots \hat{n}, \dots$$

*Bconst* : les constantes booléennes:

$$\mathcal{B}const := true, false,$$

 $\mathcal{L}oc$ : les locations (identificateurs):

$$\mathcal{L}oc := [a - zA - Z][a - zA - Z0 - 9]*$$

Aexp: les expressions arithmétiques,

Bexp: les expressions booléennes,

Com: les commandes.



# Ensembles syntaxiques (II)

$$\mathcal{A}$$
exp :=  $\mathcal{N}$ const |  $\mathcal{L}$ oc |  $\mathcal{A}$ exp +  $\mathcal{A}$ exp |  $\mathcal{A}$ exp |  $\mathcal{A}$ exp \*  $\mathcal{A}$ exp

$$\mathcal{B}$$
exp :=  $\mathcal{B}$ const  
 $\mid$  not  $\mathcal{B}$ exp  $\mid$   $\mathcal{B}$ exp or  $\mathcal{B}$ exp  $\mid$   $\mathcal{B}$ exp and  $\mathcal{B}$ exp  
 $\mid$   $\mathcal{A}$ exp  $<=$   $\mathcal{A}$ exp  $\mid$   $\mathcal{A}$ exp  $=$   $\mathcal{A}$ exp

```
\textit{Com} := \textit{skip} \mid \textit{Com} \; ; \; \textit{Com} \mid \textit{Loc} := \textit{Aexp} \mid \textit{if} (\; \textit{Bexp} \;) \; \textit{then Com else Com}
```

# Ensembles syntaxiques (II)

$$\mathcal{A}\mathit{exp} := \mathcal{N}\mathit{const} \mid \mathcal{L}\mathit{oc}$$

$$\mid \mathcal{A}\mathit{exp} \ + \ \mathcal{A}\mathit{exp} \mid \mathcal{A}\mathit{exp} \ - \ \mathcal{A}\mathit{exp} \mid \mathcal{A}\mathit{exp} \ * \ \mathcal{A}\mathit{exp}$$

$$\mathcal{B}$$
exp :=  $\mathcal{B}$ const  
 $\mid$  not  $\mathcal{B}$ exp  $\mid$   $\mathcal{B}$ exp or  $\mathcal{B}$ exp  $\mid$   $\mathcal{B}$ exp and  $\mathcal{B}$ exp  
 $\mid$   $\mathcal{A}$ exp  $<=$   $\mathcal{A}$ exp  $\mid$   $\mathcal{A}$ exp  $=$   $\mathcal{A}$ exp

$$\mathit{Com} := \mathit{skip} \mid \mathit{Com} \; ; \; \mathit{Com}$$
  $\mid \mathit{Loc} := \mathit{Aexp}$   $\mid \mathit{if} (\; \mathit{Bexp} \;) \; \mathit{then} \; \mathit{Com} \; \mathit{else} \; \mathit{Com}$ 

# Ensembles syntaxiques (II)

$$\mathcal{A}$$
exp :=  $\mathcal{N}$ const |  $\mathcal{L}$ oc |  $\mathcal{A}$ exp +  $\mathcal{A}$ exp |  $\mathcal{A}$ exp -  $\mathcal{A}$ exp |  $\mathcal{A}$ exp \*  $\mathcal{A}$ exp

$$\mathcal{B}$$
exp :=  $\mathcal{B}$ const  
 $\mid$  not  $\mathcal{B}$ exp  $\mid$   $\mathcal{B}$ exp or  $\mathcal{B}$ exp  $\mid$   $\mathcal{B}$ exp and  $\mathcal{B}$ exp  
 $\mid$   $\mathcal{A}$ exp  $<=$   $\mathcal{A}$ exp  $\mid$   $\mathcal{A}$ exp  $=$   $\mathcal{A}$ exp

$$Com := skip \mid Com ; Com$$
 $\mid Loc := Aexp$ 
 $\mid if (Bexp) then Com else Com$ 

#### La notion d'état

Fonction associant un valeur entier positif à chaque location :

$$\sigma: \mathcal{L}oc \longrightarrow \mathcal{N}$$

L'ensemble des états :

$$\mathcal{S} := \{ \sigma \, | \, \sigma : \mathcal{L}oc \longrightarrow \mathcal{N} \}.$$

### Sémantique opérationnelle structurelle

#### Exemple:

on veut définir une relation

$$(a, \sigma) \rightarrow n$$

à lire :

l'expression a, dans l'état  $\sigma$ , s'évalue à l'entier positif n.

opérationnelle : on peut traduire la sémantique en algorithme pour décider si  $(a, \sigma) \rightarrow n$ ,

structurelle : dirigé par la syntaxe.



### Sémantique opérationnelle structurelle

#### Exemple:

on veut définir une relation

$$(a,\sigma)\to n$$

à lire :

l'expression a, dans l'état  $\sigma$ , s'évalue à l'entier positif n.

opérationnelle : on peut traduire la sémantique en algorithme pour

décider si  $(a, \sigma) \rightarrow n$ ,

structurelle : dirigé par la syntaxe.



$$\frac{1}{(\hat{n},\sigma) \to n} \hat{n} \in \mathcal{N} const$$

$$\frac{1}{(X,\sigma) \to \sigma(X)} X \in \mathcal{L} oc$$

$$\frac{(a_0,\sigma) \to n_0 \quad (a_1,\sigma) \to n_1}{(a_0+a_1,\sigma) \to n} \text{ et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{(a_0,\sigma) \to n_0 \quad (a_1,\sigma) \to n_1}{(a_0-a_1,\sigma) \to n} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{(a_0,\sigma) \to n_0 \quad (a_1,\sigma) \to n_1}{(a_0,\sigma) \to n_0 \quad (a_1,\sigma) \to n_1} \text{ et } n = n_0 n_1$$

$$\frac{1}{(\hat{n},\sigma) \to n} \hat{n} \in \mathcal{N} const$$

$$\frac{1}{(X,\sigma) \to \sigma(X)} X \in \mathcal{L} oc$$

$$\frac{(a_0,\sigma) \to n_0 \quad (a_1,\sigma) \to n_1}{(a_0+a_1,\sigma) \to n} \quad \text{et } n = n_0 + n_0$$

$$\frac{(a_0,\sigma) \to n_0 \quad (a_1,\sigma) \to n_1}{(a_0-a_1,\sigma) \to n} \quad \text{et } n = n_0 - n_0$$

$$\frac{(a_0,\sigma) \to n_0 \quad (a_1,\sigma) \to n_1}{(a_0,\sigma) \to n_0 \quad (a_1,\sigma) \to n_1} \quad \text{et } n = n_0 n_1$$

$$\frac{1}{(\hat{n},\sigma) \to n} \hat{n} \in \mathcal{N} const$$

$$\frac{1}{(X,\sigma) \to \sigma(X)} X \in \mathcal{L} oc$$

$$\frac{1}{(X,\sigma) \to \sigma(X)} X \in \mathcal{L} oc$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} (A_1,\sigma) \to n_1}{(A_0+A_1,\sigma) \to n} \text{ et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} (A_1,\sigma) \to n_1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} (A_1,\sigma) \to n_1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} (A_1,\sigma) \to n_1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(\hat{n},\sigma) \to n} \hat{n} \in \mathcal{N}const$$

$$\frac{1}{(X,\sigma) \to \sigma(X)} X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{1}{(X,\sigma) \to \sigma(X)} X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0+A_1,\sigma) \to n_1} \text{ et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(\hat{n},\sigma) \to n} \hat{n} \in \mathcal{N}const$$

$$\frac{1}{(X,\sigma) \to \sigma(X)} X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{1}{(X,\sigma) \to \sigma(X)} X \in \mathcal{L}oc$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0+A_1,\sigma) \to n_1} \text{ et } n = n_0 + n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_1} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

$$\frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \frac{1}{(A_0,\sigma) \to n_0} \text{ et } n = n_0 - n_1$$

#### Définition de la relation $\rightarrow_{Aexp}$

#### Definition

Posons  $(a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n$  ssi il est possible de construire une arbre étiqueté (arbre de dérivation), à l'aide de telles règles, dont la racine est étiquetée par  $(a, \sigma) \to n$ .

Exemple : supposons que  $\sigma(init) = 0$ , montrons que

$$((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21:$$

$$(init,\sigma) o 0$$
  $(\hat{5},\sigma) o 5$   $(\hat{7},\sigma) o 7$   $(\hat{9},\sigma) o 9$   $(init+\hat{5},\sigma) o 5$   $(\hat{7}+\hat{9},\sigma) o 16$   $((init+\hat{5})+(\hat{7}+\hat{9}),\sigma) o 21$ 

#### Définition de la relation $\rightarrow_{Aexp}$

#### Definition

Posons  $(a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n$  ssi il est possible de construire une arbre étiqueté (arbre de dérivation), à l'aide de telles règles, dont la racine est étiquetée par  $(a, \sigma) \to n$ .

Exemple : supposons que  $\sigma(init) = 0$ , montrons que

$$((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21:$$

$$\begin{array}{c|c} \hline (\textit{init},\sigma) \rightarrow 0 & \hline (\hat{5},\sigma) \rightarrow 5 \\ \hline (\textit{init}+\hat{5},\sigma) \rightarrow 5 & \hline (\hat{7},\sigma) \rightarrow 7 & \hline (\hat{9},\sigma) \rightarrow 9 \\ \hline (\textit{init}+\hat{5}) + (\hat{7}+\hat{9}),\sigma) \rightarrow 21 \\ \hline \end{array}$$

#### Définition de la relation $\rightarrow_{Aexp}$

#### Definition

Posons  $(a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n$  ssi il est possible de construire une arbre étiqueté (arbre de dérivation), à l'aide de telles règles, dont la racine est étiquetée par  $(a, \sigma) \to n$ .

Exemple : supposons que  $\sigma(init) = 0$ , montrons que

$$((init + \hat{5}) + (\hat{7} + \hat{9}), \sigma) \rightarrow 21:$$

$$(\mathit{true}, \sigma) \rightarrow 1$$

$$(\mathit{false}, \sigma) \to 0$$

$$\frac{(a_0,\sigma)\to n_0 \quad (a_1,\sigma)\to n_1}{(a_0=a_1,\sigma)\to 1} \text{ et } n_0=n_1$$

$$\frac{(a_0,\sigma)\to n_0 \quad (a_1,\sigma)\to n_1}{(a_0=a_1,\sigma)\to 0} \text{ et } n_0\neq n_1$$

$$\overline{(a_0 \leq a_1, \sigma) 
ightarrow 1} \quad \overline{(a_0 \leq a_1, \sigma) 
ightarrow 0}$$

$$(\mathit{true}, \sigma) \rightarrow 1$$

(false, 
$$\sigma$$
)  $\rightarrow$  0

$$\frac{(a_0,\sigma)\to n_0 \quad (a_1,\sigma)\to n_1}{(a_0=a_1,\sigma)\to 1} \text{ et } n_0=n_1$$

$$\frac{(a_0,\sigma)\to n_0 \quad (a_1,\sigma)\to n_1}{(a_0=a_1,\sigma)\to 0} \text{ et } n_0\neq n_1$$

$$\overline{\left(a_0 \leq a_1, \sigma\right) \to 1} \quad \overline{\left(a_0 \leq a_1, \sigma\right) \to 0}$$

$$\overline{(true,\sigma) o 1}$$
 $\overline{(false,\sigma) o 0}$ 
 $\overline{(false,\sigma) o 0}$ 
 $\overline{(a_0,\sigma) o n_0 \quad (a_1,\sigma) o n_1} \quad \text{et } n_0 = n_1$ 
 $\overline{(a_0 = a_1,\sigma) o 1} \quad \text{et } n_0 = n_1$ 
 $\overline{(a_0,\sigma) o n_0 \quad (a_1,\sigma) o n_1} \quad \text{et } n_0 \neq n_1$ 
 $\overline{(a_0 = a_1,\sigma) o 0} \quad \cdots$ 
 $\overline{(a_0 \le a_1,\sigma) o 1} \quad \overline{(a_0 \le a_1,\sigma) o 0}$ 

$$egin{aligned} (b,\sigma) &
ightarrow 0 \ ( ext{not } b,\sigma) &
ightarrow 1 \ \hline (b,\sigma) &
ightarrow 1 \ \hline ( ext{not } b,\sigma) &
ightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\frac{(b_0,\sigma) \rightarrow v_0 \quad (b_1,\sigma) \rightarrow v_1}{(b_0 \text{ and } b_1,\sigma) \rightarrow v} \text{ et } v = \textit{min}(v_0,v_1)$$

$$\frac{(b_0,\sigma)\to v_0 \quad (b_1,\sigma)\to v_1}{(b_0 \text{ or } b_1,\sigma)\to v} \text{ et } v=max(v_0,v_1)$$



$$(b,\sigma) o 0$$
 $(not\ b,\sigma) o 1$ 
 $(b,\sigma) o 1$ 
 $(b,\sigma) o 1$ 
 $(not\ b,\sigma) o 0$ 
 $(b_0,\sigma) o v_0 \quad (b_1,\sigma) o v_1$ 
 $(b_0\ and\ b_1,\sigma) o v$  et  $v = min(v_0,v_1)$ 
 $(b_0,\sigma) o v_0 \quad (b_1,\sigma) o v_1$ 
 $(b_0,\sigma) o v_0 \quad (b_1,\sigma) o v_1$ 
 $(b_0\ or\ b_1,\sigma) o v$  et  $v = max(v_0,v_1)$ 

$$egin{aligned} & \dfrac{(b,\sigma) 
ightarrow 0}{(not\ b,\sigma) 
ightarrow 1} \ & \dfrac{(b,\sigma) 
ightarrow 1}{(not\ b,\sigma) 
ightarrow 0} \ & \dfrac{(b,\sigma) 
ightarrow v_0 \qquad (b_1,\sigma) 
ightarrow v_1}{(b_0\ and\ b_1,\sigma) 
ightarrow v} \ \ ext{et}\ v = ext{min}(v_0,v_1) \ & \dfrac{(b_0,\sigma) 
ightarrow v_0 \qquad (b_1,\sigma) 
ightarrow v_1}{(b_0\ or\ b_1,\sigma) 
ightarrow v} \ \ ext{et}\ v = ext{max}(v_0,v_1) \end{aligned}$$

#### Évaluation des commandes

On veut définir une relation

$$(c,\sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

à lire :

si on exécute le commande c de l'état  $\sigma$ , alors cette commande se termine, et à la terminaison on se trouvera dans l'état  $\sigma'$ .

Remarque : une exécution peut ne pas se terminer.

Notation:

$$\sigma[m/X](Y) = \begin{cases} m, & \text{si } Y = X \\ \sigma(Y), & \text{sinon.} \end{cases}$$



#### Évaluation des commandes

On veut définir une relation

$$(c,\sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

à lire :

si on exécute le commande c de l'état  $\sigma$ , alors cette commande se termine, et à la terminaison on se trouvera dans l'état  $\sigma'$ .

Remarque : une exécution peut ne pas se terminer.

Notation:

$$\sigma[m/X](Y) = \begin{cases} m, & \text{si } Y = X \\ \sigma(Y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

#### Évaluation des commandes

On veut définir une relation

$$(c,\sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

à lire :

si on exécute le commande c de l'état  $\sigma$ , alors cette commande se termine, et à la terminaison on se trouvera dans l'état  $\sigma'$ .

Remarque : une exécution peut ne pas se terminer.

Notation:

$$\sigma[m/X](Y) = \begin{cases} m, & \text{si } Y = X \\ \sigma(Y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(\textit{skip}, \sigma) \rightarrow \sigma$$

$$\frac{(c_0,\sigma)\to \tilde{\sigma} \quad (c_1,\tilde{\sigma})\to \sigma'}{(c_0;c_1,\sigma)\to \sigma'}$$

$$\frac{(a,\sigma)\to m}{(X:=a,\sigma)\to\sigma[m/X]}$$

$$(\mathit{skip}, \sigma) o \sigma$$

$$\frac{(c_0,\sigma)\to\tilde{\sigma}\quad (c_1,\tilde{\sigma})\to\sigma'}{(c_0;c_1,\sigma)\to\sigma'}$$

$$\frac{(a,\sigma)\to m}{(X:=a,\sigma)\to\sigma[m/X]}$$

$$(\mathit{skip}, \sigma) \rightarrow \sigma$$

$$rac{(c_0,\sigma)
ightarrow ilde{\sigma}\quad (c_1, ilde{\sigma})
ightarrow\sigma'}{(c_0;c_1,\sigma)
ightarrow\sigma'}$$

$$\frac{(a,\sigma)\to m}{(X:=a,\sigma)\to\sigma[m/X]}$$

$$(b,\sigma) 
ightarrow 1 \quad (c_0,\sigma) 
ightarrow \sigma'$$
 (if b then  $c_0$  else  $c_1,\sigma) 
ightarrow \sigma'$   $(b,\sigma) 
ightarrow 0 \quad (c_1,\sigma) 
ightarrow \sigma'$  (if b then  $c_0$  else  $c_1,\sigma) 
ightarrow \sigma'$   $(b,\sigma) 
ightarrow 0$  (while b do  $c,\sigma) 
ightarrow \sigma$ 

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \quad (c,\sigma) \to \tilde{\sigma} \quad (\textit{while b do } c,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}{(\textit{while b do } c,\sigma) \to \sigma'}$$

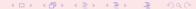


$$\frac{(b,\sigma)\to 1 \quad (c_0,\sigma)\to\sigma'}{(\textit{if b then } c_0 \textit{ else } c_1,\sigma)\to\sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma)\to 0 \quad (c_1,\sigma)\to\sigma'}{(\textit{if b then } c_0 \textit{ else } c_1,\sigma)\to\sigma'}$$

$$\frac{(b,\sigma)\to 0}{(\textit{while b do } c,\sigma)\to\sigma}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \quad (c,\sigma) \to \tilde{\sigma} \quad (\textit{while b do } c,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}{(\textit{while b do } c,\sigma) \to \sigma'}$$



$$egin{aligned} & (b,\sigma) 
ightarrow 1 & (c_0,\sigma) 
ightarrow \sigma' \ \hline (\emph{if b then } c_0 \ \emph{else } c_1,\sigma) 
ightarrow \sigma' \ \hline & (b,\sigma) 
ightarrow 0 & (c_1,\sigma) 
ightarrow \sigma' \ \hline & (\emph{if b then } c_0 \ \emph{else } c_1,\sigma) 
ightarrow \sigma' \ \hline & (b,\sigma) 
ightarrow 0 \ \hline & (\emph{while b do } c,\sigma) 
ightarrow \sigma \end{aligned}$$

$$\frac{(b,\sigma) \to 1 \quad (c,\sigma) \to \tilde{\sigma} \quad (\textit{while b do } c,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}{(\textit{while b do } c,\sigma) \to \sigma'}$$



#### Les relations $\rightarrow$

#### Definition

**Posons** 

$$(b,\sigma) \rightarrow_{\mathcal{B}\mathsf{exp}} \mathsf{v} \qquad \qquad (c,\sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}\mathsf{om}} \sigma'$$

ssi il est possible de construire, à l'aide de telles règles, une arbre de dérivation dont la racine est étiquetée par

$$(b,\sigma) \to v$$
  $(c,\sigma) \to \sigma'$ 

## Équivalences

#### Definition

$$a \sim_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, n \in \mathcal{N}$$
  
$$(a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n \text{ ssi } (a', \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n$$

$$c \sim_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$$

$$(c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \text{ ssi } (c', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

# Équivalences

#### Definition

$$a \sim_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, n \in \mathcal{N}$$
  
$$(a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n \text{ ssi } (a', \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n$$

$$b \sim_{\mathcal{B}\mathsf{exp}} b' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, v \in \{0, 1\}$$
$$(b, \sigma) \to_{\mathcal{B}\mathsf{exp}} v \text{ ssi } (v', \sigma) \to_{\mathcal{B}\mathsf{exp}} v$$

$$c \sim_{\mathcal{C}om} c' \operatorname{ssi} \ \forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$$

$$(c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \operatorname{ssi} (c', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma$$

# Équivalences

#### Definition

$$a \sim_{\mathcal{A}exp} a' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, n \in \mathcal{N}$$
  
$$(a, \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n \text{ ssi } (a', \sigma) \to_{\mathcal{A}exp} n$$

$$b \sim_{\mathcal{B}\mathsf{exp}} b' \text{ ssi } \forall \sigma \in \mathcal{S}, v \in \{0, 1\}$$
$$(b, \sigma) \to_{\mathcal{B}\mathsf{exp}} v \text{ ssi } (v', \sigma) \to_{\mathcal{B}\mathsf{exp}} v$$

$$c \sim_{\mathcal{C}om} c' \text{ ssi } \forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$$

$$(c, \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \text{ ssi } (c', \sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

### Un exemple étendu

Soit

$$p_0 = while \ b \ do \ c$$
  
 $p_1 = if \ b \ then \ c; p_0 \ else \ skip$ 

On a

$$p_0 \sim_{\mathcal{C}om} p_1$$

c.-à-d.

$$(p_0,\sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma' \text{ ssi } (p_1,\sigma) \rightarrow_{\mathcal{C}om} \sigma'$$

pour toute couple d'états  $\sigma$ ,  $\sigma'$ .



Ou bien  $\sigma' = \sigma$  et

$$\frac{\vdots}{(b,\sigma)\to 0}$$
(while b do  $c,\sigma$ )  $\to \sigma$ 

$$\cfrac{\vdots}{(b,\sigma)\to 0} \qquad \cfrac{(skip,\sigma)\to \sigma}{(if\ b\ then\ c;\ p_0\ else\ skip,\sigma)\to \sigma}$$

Ou bien  $\sigma' = \sigma$  et

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{(b,\sigma)\to 0}}{(\textit{while b do } c,\sigma)\to \sigma}$$

$$\cfrac{rac{\vdots}{(b,\sigma) o 0}\qquad \cfrac{(\mathit{skip},\sigma) o \sigma}{(\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ c;p_0\ \mathit{else}\ \mathit{skip},\sigma) o \sigma}$$

#### Sinon:

$$egin{array}{ccccc} dots & dots &$$

et donc

$$\frac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \frac{\vdots}{(c,\sigma) \to \tilde{\sigma}} \frac{\vdots}{(p_0,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}$$

$$\frac{(c;p_0,\sigma) \to \sigma}{(c;p_0,\sigma) \to \sigma'}$$

#### Sinon:

$$egin{array}{ccccc} dots & dots &$$

$$\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \dfrac{\dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \to \widetilde{\sigma}} \dfrac{\vdots}{(p_0,\widetilde{\sigma}) \to \sigma'}}{(c;p_0,\sigma) \to \sigma} \\ \dfrac{(c;p_0,\sigma) \to \sigma'}{(c;p_0,\sigma) \to \sigma'}$$

Ou bien

$$\frac{\vdots}{(b,\sigma)\to 0} \qquad \overline{(skip,\sigma)\to \sigma'}$$

$$(if \ b \ then \ c; p_0 \ else \ skip,\sigma)\to \sigma'$$

et donc  $\sigma' = \sigma$  et

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{(b,\sigma)\to 0}}{(\textit{while b do } c,\sigma)\to \sigma}$$

Ou bien

$$\frac{\vdots}{(b,\sigma)\to 0} \qquad \overline{(skip,\sigma)\to \sigma'}$$

$$(if \ b \ then \ c; p_0 \ else \ skip,\sigma)\to \sigma'$$

et donc  $\sigma' = \sigma$  et

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{(b,\sigma)\to 0}}{(\textit{while b do } c,\sigma)\to \sigma}$$

#### Sinon:

$$\cfrac{\vdots}{\cfrac{(b,\sigma)\to 1}} \cfrac{\cfrac{\vdots}{(c,\sigma)\to \tilde{\sigma}} \cfrac{(p_0,\tilde{\sigma})\to \sigma'}{(p_0,\sigma)\to \sigma} }$$
 (if b then c;  $p_0$  else skip,  $\sigma$ )  $\rightarrow \sigma'$ 

$$\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \quad \dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \to \tilde{\sigma}} \quad \dfrac{\vdots}{(\textit{while b do } c, \tilde{\sigma}) \to \sigma'} \\ \qquad \qquad (\textit{while b do } c, \sigma) \to \sigma'$$



Sinon:

$$\dfrac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \dfrac{\dfrac{\vdots}{(c,\sigma) \to \tilde{\sigma}} \dfrac{\vdots}{(p_0,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}}{(c;p_0,\sigma) \to \sigma} \\ \dfrac{(c;p_0,\sigma) \to \sigma'}{(if\ b\ then\ c;p_0\ else\ skip,\sigma) \to \sigma'}$$

$$egin{array}{ccccc} dots & dots & dots & dots & dots \ \hline (b,\sigma) 
ightarrow 1 & (c,\sigma) 
ightarrow ilde{\sigma} & ( ext{while b do } c, ilde{\sigma}) 
ightarrow \sigma' \ & ( ext{while b do } c,\sigma) 
ightarrow \sigma' \end{array}$$



Sinon:

$$\frac{\vdots}{(b,\sigma) \to 1} \frac{\overline{(c,\sigma) \to \tilde{\sigma}} \quad \overline{(p_0,\tilde{\sigma}) \to \sigma'}}{(c;p_0,\sigma) \to \sigma}$$

$$(if \ b \ then \ c; p_0 \ else \ skip,\sigma) \to \sigma'$$

$$egin{array}{ccccc} dots & dots & dots & dots & dots \ \hline (b,\sigma) 
ightarrow 1 & (c,\sigma) 
ightarrow ilde{\sigma} & ( ext{while b do } c, ilde{\sigma}) 
ightarrow \sigma' \ & ( ext{while b do } c,\sigma) 
ightarrow \sigma' \end{array}$$

