Exos no. 1

Langages, modèles, satisfaction

Exercice 1. Considérons le langage $\mathcal{L} = \langle \{ x, y, z, w \}, \{ s \}, \{ P \}, ar \rangle$ où $ar(s) = 1$ et $ar(P) = 2$. Considérez le modèle $\mathcal{M}$ avec $|\mathcal{M}| = \{ 0, 1, 2 \}$ avec $s^{\mathcal{M}}(x) = x + 1 \mod 2$ and $P^{\mathcal{M}} = \{ (0, 2), (2, 1), (1, 0) \}$.

1. Lesquelles parmi ces formules sont vraie, est quelles sont fausses :

$$\begin{aligned} &\exists x.\forall y.P(x, y) \\ &\forall x.\forall y.(P(x, y) \Rightarrow P(y, s(x))) \\ &\forall x.\exists y.(P(x, y) \wedge P(y, s(x)))\,. \end{aligned}$$

2. Prouvez formellement votre réponse à la première question.

Exercice 2. On souhaite avoir un langage formel pour parler de mots.

1. Définissez un langage permettant, par exemple, de formaliser des assertions telle que :
   - *toute lettre a est suivie par une lettre b*,
   - *le mot se termine par b.*
2. Formalisez ces assertions dans votre langage (on obtiendra des formules ϕ et ψ).
3. A partir du mot *abbbab*, définissez un modèle $\mathcal{M}(abbbab)$ pour ce langage.
4. Est ce que $\mathcal{M}(abbbab) \models \phi$? Est ce que $\mathcal{M}(abbbab) \models \psi$?
5. Montrez que, étant donné un mot $w \in \{ a, b \}^*$, on peut toujours construire un modèle $\mathcal{M}(w)$ pour ce langage.

Le calcul des séquents

Exercice 3. Choisissez un opérateur logique et montrez que les règles d'introduction de cet opérateur sont correctes : si cette règle est de la forme

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \ldots \Gamma_n \vdash \Delta_n}{\Gamma \vdash \Delta}$$

et $\mathcal{M}, v \models \bigwedge \Gamma_i \Rightarrow \bigvee \Delta_i$, pour tout $\mathcal{M}$, v, et tout $i = 1, \ldots, n$, alors $\mathcal{M}, v \models \bigwedge \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$, pour tout $\mathcal{M}$ et v.

Exercice 4. Montrez que la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A[y/x], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.A[x], \Delta}\; y \text{ n'est pas libre dans } \Gamma, \Delta$$

est dérivable dans le calcul des séquents.

Exercice 5. Écrivons $\phi \dashv\vdash \psi$ si $\phi \vdash \psi$ et $\psi \vdash \phi$ sont prouvables dans le calcul des séquents. En utilisant le calcul des séquents

1. montrez que $\phi \dashv\vdash \psi$ ssi $\vdash \phi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \phi$ sont prouvables dans le calcul,
2. montrez que

$$\begin{aligned} \phi \Rightarrow \psi &\dashv\vdash \neg\phi \vee \psi \\ \phi \wedge \psi &\dashv\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\ \forall x.\phi &\dashv\vdash \neg\exists x.\neg\phi\,. \end{aligned}$$

Machines de Turing

Exercice 6. Décrivez une machine de Turing permettant de renverser un mot sur le ruban.