# *Traduction et Sémantique*
# *Analyse syntaxique*

Luigi Santocanale
LIF, Université de Provence
Marseille, FRANCE

12 février 2010

# *Plan*

# *Plan*

Rappels de la théorie des langages

- Grammaires
- Automates à pile – AP
- Grammaires, APs, AFNs

# *Une grammaire non contextuelle . . .*

. . . est un tuplet

$$\mathscr{G} \;=\; \langle\; V \,,\, \Sigma \,,\, S \,,\, P \;\rangle$$

où :

- $V$ est un alphabet fini,
- $\Sigma \subseteq V$ est l'alphabet des symboles *terminaux*,
- $S \in V \setminus \Sigma$ est le *symbole de départ*,
- $P \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^*$ est un ensemble fini de *productions*.

On appelle un symbole $X \in V \setminus \Sigma$ un *non-terminal*.

# *Une grammaire non contextuelle . . .*

. . . est un tuplet

$$\mathscr{G} = \langle\ V\ ,\ \Sigma\ ,\ S\ ,\ P\ \rangle$$

où :

- $V$ est un alphabet fini,
- $\Sigma \subseteq V$ est l'alphabet des symboles *terminaux*,
- $S \in V \setminus \Sigma$ est le *symbole de départ*,
- $P \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^*$ est un ensemble fini de *productions*.

On appelle un symbole $X \in V \setminus \Sigma$ un *non-terminal*.

# *Une grammaire non contextuelle . . .*

. . . est un tuplet

$$\mathscr{G} \;=\; \langle\; V \,,\, \Sigma \,,\, S \,,\, P \;\rangle$$

où :

- $V$ est un alphabet fini,
- $\Sigma \subseteq V$ est l'alphabet des symboles *terminaux*,
- $S \in V \setminus \Sigma$ est le *symbole de départ*,
- $P \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^*$ est un ensemble fini de *productions*.

On appelle un symbole $X \in V \setminus \Sigma$ un *non-terminal*.

# *Une grammaire non contextuelle . . .*

. . . est un tuplet

$$\mathscr{G} \; = \; \langle \; V \, , \, \Sigma \, , \, S \, , \, P \; \rangle$$

où :

- $V$ est un alphabet fini,
- $\Sigma \subseteq V$ est l'alphabet des symboles *terminaux*,
- $S \in V \setminus \Sigma$ est le *symbole de départ*,
- $P \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^*$ est un ensemble fini de *productions*.

On appelle un symbole $X \in V \setminus \Sigma$ un *non-terminal*.

# *Une grammaire non contextuelle . . .*

. . . est un tuplet

$$\mathscr{G} \;=\; \langle\; V \,,\, \Sigma \,,\, S \,,\, P \;\rangle$$

où :

- $V$ est un alphabet fini,
- $\Sigma \subseteq V$ est l'alphabet des symboles *terminaux*,
- $S \in V \setminus \Sigma$ est le *symbole de départ*,
- $P \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^*$ est un ensemble fini de *productions*.

On appelle un symbole $X \in V \setminus \Sigma$ un *non-terminal*.

# *Une grammaire non contextuelle . . .*

. . . est un tuplet

$$\mathscr{G} \;=\; \langle\; V \,,\, \Sigma \,,\, S \,,\, P \;\rangle$$

où :

- $V$ est un alphabet fini,
- $\Sigma \subseteq V$ est l'alphabet des symboles *terminaux*,
- $S \in V \setminus \Sigma$ est le *symbole de départ*,
- $P \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^*$ est un ensemble fini de *productions*.

On appelle un symbole $X \in V \setminus \Sigma$ un *non-terminal*.

# Un exemple

- $V = \{ S, T, a, b \}$,
- $\Sigma = \{ a, b \}$,
- et $P = \{ (S, T), (T, TT), (T, aTb), (T, \varepsilon) \}$,

  ce qu'on écrit :

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \\ T &\to aTb \\ T &\to \varepsilon \end{aligned}$$

ou, alternativement :

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \mid aTb \mid \varepsilon\,. \end{aligned}$$

# Un exemple

- $V = \{S, T, a, b\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- et $P = \{(S, T), (T, TT), (T, aTb), (T, \varepsilon)\}$,
  ce qu'on écrit :

$$
\begin{aligned}
S &\to T \\
T &\to TT \\
T &\to aTb \\
T &\to \varepsilon
\end{aligned}
$$

  ou, alternativement :

$$
\begin{aligned}
S &\to T \\
T &\to TT \mid aTb \mid \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

# « Dériver »

Soient $w, v \in V^*$.

- On écrit
$$w \Rightarrow v$$
si
  - $w = w_0 X w_1$,
  - $v = w_0 u w_1$, et
  - la grammaire contient la production
$$X \to u\,.$$

- On écrit
$$w \Rightarrow^* v \qquad \text{(à lire : } w \text{ se dérive à } v\text{)}$$
s'il existe $n \geq 0$ et $w_0, w_1, \ldots, w_n$ tels que :
  - $w = w_0$, $w_n = v$, et
  - $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots w_{n-1} \Rightarrow w_n$.

# « Dériver »

Soient $w, v \in V^*$.

- On écrit
$$w \Rightarrow v$$
si
  - $w = w_0 X w_1$,
  - $v = w_0 u w_1$, et
  - la grammaire contient la production
$$X \to u\,.$$
- On écrit
$$w \Rightarrow^* v \qquad \text{(à lire : } w \text{ se dérive à } v\text{)}$$
s'il existe $n \geq 0$ et $w_0, w_1, \ldots, w_n$ tels que :
  - $w = w_0$, $w_n = v$, et
  - $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots w_{n-1} \Rightarrow w_n\,.$

# *Langage d'une grammaire*

Défini par :

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w \}.$$

Attention :
si $w \in L(\mathscr{G})$, alors chaque lettre de $w$ est un symbole terminal.

Une *dérivation* de $w \in \Sigma^*$ de $S$
est une suite $w_0, \ldots, w_n$ telle que :

- $S = w_0$, $w_n = v$, et
- $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots w_{n-1} \Rightarrow w_n$.

# Langage d'une grammaire

Défini par :

$$L(G) = \{\, w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w \,\}\,.$$

Attention :
si $w \in L(\mathscr{G})$, alors chaque lettre de $w$ est un symbole terminal.

Une *dérivation* de $w \in \Sigma^*$ de $S$
est une suite $w_0, \ldots, w_n$ telle que :

- $S = w_0$, $w_n = v$, et
- $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots w_{n-1} \Rightarrow w_n\,.$

# Un exemple

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \\ T &\to aTb \\ T &\to \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# Un exemple

Le mot *abab* $\in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \\ T &\rightarrow TT \\ T &\rightarrow aTb \\ T &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# Un exemple

Le mot *abab* $\in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \\ T &\to aTb \\ T &\to \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \} \\ &= \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \}. \end{aligned}$$

# Un exemple

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$
\begin{aligned}
S &\to T \\
T &\to TT \\
T &\to aTb \\
T &\to \varepsilon
\end{aligned}
$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$
\begin{aligned}
L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\
&= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\
&\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}.
\end{aligned}
$$

# Un exemple

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned}
S &\to T \\
T &\to TT \\
T &\to aTb \\
T &\to \varepsilon
\end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned}
L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\
&= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\
&\qquad \text{et } |u|_b \le |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}.
\end{aligned}$$

# *Un exemple*

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \\ T &\rightarrow TT \\ T &\rightarrow aTb \\ T &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# *Un exemple*

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \\ T &\to aTb \\ T &\to \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad \text{et } |u|_b \le |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# Un exemple

Le mot *abab* $\in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$
\begin{aligned}
S &\to T\\
T &\to TT\\
T &\to aTb\\
T &\to \varepsilon
\end{aligned}
$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$
\begin{aligned}
L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\}\\
&= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\\
&\qquad \text{et } |u|_b \le |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}.
\end{aligned}
$$

# *Un exemple*

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \\ T &\to aTb \\ T &\to \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# *Un exemple*

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$
\begin{aligned}
S &\to T \\
T &\to TT \\
T &\to aTb \\
T &\to \varepsilon
\end{aligned}
$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab .$$

En fait :

$$
\begin{aligned}
L(G) &= \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \} \\
&= \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\
&\qquad\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \} .
\end{aligned}
$$

# Un exemple

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \\ T &\to aTb \\ T &\to \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# Un exemple

Le mot *abab* $\in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \\ T &\to aTb \\ T &\to \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# Un exemple

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \\ T &\rightarrow TT \\ T &\rightarrow aTb \\ T &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# Un exemple

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$\begin{aligned} S &\to T \\ T &\to TT \\ T &\to aTb \\ T &\to \varepsilon \end{aligned}$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab\,.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}\,. \end{aligned}$$

# Un exemple

Le mot $abab \in L(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est la grammaire

$$S \rightarrow T$$
$$T \rightarrow TT$$
$$T \rightarrow aTb$$
$$T \rightarrow \varepsilon$$

car :

$$S \Rightarrow T \Rightarrow TT \Rightarrow aTbT \Rightarrow aTbaTb \Rightarrow aTbab \Rightarrow abab.$$

En fait :

$$\begin{aligned} L(G) &= \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien parenthésé} \,\} \\ &= \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \\ &\qquad\qquad \text{et } |u|_b \leq |u|_a \text{ si } u \text{ est un préfixe de } w \,\}. \end{aligned}$$

# *Grammaires sans $\varepsilon$-règles*

Une $\varepsilon$-règle est une production de la forme

$$T \to \varepsilon\,.$$

Lemme. Toute grammaire $\mathscr{G}$ peut se transformer en une grammaire $\mathscr{G}'$ telle que toute $\varepsilon$-règle a la forme :

$$S \to \varepsilon$$

(où $S$ est le symbole de départ).

Notre exemple :

$$\begin{aligned} S &\to \varepsilon \mid T \\ T &\to TT \mid aTb \mid ab\,. \end{aligned}$$

Nous considérerons des grammaires ayant cette forme.

# *Dérivation gauche et droite*

- On appelle une *dérivation gauche*
  si on récrit toujours le non-terminal plus à gauche.
- On appelle une *dérivation droite*
  si on récrit toujours le non-terminal plus à droite.
- Un mot $w \in L(\mathscr{G})$ peut avoir *plusieurs dérivations*
  qui témoignent de son appartenance à $L(\mathscr{G})$.

# *Dérivation gauche et droite*

- On appelle une *dérivation gauche* si on récrit toujours le non-terminal plus à gauche.
- On appelle une *dérivation droite* si on récrit toujours le non-terminal plus à droite.
- Un mot $w \in L(\mathscr{G})$ peut avoir *plusieurs dérivations* qui témoignent de son appartenance à $L(\mathscr{G})$.

# *Dérivation gauche et droite*

- On appelle une *dérivation gauche*
  si on récrit toujours le non-terminal plus à gauche.
- On appelle une *dérivation droite*
  si on récrit toujours le non-terminal plus à droite.
- Un mot $w \in L(\mathscr{G})$ peut avoir *plusieurs dérivations*
  qui témoignent de son appartenance à $L(\mathscr{G})$.

# Arbre de dérivation

On utilse les productions de $\mathscr{G}$pour construire un arbre.

Soit $\mathscr{G}$ :

$$S \to \varepsilon \mid T$$
$$T \to TT \mid aTb \mid ab\,.$$


$$\begin{aligned} S &\Rightarrow T \\ &\Rightarrow TT \\ &\Rightarrow Tab \\ &\Rightarrow abab \end{aligned}$$

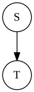
Le mot qui apparaît sur les feuilles est alors un mot de $L(\mathscr{G})$.

# *Arbre de dérivation*

On utilse les productions de $\mathscr{G}$pour construire un arbre.

Soit $\mathscr{G}$ :

$$
\begin{aligned}
S &\to \varepsilon \mid T \\
T &\to TT \mid aTb \mid ab\,.
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow T \\
&\Rightarrow TT \\
&\Rightarrow Tab \\
&\Rightarrow abab
\end{aligned}
$$

Le mot qui apparaît sur les feuilles est alors un mot de $L(\mathscr{G})$.

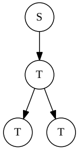
# Arbre de dérivation

On utilse les productions de $\mathscr{G}$pour construire un arbre.

Soit $\mathscr{G}$ :

$$S \to \varepsilon \mid T$$
$$T \to TT \mid aTb \mid ab\,.$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow T \\ &\Rightarrow TT \\ &\Rightarrow Tab \\ &\Rightarrow abab \end{aligned}$$




Le mot qui apparaît sur les feuilles est alors un mot de $L(\mathscr{G})$.

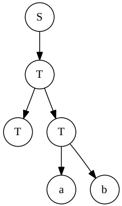
# *Arbre de dérivation*

On utilse les productions de $\mathscr{G}$pour construire un arbre.

Soit $\mathscr{G}$ :

$$S \to \varepsilon \mid T$$
$$T \to TT \mid aTb \mid ab\,.$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow T \\ &\Rightarrow TT \\ &\Rightarrow Tab \\ &\Rightarrow abab \end{aligned}$$




Le mot qui apparaît sur les feuilles est alors un mot de $L(\mathscr{G})$.

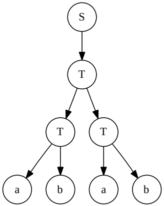
# Arbre de dérivation

On utilse les productions de $\mathscr{G}$pour construire un arbre.

Soit $\mathscr{G}$ :

$$S \to \varepsilon \mid T$$
$$T \to TT \mid aTb \mid ab.$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow T \\ &\Rightarrow TT \\ &\Rightarrow Tab \\ &\Rightarrow abab \end{aligned}$$




Le mot qui apparaît sur les feuilles est alors un mot de $L(\mathscr{G})$.

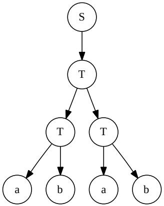
# Arbre de dérivation

On utilse les productions de $\mathscr{G}$pour construire un arbre.

Soit $\mathscr{G}$ :

$$S \to \varepsilon \mid T$$
$$T \to TT \mid aTb \mid ab.$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow T \\ &\Rightarrow TT \\ &\Rightarrow Tab \\ &\Rightarrow abab \end{aligned}$$




Le mot qui apparaît sur les feuilles est alors un mot de $L(\mathscr{G})$.

# *Dérivations et leurs arbres*

- Il existe une bijection entre dérivations gauches d'un mot $w$ et arbres de dérivation de $w$.
- Il existe une bijection entre dérivations droites d'un mot et ses arbres de dérivation.
- Un mot peut avoir plusieurs arbres de dérivation, « essentiellement différentes ».
- Un mot peut avoir plusieurs arbres de dérivation.

# Dérivations et leurs arbres

- Il existe une bijection entre
  dérivations gauches d'un mot *w*
  et arbres de dérivation de *w*.
- Il existe une bijection entre
  dérivations droites d'un mot et ses arbres de dérivation.
- Un mot peut avoir plusieurs arbres de dérivation,
  « essentiellement différentes ».
- Un mot peut avoir plusieurs arbres de dérivation.

# Dérivations et leurs arbres

- Il existe une bijection entre
  dérivations gauches d'un mot $w$
  et arbres de dérivation de $w$.
- Il existe une bijection entre
  dérivations droites d'un mot et ses arbres de dérivation.
- Un mot peut avoir plusieurs arbres de dérivation,
  « essentiellement différentes ».
- Un mot peut avoir plusieurs arbres de dérivation.

# Dérivations et leurs arbres

- Il existe une bijection entre
  dérivations gauches d'un mot $w$
  et arbres de dérivation de $w$.
- Il existe une bijection entre
  dérivations droites d'un mot et ses arbres de dérivation.
- Un mot peut avoir plusieurs arbres de dérivation,
  « essentiellement différentes ».
- Un mot peut avoir plusieurs arbres de dérivation.

# *Ambiguïté*

- Un *mot* $w \in L(\mathscr{G})$ est *ambigu* s'il possède plus qu'un arbre de dérivation.
- Une *grammaire* $\mathscr{G}$ est *ambiguë* s'il existe un mot $w \in L(\mathscr{G})$ qui est ambigu.
- Un *langage* $L$ est *ambigu* si toute grammaire $\mathscr{G}$ telle que $L = L(\mathscr{G})$ est ambiguë.

# *Ambiguïté*

- Un *mot* $w \in L(\mathscr{G})$ est *ambigu*
  s'il possède plus qu'un arbre de dérivation.
- Une *grammaire* $\mathscr{G}$ est *ambiguë*
  s'il existe un mot $w \in L(\mathscr{G})$ qui est ambigu.
- Un *langage* $L$ est *ambigu*
  si toute grammaire $\mathscr{G}$ telle que $L = L(\mathscr{G})$ est ambiguë.

# *Ambiguïté*

- Un *mot* $w \in L(\mathscr{G})$ est *ambigu*
  s'il possède plus qu'un arbre de dérivation.
- Une *grammaire* $\mathscr{G}$ est *ambiguë*
  s'il existe un mot $w \in L(\mathscr{G})$ qui est ambigu.
- Un *langage* $L$ est *ambigu*
  si toute grammaire $\mathscr{G}$ telle que $L = L(\mathscr{G})$ est ambiguë.

# *Un grammaire ambiguë*

Soit $\mathscr{G}$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \mathit{Expr} \\
\mathit{Expr} &\rightarrow \mathit{Expr} + \mathit{Expr} \mid \mathit{Expr} * \mathit{Expr} \mid (\mathit{Expr}) \mid \mathit{Const} \\
\mathit{Const} &\rightarrow \mathit{Chiffre} \mid \mathit{Chiffre}\ \mathit{Const} \\
\mathit{Chiffre} &\rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9
\end{aligned}
$$

Cette grammaire est ambiguë, car le mot

$$1 + 2 * 3 \in L(\mathscr{G})$$

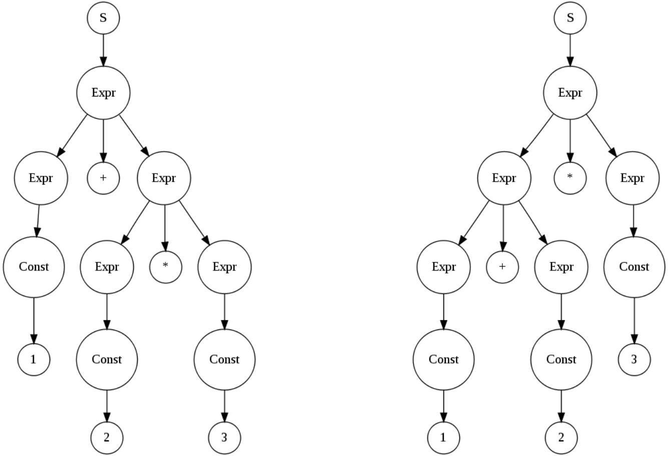
est ambigu.

# Un mot ambigu

Le mot

$$1 + 2 * 3 \in L(\mathscr{G})$$

est ambigu, car :



# *Des langages (non) ambigus*

Le langage $L(\mathscr{G})$ est non ambigu. Soit $\mathscr{G}'$ :

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow Expr \\
Expr &\rightarrow Expr + Terme \mid Terme \\
Terme &\rightarrow Terme * Facteur \mid Facteur \\
Facteur &\rightarrow (Expr) \mid Const \\
Const &\rightarrow Chiffre \mid Chiffre\ Const \\
Chiffre &\rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9
\end{aligned}$$

alors $L(\mathscr{G}') = L(\mathscr{G})$.

Le langage

$$\{ a^n b^n c^m d^m \mid n, m \geq 1 \} \cup \{ a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 1 \}$$

est ambigu.

# Des langages (non) ambigus

Le langage $L(\mathscr{G})$ est non ambigu. Soit $\mathscr{G}'$ :

$$\begin{aligned}
S &\to Expr \\
Expr &\to Expr + Terme \mid Terme \\
Terme &\to Terme * Facteur \mid Facteur \\
Facteur &\to (Expr) \mid Const \\
Const &\to Chiffre \mid Chiffre\ Const \\
Chiffre &\to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9
\end{aligned}$$

alors $L(\mathscr{G}') = L(\mathscr{G})$.

Le langage

$$\{ a^n b^n c^m d^m \mid n, m \geq 1 \} \cup \{ a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 1 \}$$

est ambigu.

# *Automate à pile*

…est un tuplet

$$\langle Q, \Sigma, i, F, \Gamma, \Delta \rangle$$

où

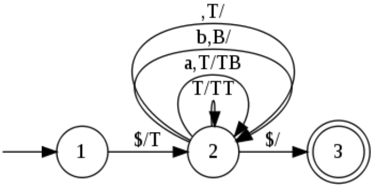
- $Q$ ensemble fini d'états,
- $\Sigma$ alphabet d'entrée,
- $i \in Q$ état initial, $F \subseteq Q$,
- $\Gamma$ alphabet de pile,
- $\Delta$, la fonction de transition a le type suivant :

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow \mathscr{P}(\Gamma^* \times Q)\,.$$

c'est-à-dire

$$\Delta(q, a, X) \subseteq \Gamma^* \times Q$$

# Représentation graphique




- $Q = \{1,2,3\}$, $i = 1$, $F = \{3\}$,
- $\Sigma = \{a,b\}$,
- $\Gamma = \{\$,T,B\}$,
- 

| $\Delta$ | $(\varepsilon,\$)$ | $(\varepsilon,T)$ | $(a,T)$ | $(b,T)$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\{(T,2)\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | |
| 2 | $\{(\varepsilon,3)\}$ | $\{(TT,2),(\varepsilon,2)\}$ | $\{(TB,2)\}$ | $\{(\varepsilon,3)\}$ | |
| 3 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | |

# Reconnaissance par AP

- Configuration : $(q, w, \gamma)$ où
  - $q \in Q$,
  - $w \in \Sigma^*$ (la chaîne à lire),
  - et $\gamma \in \Gamma^*$ (la pile).

- Transition :

$$
\begin{aligned}
(q, w, \gamma) \vdash (q', w', \gamma') \quad & \text{ssi} \\
& w = aw',\ \gamma = T\alpha, \\
& \qquad (\beta, q') \in \Delta(q, a, T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha \\
\text{ou} \quad & \\
& w = u,\ \gamma = T\alpha, \\
& \qquad (\beta, q') \in \Delta(q, \varepsilon, T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha .
\end{aligned}
$$

# *Reconnaissance par AP*

- Configuration : $(q, w, \gamma)$ où
  - $q \in Q$,
  - $w \in \Sigma^*$ (la chaîne à lire),
  - et $\gamma \in \Gamma^*$ (la pile).

- Transition :

$$
\begin{aligned}
(q, w, \gamma) \vdash (q', w', \gamma') \quad & \text{ssi} \\
& w = aw',\ \gamma = T\alpha, \\
& \qquad (\beta, q') \in \Delta(q, a, T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha \\
\text{ou} & \\
& w = u,\ \gamma = T\alpha, \\
& \qquad (\beta, q') \in \Delta(q, \varepsilon, T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha\,.
\end{aligned}
$$

# *Reconnaissance par AP*

- Configuration : $(q, w, \gamma)$ où
  - $q \in Q$,
  - $w \in \Sigma^*$ (la chaîne à lire),
  - et $\gamma \in \Gamma^*$ (la pile).

- Transition :

$$
\begin{aligned}
(q, w, \gamma) \vdash (q', w', \gamma') \quad & \text{ssi} \\
& w = aw',\ \gamma = T\alpha, \\
& \qquad (\beta, q') \in \Delta(q, a, T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha \\
\text{ou} & \\
& w = u,\ \gamma = T\alpha, \\
& \qquad (\beta, q') \in \Delta(q, \varepsilon, T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha\,.
\end{aligned}
$$

# Reconnaissance par AP

- Configuration : $(q, w, \gamma)$ où
  - $q \in Q$,
  - $w \in \Sigma^*$ (la chaîne à lire),
  - et $\gamma \in \Gamma^*$ (la pile).

- Transition :

$$
\begin{aligned}
(q,w,\gamma) \vdash (q',w',\gamma') \quad & \text{ssi} \\
& w = aw',\ \gamma = T\alpha, \\
& \qquad (\beta, q') \in \Delta(q,a,T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha \\
\text{ou} & \\
& w = u,\ \gamma = T\alpha, \\
& \qquad (\beta, q') \in \Delta(q,\varepsilon,T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha\,.
\end{aligned}
$$

# Reconnaissance par AP

- Configuration : $(q, w, \gamma)$ où
  - $q \in Q$,
  - $w \in \Sigma^*$ (la chaîne à lire),
  - et $\gamma \in \Gamma^*$ (la pile).

- Transition :

$$(q, w, \gamma) \vdash (q', w', \gamma') \quad \text{ssi}$$

$$w = aw',\ \gamma = T\alpha,$$

$$(\beta, q') \in \Delta(q, a, T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha$$

ou

$$w = u,\ \gamma = T\alpha,$$

$$(\beta, q') \in \Delta(q, \varepsilon, T) \ \text{ et } \ \gamma' = \beta\alpha\,.$$

# *Langage d'un AP*

Le mot $w \in L(\mathscr{A})$ ssi
il existe $n \geq 0$ et $(q_0, w_0, \gamma_0), \ldots, (q_n, w_n, \gamma_n)$ tels que :

- $(i, w, \$) = (q_0, w_0, \gamma_0)$,
- $(q_n, w_n, \gamma_n) = (q_n, \varepsilon, \gamma_n)$ et $q_n \in F$,
- $(q_i, w_i, \gamma_i) \vdash (q_{i+1}, w_{i+1}, \gamma_{i+1})$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.

# Langage d'un AP

Le mot $w \in L(\mathscr{A})$ ssi
il existe $n \geq 0$ et $(q_0, w_0, \gamma_0), \ldots, (q_n, w_n, \gamma_n)$ tels que :

- $(i, w, \$) = (q_0, w_0, \gamma_0)$,
- $(q_n, w_n, \gamma_n) = (q_n, \varepsilon, \gamma_n)$ et $q_n \in F$,
- $(q_i, w_i, \gamma_i) \vdash (q_{i+1}, w_{i+1}, \gamma_{i+1})$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.

# *Langage d'un AP*

Le mot $w \in L(\mathscr{A})$ ssi

il existe $n \geq 0$ et $(q_0, w_0, \gamma_0), \ldots, (q_n, w_n, \gamma_n)$ tels que :

- $(i, w, \$) = (q_0, w_0, \gamma_0)$,
- $(q_n, w_n, \gamma_n) = (q_n, \varepsilon, \gamma_n)$ et $q_n \in F$,
- $(q_i, w_i, \gamma_i) \vdash (q_{i+1}, w_{i+1}, \gamma_{i+1})$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$)\\
&\vdash (2, abaabb, TT\$)\\
&\vdash (2, baabb, TBT\$)\\
&\vdash (2, baabb, BT\$)\\
&\vdash (2, aabb, T\$)\\
&\vdash (2, abb, TB\$)\\
&\vdash (2, bb, TBB\$)\\
&\vdash (2, bb, BB\$)\\
&\vdash (2, b, B\$)\\
&\vdash (2, , \$)\\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, {\color{red}T}\$)\\
&\vdash (2, abaabb, TT\$)\\
&\vdash (2, baabb, TBT\$)\\
&\vdash (2, baabb, BT\$)\\
&\vdash (2, aabb, T\$)\\
&\vdash (2, abb, TB\$)\\
&\vdash (2, bb, TBB\$)\\
&\vdash (2, bb, BB\$)\\
&\vdash (2, b, B\$)\\
&\vdash (2, , \$)\\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$)\\
&\vdash (2, abaabb, TT\$)\\
&\vdash (2, baabb, TBT\$)\\
&\vdash (2, baabb, BT\$)\\
&\vdash (2, aabb, T\$)\\
&\vdash (2, abb, TB\$)\\
&\vdash (2, bb, TBB\$)\\
&\vdash (2, bb, BB\$)\\
&\vdash (2, b, B\$)\\
&\vdash (2, , \$)\\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$)\\
&\vdash (2, abaabb, TT\$)\\
&\vdash (2, baabb, TBT\$)\\
&\vdash (2, baabb, BT\$)\\
&\vdash (2, aabb, T\$)\\
&\vdash (2, abb, TB\$)\\
&\vdash (2, bb, TBB\$)\\
&\vdash (2, bb, BB\$)\\
&\vdash (2, b, B\$)\\
&\vdash (2, , \$)\\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# *Un calcul par AP*

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, {\color{red}T}BT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# *Un calcul par AP*

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# *Un calcul par AP*

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, \textcolor{red}{b}, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, {\color{red}B}\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# *Un calcul par AP*

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# Un calcul par AP

Exemple : $abaabb \in L(\mathscr{A})$ car

$$
\begin{aligned}
(1, abaabb, \$) &\vdash (2, abaabb, T\$) \\
&\vdash (2, abaabb, TT\$) \\
&\vdash (2, baabb, TBT\$) \\
&\vdash (2, baabb, BT\$) \\
&\vdash (2, aabb, T\$) \\
&\vdash (2, abb, TB\$) \\
&\vdash (2, bb, TBB\$) \\
&\vdash (2, bb, BB\$) \\
&\vdash (2, b, B\$) \\
&\vdash (2, , \$) \\
&\vdash (3, , )
\end{aligned}
$$

# *Grammaires, APs, AFNs*

Théorème.
Pour tout grammaire $\mathscr{G}$ il existe un AP $\mathscr{A}$ tel que $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{G})$.
Vice-versa :
Pour tout AP $\mathscr{A}$ il existe une grammaire $\mathscr{G}$ tel que $L(\mathscr{G}) = L(\mathscr{A})$.

Théorème.
Pour tout AFN $\mathscr{A}$ il existe une grammaire $\mathscr{G}$ tel que $L(\mathscr{G}) = L(\mathscr{A})$.

Considérez le langage

$$L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}.$$

Théorème.
Il existe un AP $\mathscr{A}$ telle que $L = L(\mathscr{A})$.
Il n'existe aucun AFN $\mathscr{A}$ tel que $L = L(\mathscr{A})$.

# *Grammaires, APs, AFNs*

Théorème.
Pour tout grammaire $\mathscr{G}$ il existe un AP $\mathscr{A}$ tel que $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{G})$.
Vice-versa :
Pour tout AP $\mathscr{A}$ il existe une grammaire $\mathscr{G}$ tel que $L(\mathscr{G}) = L(\mathscr{A})$.

Théorème.
Pour tout AFN $\mathscr{A}$ il existe une grammaire $\mathscr{G}$ tel que $L(\mathscr{G}) = L(\mathscr{A})$.

Considérez le langage

$$L = \{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\}\,.$$

Théorème.
Il existe un AP $\mathscr{A}$ telle que $L = L(\mathscr{A})$.
Il n'existe aucun AFN $\mathscr{A}$ tel que $L = L(\mathscr{A})$.

# *Grammaires, APs, AFNs*

**Théorème.**
Pour tout grammaire $\mathscr{G}$ il existe un AP $\mathscr{A}$ tel que $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{G})$.
Vice-versa :
Pour tout AP $\mathscr{A}$ il existe une grammaire $\mathscr{G}$ tel que $L(\mathscr{G}) = L(\mathscr{A})$.

**Théorème.**
Pour tout AFN $\mathscr{A}$ il existe une grammaire $\mathscr{G}$ tel que $L(\mathscr{G}) = L(\mathscr{A})$.

Considérez le langage

$$L = \{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\}\,.$$

**Théorème.**
Il existe un AP $\mathscr{A}$ telle que $L = L(\mathscr{A})$.
Il n'existe aucun AFN $\mathscr{A}$ tel que $L = L(\mathscr{A})$.

# *Le problème $w \in L(\mathscr{G})$*

- Algorithme en temps $O(n^3)$ :

T. Kasami.
An efficient recognition algorithm for context-free languages.
Technical Report AFCRL-65-758, Air Force Cambridge research Lab., Bedford, MA, 1965.

Daniel H. Younger.
Recognition and parsing of context-free languages in time $n^3$.
*Information and Control*, 10(2) :189–208, 1967.

- Pas satisfaisant au fin de l'analyse syntaxique.

Prochain objectifs :

- étudier des algorithmes – qui marchent en temps $O(n)$ – adaptés à des sous-classes de grammaires.