Vendredi 27 octobre 2006
Durée : 4 heures
Documents autorisés

Examen : Programmation et Logique
Master 2 Recherche 2006-2007

# Logique equationnelle, algèbres de Boole, décidabilité

**Exercice 1.** Explicitez le langage de la théorie des algèbres de Boole. Proposez une liste complète d'axiomes pour la théorie des algèbres de Boole.

**Solution.** Le langage des algèbres de Boole : symboles de fonctions : $\{\top, \wedge, \bot, \vee, \neg\}$ avec arité $0, 2, 0, 2, 1$. Le seul symbole de prédicat est le symbole d'égalité. Les axiomes de cette théorie sont les axiomes usuels pour l'égalité et les équations suivants :

$$
\begin{aligned}
x \wedge \top &= x \\
x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z \\
x \wedge y &= y \wedge x \\
x \wedge x &= x \\
&\text{Les axiomes analogues pour } \vee \\
x \wedge (y \vee x) &= x \\
x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
x \wedge \neg x &= \bot \\
x \vee \neg x &= \top \,.
\end{aligned}
$$

Remarque : on ne peut pas remplacer les deux derniers axiomes par les règles de De Morgan. Pour se convaincre de cela, considérez le modèle $\langle [0,1], 0, \min, 1, \max, \neg \rangle$ où $\neg x = 1 - x$. □

**Exercice 2.** Dans cet exercice soient $X$ un ensemble fini et $\{+,-\}^X$ l'ensemble des fonctions de $X$ vers $\{+,-\}$. Soient $i^{\pm} : X \longrightarrow \mathcal{P}(\{+,-\}^X)$ définies comme il suit :

$$i^+(x) = \{ f \mid f(x) = + \} \,, \qquad\qquad i^-(x) = \{ f \mid f(x) = - \} \,.$$

On se propose de montrer que l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(\{+,-\}^X)$ (avec les opérations usuelles d'intersection, réunion et complément) est libre sur $X$.

(i). Montrez que

$$\{ f \} = \bigcap_{x \in X, f \in i^+(x)} i^+(x) \;\cap \bigcap_{x \in X, f \in i^-(x)} i^-(x) \,. \tag{1}$$

**Solution.** Si $f \in i^+(x)$ alors $\{ f \} \subseteq i^+(x)$. De même, $f \in i^-(x)$ alors $\{ f \} \subseteq i^-(x)$. Par conséquent

$$\{ f \} \subseteq \bigcap_{x \in X, f \in i^+(x)} i^+(x) \;\cap \bigcap_{x \in X, f \in i^-(x)} i^-(x) \,. \tag{2}$$

Soit maintenant $g$ tel que $g \in i^+(x)$ si $f \in i^+(x)$ et $g \in i^-(x)$ si $f \in i^-(x)$, pour tout $x \in X$. Cela revient à dire que $f(x) = +$ implique $g(x) = +$, et $f(x) = -$ implique $g(x) = -$ : il en découle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$. Cela montre que le membre droite de (2) est contenu dans le membre à gauche. □

Rappelez ce que veut dire que une fonction entre algèbres de Boole est un homomorphisme.
A partir de (1), déduisez que si $h : X \longrightarrow B$ ou $B$ est une algèbre de Boole, alors il existe au plus une fonction $\tilde{h} : \mathcal{P}(\{+,-\}^X) \longrightarrow B$ telle que $h = \tilde{h} \circ i^+$ et qui possiblement est un homomorphisme d'algèbres de Boole. Donnez la définition de la fonction $\tilde{h}$.
Conseil :
– donnez la définition de $\tilde{h}(S)$ pour $S$ un singleton,

– étendez cette définition à tous les sousensembles de $\{+,-\}^X$.

**Solution.** Observons que $i^-(x) = \neg i^+(x)$. Donc, si $S = \{f\}$ est un singleton

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(S) = \tilde{h}(\{f\}) &= \tilde{h}\Big(\bigcap_{x\in X, f\in i^+(x)} i^+(x) \;\cap \bigcap_{x\in X, f\notin i^+(x)} \neg i^+(x)\Big) \\
&= \bigwedge_{x\in X, f\in i^+(x)} \tilde{h}(i^+(x)) \;\wedge \bigwedge_{x\in X, f\notin i^+(x)} \neg(\tilde{h}(i^+(x)) && \text{si l'on veut } \tilde{h} \text{ un homomorphisme} \\
&= \bigwedge_{x\in X, f\in i^+(x)} h(x) \;\wedge \bigwedge_{x\in X, f\notin i^+(x)} \neg h(x) && \text{si } h = \tilde{h}\circ i^+ \\
&= \bigwedge_{x\in X, f(x)=+} h(x) \;\wedge \bigwedge_{x\in X, f(x)=-} \neg h(x)\,.
\end{aligned}$$

Pour $S \subseteq \{+,-\}^X$, on a $S = \bigcup_{f\in S}\{f\}$ et donc

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(S) = \tilde{h}\Big(\bigcup_{f\in S}\{f\}\Big) &= \bigvee_{f\in S} \tilde{h}(\{f\}) && \text{si l'on veut } \tilde{h} \text{ un homomorphisme} \\
&= \bigvee_{f\in S} \; \bigwedge_{x\in X, f(x)=+} h(x) \;\wedge \bigwedge_{x\in X, f(x)=-} \neg h(x)\,.
\end{aligned}$$

Cela montre que la définition de $\tilde{h}$ est forcée par la contrainte “être un homomorphisme” et la contrainte “$h = \tilde{h}\circ i^+$”. □

(ii). Montrez que la fonction ainsi définie est bien un homomorphisme d'algèbres de Boole.
Conseil :
– Prouvez que $\tilde{h}(S_1 \cup S_2) = \tilde{h}(S_1) \vee \tilde{h}(S_2)$.

**Solution.** On a

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(S_1\cup S_2) &= \bigvee_{f\in S_1\cup S_2} \tilde{h}(\{f\}) \\
&= \bigvee_{f\in S_1} \tilde{h}(\{f\}) \vee \bigvee_{f\in S_2} \tilde{h}(\{f\}) \\
&= \tilde{h}(S_1) \vee \tilde{h}(S_2)\,.
\end{aligned}$$

□

– Montrez que si $f \neq g$, alors $\tilde{h}(\{f\}) \wedge \tilde{h}(\{g\}) = \bot$.

**Solution.** Si $f \neq g$, alors il existe $x$ tel que $f(x) \neq g(x)$. On peut supposer que $f(x) = +$ et $g(x) = -$, de façon que $\tilde{h}(\{f\}) \leq h(x)$, $\tilde{h}(\{g\}) \leq \neg h(x)$, par conséquent

$$\tilde{h}(\{f\}) \wedge \tilde{h}(\{g\}) \leq h(x) \wedge \neg h(x) = \bot\,.$$

□

– Utilisez la règle de distributivité pour montrer que $\tilde{h}(S_1 \cap S_2) = \tilde{h}(S_1) \cap \tilde{h}(S_2)$. Montrez de même que $\tilde{h}(\{+,-\}^X) = \top$.

**Solution.** On a

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(S_1) \wedge \tilde{h}(S_2) &= \Big(\bigvee_{f_1\in S_1} \tilde{h}(\{f_1\})\Big) \wedge \Big(\bigvee_{f_2\in S_2} \tilde{h}(\{f_2\})\Big) \\
&= \bigvee_{f_1\in S_1, f_2\in S_2} \tilde{h}(\{f_1\}) \wedge \tilde{h}(\{f_2\}) && \text{par distributivité} \\
&= \bigvee_{f_1\in S_1, f_2\in S_2, f_1=f_2} \tilde{h}(\{f_1\}) \wedge \tilde{h}(\{f_2\}) && \text{par l'observation précédente.} \\
&= \bigvee_{f\in S_1\cap S_2} \tilde{h}(\{f\}) = \tilde{h}(S_1\cap S_2)\,,
\end{aligned}$$

Pour $S \subseteq X$ soit

$$H(S) = \bigvee_{f \in \{+,-\}^X} \bigwedge_{y \in S, f(y)=+} h(y) \;\wedge \bigwedge_{y \in S, f(y)=-} \neg h(y)\,,$$

et observons que $H(\emptyset) = \top$. Supposons que $H(Y) = \top$ et soit $x \notin Y$. On alors

$$\begin{aligned}
H(Y \cup \{x\}) &= \bigvee_{f \in \{+,-\}^X} \bigwedge_{y \in Y \cup \{x\}, f(y)=+} h(y) \;\wedge \bigwedge_{y \in Y \cup \{x\}, f(y)=-} \neg h(y) \\
&= \bigvee_{f \in \{+,-\}^X, f(x)=+} h(x) \wedge \bigwedge_{y \in Y, f(y)=+} h(y) \;\wedge \bigwedge_{y \in Y \cup \{x\}, f(y)=-} \neg h(y) \\
&\vee \\
&\bigvee_{f \in \{+,-\}^X, f(x)=-} \neg h(x) \wedge \bigwedge_{y \in Y, f(y)=+} h(y) \;\wedge \bigwedge_{y \in Y \cup \{x\}, f(y)=-} \neg h(y) \\
&= \bigvee_{f \in \{+,-\}^X, f(x)=+} h(x) \wedge H(Y) \vee \bigvee_{f \in \{+,-\}^X, f(x)=-} \neg h(x) \wedge H(Y) \\
&= h(x) \vee \neg h(x) = \top\,.
\end{aligned}$$

Car $\tilde{h}(\{+,-\}^X) = H(X)$, on peut donc conclure que $\tilde{h}(\{+,-\}^X) = \top$.

□

– Montrez que dans une algèbre de Boole $x \wedge y = \perp$ et $x \vee y = \top$ si et seulement si $y = \neg x$. Utiliser ce résultat pour déduire que $\tilde{h}(\neg S) = \neg \tilde{h}(S)$.

  **Solution.** Si $x \wedge y = \perp$, alors $x \vee \neg y = (x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg y) = (x \wedge y) \vee \neg y = \neg y$, c.-a-d. $x \leq \neg y$. De façon semblable, $x \vee y = \perp$ implique $\neg y \leq x$, et donc $\neg y = x$. La direction converse est un axiome des algèbres de Boole.
  On a $\tilde{h}(S) \cap \tilde{h}(\neg S) = \tilde{h}(S \cap \neg S) = \tilde{h}(\emptyset) = \perp$, et de façon semblable $\tilde{h}(S) \cup \tilde{h}(\neg S) = \top$. On obtient donc que $\tilde{h}(\neg S) = \neg \tilde{h}(S)$. □

(iii). Rappelez ce que veut dire que une algèbre de Boole est libre sur un ensemble $X$ de générateurs. A partir des observations précedentes, concluez que l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(\{+,-\}^X)$ possède cette propriété.

**Solution.** On a donc vu que $i^+ : X \longrightarrow \mathcal{P}(\{-,+\}^X)$, et que si $h : X \longrightarrow B$, où $B$ est une algebre de Boole, alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres de Boole $\tilde{h} : \mathcal{P}(\{-,+\}^X) \longrightarrow B$ tel que $h = \tilde{h} \circ i^+$. Nous avons définit la propriété "être libre sur l'ensemble $X$" exactement par cette propriété . □

**Exercice 3.** Rappelez la propriété du modèle fini pour une théorie logique. En sachant que l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(\{+,-\}^X)$ est libre sur $X$, montrez comment appliquer la propriété du modèle fini pour déduire que la théorie equationnelle des algèbres de Boole est décidable.

**Solution.** Une théorie logique possède la propriété du modèle fini si $T \not\vdash \phi$ implique qu'il existe une modèle fini $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \not\models \phi$.
L'algèbre de Boole libre sur $X$ $\mathcal{P}(\{-,+\}^X)$ est finie. Si $B$ est la théorie des algèbres de Boole, $B \not\vdash t_1 = t_2$, et $X = \mathit{Free}(\{t_1, t_2\})$, alors $\mathcal{P}(\{-,+\}^X) \not\models t_1 = t_2$. Cela montre que $B$ possède la propriété du modèle fini et entraîne que le problème "$B \not\vdash t_1 = t_2$ ?" est demi-décidable.
Le problème "$B \vdash t_1 = t_2$ ?" est aussi demi-décidable (car on peut construire de façon récursive toutes les équations qui se découlent de $B$), et donc le problème "$B \vdash t_1 = t_2$ ?" est décidable. □

# Logique modale, PDL et $\mu$-calcul

**Exercice 4.** Soit $\mathcal{M} = \langle Q, q_0, \{\rightarrow^\sigma\}_{\sigma \in \{a,b\}} \rangle$ un système de transition. Proposez une formule du PDL $\phi$ telle que $\mathcal{M}, s \models \phi$ si et seulement s'il existe un chemin de l'état $s$ qui mène à un état deadlock (c.-à-d. sans successeurs) dans $\mathcal{M}$.

**Solution.** La formule souaitée est $\langle (a \cup b)^* \rangle [a \cup b] \perp$.

□

**Exercice 5.**

(i). Rappelez la définition des approximations $f^\alpha(\bot)$ (de $\mu.f$) pour $f$ une fonction monotone et $\alpha \in Ord$.

**Solution.**

$$f^0(\bot) = \bot \qquad f^{\alpha+1}(\bot) = f(f^\alpha(\bot)) \qquad f^\alpha(\bot) = \bigvee_{\beta<\alpha} f^\beta(\bot) \quad \text{(si } \beta \text{ est un ordinal limite).}$$

□

(ii). Soit $\mathcal{M} = \langle V, \rightarrow\rangle$ un système de transition. Montrez que une condition suffisante afin que la relation

$$\mu.[\,] = [\,]^\omega\emptyset$$

soit valide dans $\mathcal{M}$ est que $\{\, v' \mid v \rightarrow v' \,\}$ est un ensemble fini, pour tout $v \in V$.

**Solution.** Il suffit de montrer que

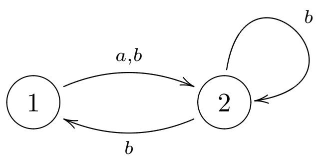
$$[\,](\bigcup_{n\geq 0}[\,]^n\emptyset) \subseteq \bigcup_{n\geq 0}[\,]^n\emptyset\,.$$

Soit $s \in [\,](\bigcup_{n\geq 0}[\,]^n\emptyset)$ et $\{\, s_1, \ldots, s_k \,\}$ l'ensemble de ses successeurs. On a $s_i \in \bigcup_{n\geq 0}[\,]^n\emptyset$, et donc pour chaque $i = 1, \ldots, k$, il existe $n_i$ tel que $s_i \in [\,]^{n_i}\emptyset$. Car $[\,]^n\emptyset \subseteq [\,]^m\emptyset$ si $n \leq m$, soit $m = \max\{\, n_1, \ldots, n_k \,\}$, on a $s_i \in [\,]^m\emptyset$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Il en découle que $s \in [\,]^{m+1}\emptyset$, et par conséquent $s \in \bigcup_{n\geq 0}[\,]^n\emptyset$. □

(iii). Est ce que cette condition est aussi nécessaire ? Justifiez votre réponse.

**Solution.** La condition n'est pas nécessaire. Considérons le modèle suivant $\langle \mathbb{N}, \rightarrow\rangle$, où $0 \rightarrow i$ pour tout $i \geq 1$ et $i$ ne possède pas des successeurs (pour tout $i \geq 1$).
Nous avons donc un système de transition avec branchement infinis et vérifiant $\mu.[\,] = [\,]^2\emptyset$. Cela implique en particulier que $[\,]^\omega\emptyset = [\,]^2\emptyset$ et donc $\mu.[\,] = [\,]^\omega\emptyset$. □

**Exercice 6.** Soient $\phi$ la formule $\mu_x.\nu_y.(\langle a\rangle x \vee [b]y)$ et $\mathcal{M}$ le système de transition suivant :



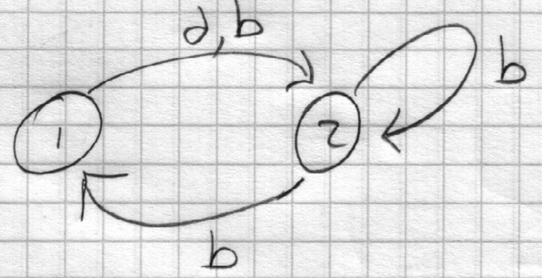

(i). Construisez le jeu $\mathcal{G}(\mathcal{M}, \phi)$ : dessinez le graphe des positions et des mouvements, étiquetez les positions par un joueur.

(ii). Explicitez la condition de gagne pour les chemins infinis, faites des exemples. (Possible solution : proposez une fonction partielle de priorité sur les positions, de façon à répresenter ce jeu comme un jeu de parité).

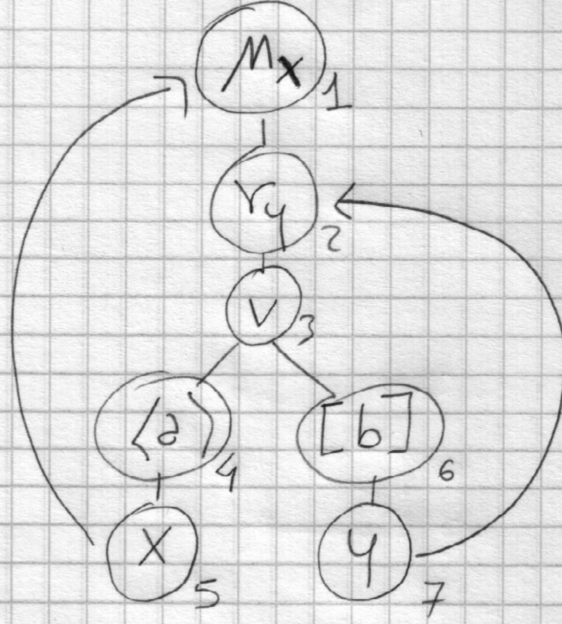
(iii). Est ce que $\mathcal{M}, 1 \models \phi$ ? Justifiez votre réponse.

**Solution.**

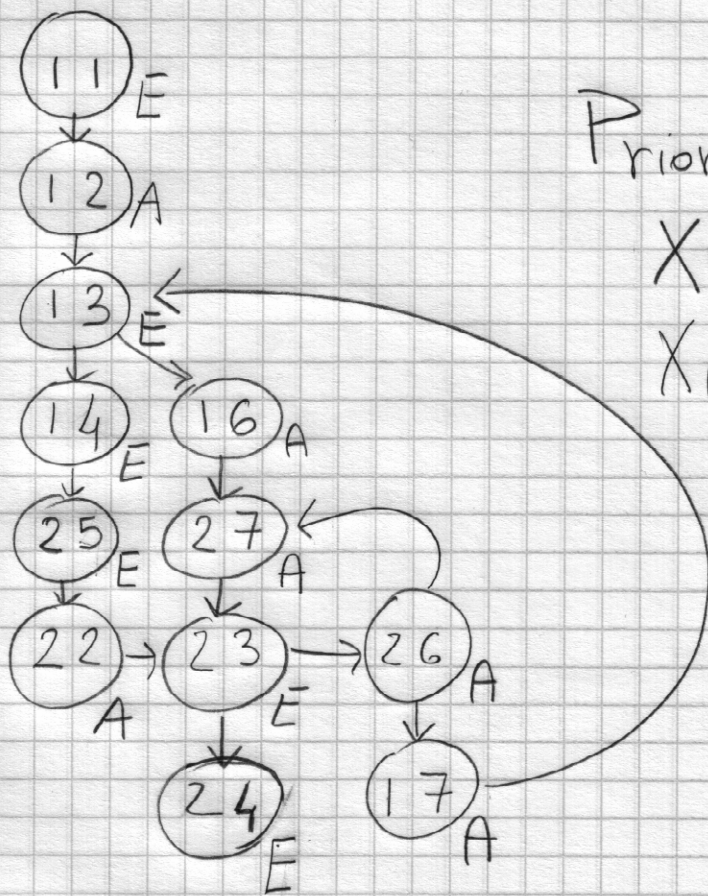
## Système




## Formule




## Le jeu




Priorité X :

$$X(q,5) = 3$$
$$X(q,7) = 2$$
$$X(q,n) = 0$$

On observe que Eva peut éviter de passer par la position $(2,5)$, et peut toujours continuer le jeu. Donc la priorité maximale d'un chemin infini sera 2, et ce chemin sera gagnante pour Eva. D'ici on déduit que Eva possède une stratégie gagnante de $(1,1)$, et donc $\mathcal{M}, 1 \models \phi$. $\square$

## Conditions d'acceptation pour les automates

Soit $G = \langle Q, \rightarrow \rangle$ un graphe d'états et transitions – par exemple les états et transitions d'un automate sur les mots infinis, ou l'ensemble de positions et mouvements d'un jeu.

- Une *condition de parité* sur $G$ est une fonction $\chi : Q \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\chi(Q)$ est fini. Un chemin infini $\pi$ est accepté si et seulement si $\max In(\chi \circ \pi)$ est pair.
- Une *condition de Rabin à chaînes* est une condition de Rabin $(R_i, G_i)_{i=0,..,n}$ telle que $G_i \supseteq R_i$ pour $i = 0, \ldots, n$ et $R_{i-1} \supseteq G_i$ pour $i = 1, \ldots n$. Comme d'habitude un chemin infini $\pi$ est accepté si et seulement s'il existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $In(\pi) \cap R_i = \emptyset$ et $In(\pi) \cap G_i \neq \emptyset$.

**Exercice 7.**

(i). Montrez que pour toute condition de parité il existe une condition de Rabin à chaînes qui accepte les mêmes chemins infinis.
Conseil : considérez les ensembles $\{ q \in Q \mid \chi(q) \geq i \}$.

**Solution.** Soit donc $S_i = \{ q \in Q \mid \chi(q) \geq i \}$ et observons que $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots$. Posons $G_k = S_{2k}$ et $R_k = S_{2k+1}$.
Supposons que $\pi$ soit un chemin infini accepté : $\max In(\chi \circ \pi) = 2k$. Cela montre que $In(\pi) \cap S_{2k} \neq \emptyset$, mais aussi que $In(\pi) \cap S_{2k+1} = \emptyset$. Donc $\pi$ est accepté par la condition de Rabin.
Supposons que $In(\pi) \cap S_{2k} \neq \emptyset$ et $In(\pi) \cap S_{2k+1} = \emptyset$. Donc il existe un élément $q \in Q$ visité infiniment souvent par $\pi$ tel que $\chi(q) \geq 2k$ mais $\chi(q) < 2k+1$, i.e. $\chi(q) = 2k$. On a donc $2k \in In(\chi \circ \pi)$ et $j \notin In(\chi \circ \pi)$ si $j \geq 2k+1$ : on déduit que $\max In(\chi \circ \pi) = 2k$ est pair, et donc accepté par la condition de Rabin. $\square$

(ii). Montrez que pour toute condition de Rabin à chaînes il existe une condition de parité qui accepte les mêmes chemin infinis.

**Solution.** On peut trier les indexes de la chaîne de Rabin de façon qu'on ait $G_{i_0} \supseteq R_{i_1} \supseteq G_{i_2} \ldots$. Il suffit alors de poser $\chi(q) = k$ ssi $q \in G_{i_k} \setminus R_{i_{k-1}}$ ou $q \in R_{i_k} \setminus G_{i_{k-1}}$. $\square$

**Exercice 8.** Dans le cours, nous avons vu qu'etant donnée une condition de Rabin $\mathcal{R} = (R_i, G_i)_{i \in I}$ nous pouvons construire une codition de Muller $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ qui accepte les mêmes chemins infinis.

(i). Rappelez la construction de $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ à partir des couples $(R_i, G_i)_{i \in I}$.

**Solution.** Nous avons posé

$$\mathcal{F}_{\mathcal{R}} = \{ X \subseteq Q \mid \exists i \in I \text{ t.q. } X \cap R_i = \emptyset \text{ et } X \cap G_i \neq \emptyset \} .$$

$\square$

(ii). Montrez que si $\mathcal{R} = (R_i, G_i)_{i \in I}$ est une condition de Rabin, alors $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ possède cette propriété :

$$X \cup Y \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}} \text{ implique } X \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}} \text{ ou } Y \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}} .$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
X \cup Y \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}} \ &\text{ssi } \exists i \in I \text{ t.q. } (X \cup Y) \cap R_i = \emptyset \text{ et } (X \cup Y) \cap G_i \neq \emptyset \\
&\text{ssi } \exists i \in I \text{ t.q. } X \cap R_i = \emptyset \text{ et } Y \cap R_i = \emptyset \text{ et } (X \cap G_i \neq \emptyset \text{ ou } Y \cap G_i \neq \emptyset) \\
&\text{ssi } (\exists i \in I \text{ t.q. } X \cap R_i = \emptyset \text{ et } Y \cap R_i = \emptyset \text{ et } X \cap G_i \neq \emptyset) \text{ ou} \\
&\quad (\exists i \in I \text{ t.q. } X \cap R_i = \emptyset \text{ et } Y \cap R_i = \emptyset \text{ et } Y \cap G_i \neq \emptyset) \\
&\text{implique } (\exists i \in I \text{ t.q. } X \cap R_i = \emptyset \text{ et } X \cap G_i \neq \emptyset) \text{ ou } (\exists i \in I \text{ t.q. } Y \cap R_i = \emptyset \text{ et } Y \cap G_i \neq \emptyset) \\
&\text{ssi } X \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}} \text{ ou } X \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}} .
\end{aligned}$$

$\square$

(iii). Montrez que si $\mathcal{R} = (R_i, G_i)_{i=0,..,n}$ est une condition de Rabin à chaînes, alors la table de Muller

$$\overline{\mathcal{F}_{\mathcal{R}}} = \{\, X \subseteq Q \mid X \notin \mathcal{F}_{\mathcal{R}} \,\} \tag{3}$$

est de la forme $\overline{\mathcal{F}_{\mathcal{R}}} = \mathcal{F}_{\mathcal{R}'}$ ou $\mathcal{R}'$ est une condition de Rabin à chaînes.

**Solution.** Si la condition de Rabin à chaine est de la forme $G_0 \supseteq R_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$ alors nous pouvons définir une condition de Rabin $\mathcal{R}'$ ayant la forme $\overline{R}_0 \supseteq \overline{G}_1 \supseteq \ldots$ en posant $\overline{R}_i = G_i$ et $\overline{G}_i = R_i$.
Supposons que $X \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$, i.e. $X \cap G_i \neq \emptyset$ et $X \cap R_{i-1} = \emptyset$ pour quelque $i$. Si $j \leq i-1$ $X \cap \overline{G}_j = X \cap R_j \subseteq X \cap R_{i-1} = \emptyset$. Pour $j \geq i$, si $X \cap \overline{R}_j = X \cap G_j \supseteq X \cap G_i \neq \emptyset$. Cela montre que $X \notin \mathcal{F}_{\mathcal{R}'}$.
Car si l'on construit $\mathcal{R}''$ on obtient encore $\mathcal{R}$ (cette construction est une involution), si $X \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}'}$ alors $X \notin \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$.
On peut conclure que $X \notin \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ ssi $X \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}'}$. □

(iv). Concluez que si $\mathcal{R} = (R_i, G_i)_{i=0,..,n}$ est une condition de Rabin à chaînes, alors $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ possède ces deux propriétés :

$$X, Y \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}} \text{ implique } X \cup Y \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}, \tag{4}$$

$$X, Y \notin \mathcal{F}_{\mathcal{R}} \text{ implique } X \cup Y \notin \mathcal{F}_{\mathcal{R}}\,. \tag{5}$$

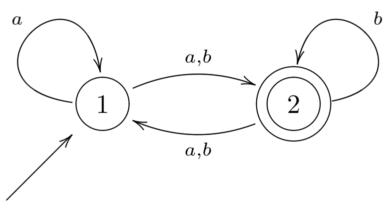
**Solution.** On obtient (4) en prenant la contrapposée de (3) avec $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{R}}$. On obtient (5) en prenant la contrapposée de (3) avec $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$. □

(v). Montrez que si une table de Muller $\mathcal{F}$ satisfait (4) et (5) alors il existe une condition de Rabin à chaines $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$.
Conseil : supposez $Q \notin \mathcal{F}$, de façon que $\bigcup \mathcal{F}$, le plus grand ensemble dans $\mathcal{F}$, n'est pas l'ensemble totale. Montrez que la table de Muller $\mathcal{F}_1 = \{\, X \subseteq \bigcup \mathcal{F} \mid X \notin \mathcal{F} \,\}$ satisfait encore (4) et (5) pour tous $X, Y \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. On construira de cette façon un chaîne d'ensembles $Q \supseteq \bigcup \mathcal{F} \supseteq \bigcup \mathcal{F}_1, \ldots$

**Solution.** Si $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ possedent cette propriété, alors $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{F}$ et $\bigcup \overline{\mathcal{F}} \in \overline{\mathcal{F}}$ (si $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ ne sont pas vides).
Si $\mathcal{F}$ est vide, alors on peut poser $(Q, \emptyset)$. Si $\overline{\mathcal{F}}$ est vide, alors on peut poser $(\emptyset, Q)$.
Sinon les deux tables ne sont pas vides. Supposons $Q \in \overline{\mathcal{F}}$, soit $Q' = \bigcup \mathcal{F}$. Les tables $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}' = \{\, X \subseteq Q' \mid X \in \overline{\mathcal{F}} \,\}$ sont deux tables sur $Q'$ satisfaisant (4) et (5).
Par hypothèse d'induction on peut construire une condition de Rabin à chaine $Q' = G_0 \supseteq R_1 \ldots$, on obtient une condition de Rabin à chaine pour $\mathcal{F}$ de la chaîne $Q = R_{-1} \supseteq G_0 \supseteq R_1 \supseteq \ldots$. □

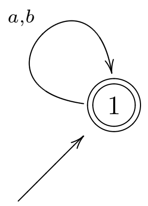
# Automates et déterminisation

**Exercice 9.** Considérez l'automate de Buchi suivant :




Construisez un automate de Rabin déterministe équivalent à cet automate. Documentez la construction.

**Solution.** Remarquons que cet automate reconait le langage $(a \cup b)^\omega$ : tout mot infinis est reconnu par cet automate. On peut donc tout simplement poser




□

Remarque : on peut bien utiliser la construction de Safra.