Exos no. 4

Logique de Hoare

Exercice 1. Rappelons la règle d'inférence de la logique de Hoare qui porte sur le cycle `while` :

$$\frac{\{\,\phi \wedge \psi\,\}\ \texttt{p}\ \{\,\psi\,\}}{\{\,\psi\,\}\ \texttt{while}\ \phi\ \texttt{do}\ \texttt{p}\ \{\,\neg\phi \wedge \psi\,\}}$$

En utilisant le codage de la logique de Hoare dans PDL décrit en cours, montrez que cette règle est correcte.

Limites expressifs de PDL

Le but de cette partie est de relire de façon critique de la preuve de la séparation entre PDL sans test et PDL avec test (section 3 du deuxième polycopié).

Exercice 2. Listez :

1. Ceux que vous croyez être des erreurs dans le polycopié.
2. Les inférences de cette preuve que vous ne comprenez pas.
3. Proposez des améliorations à l'exposition de cette preuve.

Exercice 3. Soit

$$\phi = \langle (?(\neg x) \cdot a)^* \cdot ?x \cdot a \rangle \neg x\,.$$

En utilisant la définition de la relation $\models$ pour PDL avec test, montrez formellement que

$$\mathfrak{A}_m, v_m, k \models \phi\,, \qquad\qquad \mathfrak{A}_m, v_m, k+m \not\models \phi\,,$$

si $k \in \{\,0, \ldots, m-2\,\}$, pour tout $m \geq 2$.

Exercice 4.

1. Pour r une expression régulière arbitraire sur l'alphabet Σ, rappelez la définition de $\mathcal{L}(r) \subseteq \Sigma^*$, c'est-à-dire du langage dénoté par r.
2. En utilisant (1.), trouvez une définition inductive de l'ensemble $J_r \subseteq \mathbb{N}$.
3. Démontrez ce *Claim* :

$$\mathfrak{A}_m, v_m, k \models \langle r \rangle \psi \quad \text{ssi} \quad \exists j \in J_r \quad \text{t.q.} \quad (k+j) \bmod 2m \models \psi\,.$$

μ-calcul et points fixes

Exercice 5. Soit $\mathbb{S} = \langle S, \{ \xrightarrow{a} \}_{a \in act} \rangle$ un système de transition et $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ une fonction croissante. Par induction, définissons :

$$f^0(\emptyset) = \emptyset\,, \qquad\qquad f^{n+1}(\emptyset) = f(f^n(\emptyset))\,.$$

Argumentez que :

1. Si $n \leq m$, alors $f^n(\emptyset) \subseteq f^m(\emptyset)$.
2. Si $f^n(\emptyset) = f^{n+1}(\emptyset)$, alors $f^n(\emptyset) = f^m(\emptyset)$ pour tout $m \geq n$.
3. Si $\operatorname{card} S = k$, alors il existe $n \leq k$ tel que $f^n(\emptyset) = f^{n+1}(\emptyset)$.
4. Montrez que si $f^n(\emptyset) = f^{n+1}(\emptyset)$, alors $f^n(\emptyset)$ est le plus petit point fixe de f.

Exercice 6. Montrez que, si ϕ est une formule de la logique multimodale et x est une variable propositionnelle dont toute occurrence dans ϕ est sous un nombre pair de négations, alors la correspondance $f_{\phi,v}$ définie par

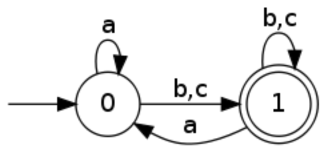
$$f_{\phi,v}(T) = |\phi|_{v[T/x]} = \{ s \in S \mid \mathbb{S}, v[T/x], s \models \phi \}$$

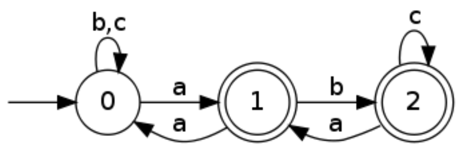
est monotone (croissante), où $\mathbb{S} = \langle S, \{ \xrightarrow{a} \}_{a \in act} \rangle$ est un système de transition arbitraire et $v[T/x]$ est la valuation égale à v pour toutes les variables distinguées de x et telle que $(v[T/x])(x) = T$.
Remarque : vous pouvez avoir besoin de démontrer à la fois que si ϕ est une formule de la logique multimodale et x est une variable propositionnelle dont toute occurrence dans ϕ est sous un nombre *impair* de négations, alors la correspondance $f_{\phi,v}$ est anti-monotone.

Exercice 7. Quels problèmes se posent si on veut généraliser la proposition démontrée par l'exercice précèdent à toute formule du μ-calcul ? Donnez une trace.

Automates sur le mots infinis

Exercice 8. Déterminez les langages reconnus par les automates de Büchi suivants :

1. 

2. 

Exercice 9. Décrivez des automates de Büchi qui reconnaissent les langages de mots infinis suivants :

1. $L_1 = \{ w \in \{ a, b, c \}^\omega \mid$ pour tout i, si $w_i = a$ alors il existe j t.q. $i < j$ et $w_j = b \}$.
2. $L_2 = L_1 \cap \{ w \in \{ a, b, c \}^\omega \mid$ il existe un nombre infini de i tels que $w_i = a \}$.