Exos no. 2

Le lemme de simulation

Cette partie a pour but de faire une relecture critique de la preuve du Lemme de Simulation (le polycopié).

Question 1. Quel est la différence entre le langage présenté en cours et celui du polycopié ?

Exercice 2. Soit ϕ_Z la conjonction des formules (1-7) présenté en cours, et soit $\tilde{\phi}_Z$ la conjonction des formules (1-6) du polycopié.
Montrez que, étant donné $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi_Z$, on peut construire $\widetilde{\mathcal{M}}$ tel que $\widetilde{\mathcal{M}} \models \tilde{\phi}_Z$, et vice-versa. Argumentez que ces deux construction sont l'une inverse de l'autre.

Exercice 3. Listez :

1. Ceux que vous croyez être des erreurs dans le polycopié.
2. Les inférences de cette preuve que vous ne comprenez pas.

Formules universelles et formules existentielles

Une *formule universelle* ϕ est une formule de la forme

$$\forall x_1 \ldots x_n.\psi$$

où ψ ne contient pas des quantificateurs. Une *formule existentielle* ϕ est une formule de la forme

$$\exists x_1, \ldots, x_n.\psi$$

où ψ ne contient pas des quantificateurs.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles du même langage $\mathcal{L} = \langle X, F, R, ar\rangle$. Nous disons que $\mathcal{M}$ est un *sous-modèle* de $\mathcal{N}$ (et écrivons $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$) si

1. $|\mathcal{M}| \subseteq |\mathcal{N}|$,
2. $f^{\mathcal{M}} = f^{N}_{||\mathcal{M}|}$ (c'est-à-dire l'interprétation in $\mathcal{M}$ du symbole de fonction $f \in F$ est la restriction à $|\mathcal{M}|$ de l'interprétation de f in $\mathcal{N}$), pour tout $f \in F$,
3. $(x_1, \ldots, x_n) \in P^{\mathcal{M}}$ si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n) \in P^{\mathcal{N}}$, pour tout $P \in R$ tel que $ar(P) = n$ et tout tuplet $(x_1, \ldots, x_n) \in |\mathcal{M}|^n$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{M}$ un sous-modèle de $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Montrez les faits suivants :

1. Si ϕ est une formule universelle et $v : X \to |\mathcal{M}|$, alors $\mathcal{N}, v \models \phi$ implique $\mathcal{M}, v \models \phi$.
2. Si ϕ est une formule existentielle, alors $\mathcal{M}, v \models \phi$ implique $\mathcal{N}, v \models \phi$.

Le théorème d'indécidabilité de FOL

Nous avons prouvé, en cours, la proposition suivante :

Théorème 0.1. *Pour toute machine de Turing T et tout mot d'entrée w de cette machine, il existe une formule $\phi_{T,w}$ telle que*

$$T(w)\uparrow \quad \textit{ssi} \quad \textit{il existe } \mathcal{M} \textit{ tel que } \mathcal{M} \models \phi_{T,w}\,.$$

Exercice 5. Définissons maintenant

$$\psi_{T,w} := \phi_Z \wedge \phi_w \wedge \phi_\Delta \wedge \phi_{\text{s'arrête}}\,,$$

où

$$\phi_{\text{s'arrête}} := \exists x.\exists y.(x \geq 0 \wedge q_f(x,y))\,.$$

Est ce que la proposition suivante est correcte :

$$T(w)\!\downarrow \quad \textit{ssi} \quad \textit{il existe } \mathcal{M} \textit{ tel que } \mathcal{M} \models \psi_{T,w}\,.$$

(Remarquez que $\phi_{\text{ne s'arrête}}$ est une formule universelle, mais $\phi_{\text{s'arrête}}$ est une formule existentielle.)

Un peu de théorie des modèles

Exercice 6. Soit $\mathcal{L}$ un ordre linéaire (modèle des axiomes (1-3) du polycopié). Définissons un relation d'ordre sur $|\mathcal{L}| \times Z$:

$$(x,n) < (y,m) \;\text{ ssi }\; x <^{\mathcal{L}} y \;\text{ ou }\; (x = y \;\text{ et }\; n < m)\,.$$

Montrez que $|\mathcal{L}| \times Z$, avec cette relation, est aussi un ordre linéaire et un modele de ϕ_Z.
On parlera ainsi de produit lexicographique $\mathcal{L} \times Z$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi_Z$. Montrez que $\mathcal{M}$ est un produit lexicographique de la forme $\mathcal{L} \times Z$, où $\mathcal{L}$ est un ordre linéaire.
Idée :

1. Définissez, pour tout $x \in |\mathcal{M}|$, la composante connexe de x par rapport à $S^{\mathcal{M}}$, notée $[x]$.
2. Définissez, sur l'ensemble $\{\,[x] \mid x \in |\mathcal{M}|\,\}$ un ordre linéaire.
3. Si $0^{\mathcal{M}} \notin [x]$, fixez un élément $x_0 \in [x]$. Définissez

$$f(x) = \begin{cases} d(x_0,x) & \text{si } x_0 \leq x \\ -d(x_0,x) & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

   où $d(x,y)$ est la distance usuellle dans un graphe non-orienté. Montrez que $x < y$ si et seulement si $[x] < [y]$, ou bien $[x] = [y]$ et $f(x) < f(y)$, de façon que la fonction ψ qui envoie x vers $\psi(x) = ([x], f(x))$ est une bijection telle que $x < y$ ssi $\psi(x) < \psi(y)$.