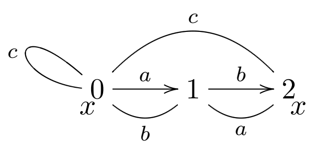
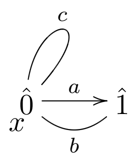
Exos no. 3

La logique multimodale, PDL

Exercice 1. Considérez ces deux systèmes de transition :

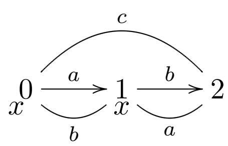




(Ici on a $0 \xrightarrow{c} 0$, $1 \xrightarrow{b} 0$, $2 \xrightarrow{c} 0$, $2 \xrightarrow{b} 1$, et $\hat{1} \xrightarrow{b} \hat{0}$, $\hat{0} \xrightarrow{c} \hat{0}$.)

1. Montrez que pour tout $k \geq 0$, on a $0 \sim_k \hat{0}$, $2 \sim_k \hat{0}$ et $1 \sim_k \hat{1}$.
2. Trouvez une formule ϕ de la logique multimodale telle que $0 \models \phi$ et $\hat{0} \not\models \phi$. Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Considérez le système de transition suivant :



(Ici on a $1 \xrightarrow{b} 0$, $2 \xrightarrow{c} 0$ et $2 \xrightarrow{b} 1$.)

1. Lesquelles de ces relations sont vraies ?

$$
\begin{aligned}
0 &\models \langle (a \cdot b)^* a \rangle [b] x \\
1 &\models [b] \langle (a \cdot b)^* \rangle x \\
0 &\models [(a \cdot b)^*] \langle a \cdot b \cdot c \rangle \top
\end{aligned}
$$

2. Prouvez formellement que vos réponses sont correctes – c'est-à-dire utilisez la définition inductive de la relation $\models$.

Exercice 3. Montrez que les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
\langle \pi \rangle (\phi \vee \psi) &\leftrightarrow \langle \pi \rangle \phi \vee \langle \pi \rangle \psi \\
[\pi](\phi \wedge \psi) &\leftrightarrow [\pi]\phi \wedge [\pi]\psi \\
\langle \pi^* \rangle \phi &\leftrightarrow \phi \vee \langle \pi \rangle (\langle \pi^* \rangle \phi) \\
[\pi^*]\phi &\leftrightarrow \phi \wedge [\pi]([\pi^*]\phi)\,.
\end{aligned}
$$

sont des tautologies de PDL.

Le théorème du modèle fini pour PDL

Exercice 4. Considérez la formule suivante :

$$\langle (a \cup b)^* \rangle (x \vee [(a \cdot b)^*](\neg y))$$

1. Traduisez cette formule dans la syntaxe de PDL où les seuls comme opérateurs logiques primitifs sont $\rightarrow, \bot, [\pi]$.
2. Construisez la clôture de Fisher-Ladner de cette formule.

Exercice 5. Pour prouver le théorème du modèle fini pour PDL nous avons enoncé le Lemme suivant :

Lemme 0.1. *Si* $[\pi]\phi \in FL(\phi_0)$ *alors*

1. $s \xrightarrow{\pi} s'$ *implique* $[s] \xrightarrow{\pi} [s']$,
2. $[s] \xrightarrow{\pi} [s']$ *et* $s \models [\pi]\phi$ *implique* $s' \models \phi$.

Dans la preuve (par induction sur la structure du programme π) du Lemme, nous avons oublié de traiter les cas suivants : $\pi = r \cup s$, $\pi = r \cdot s$.
Completez la preuve du Lemme en traitant ces cas.